This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

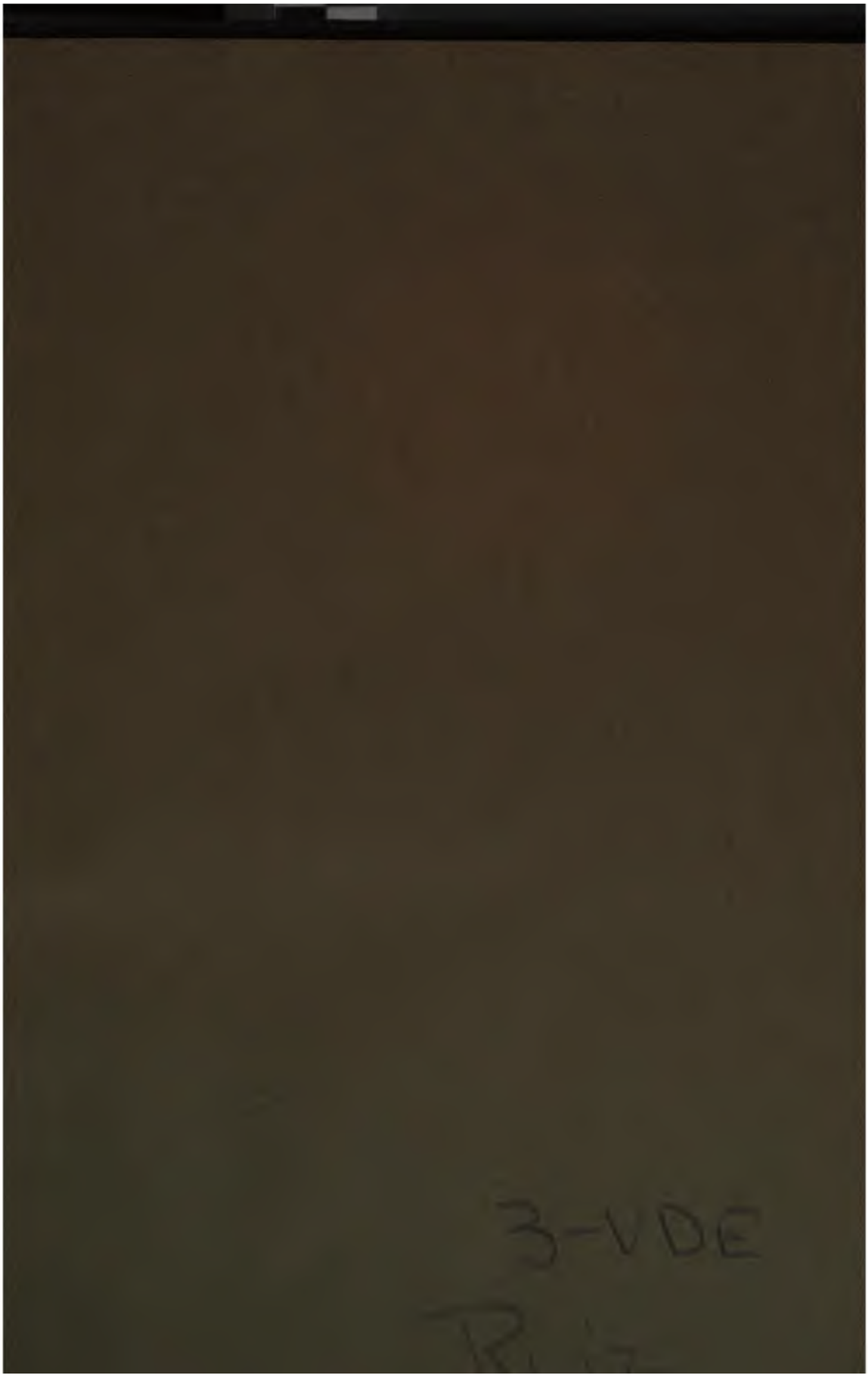
+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`


3-VDE

RARE BOOKS

TRATADO

DE

TOPOGRAFÍA MODERNA

Áp. 28.2
Lu

TRATADO

DE

TOPOGRAFÍA MODERNA

POR

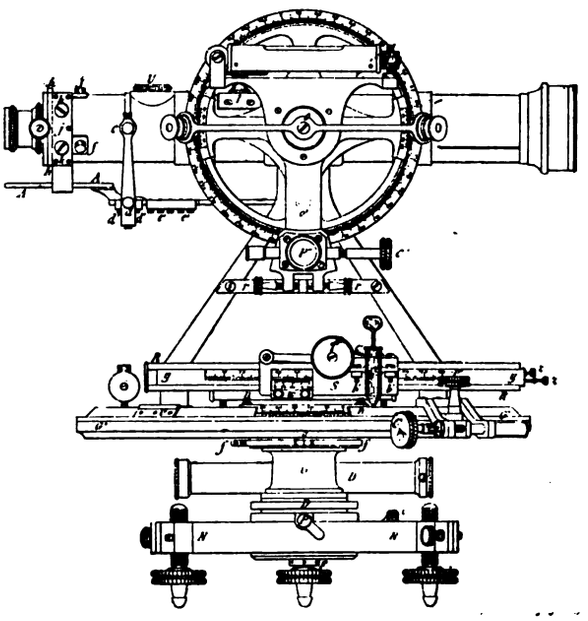
D. HILARIÓN RUIZ AMADO

Ingeniero de Montes

Inspector general del Cuerpo del Estado

(jubilado)

VOLUMEN SEGUNDO



Autoreductor numérico-gráfico de Mas y Zaldua

THOMAS — BARCELONA

1905

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
90722A
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1923 L

ES PROPIEDAD DEL AUTOR

PROCEDIMIENTOS TOPOGRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

Conocida la manera de medir los ángulos y las distancias, de lo que con suficientes deta lles nos ocupamos en la *segunda parte* del volumen primero, y los aparatos utilizados al efect con los procedimientos antiguos y modernos, de que hemos dado cuenta en la *tercera*, es natu ral que ahora lo hagamos de estos procedimientos; esto es, de la manera mas apropiada en cad caso de elegir y combinar aquellos elementos para determinar con la necesaria precisión y e menor trabajo la posición relativa de todos los puntos y líneas característicos del terreno expre sándola gráfica ó numéricamente mediante su plano topográfico.

Si hubiéramos de concretarnos á exponer los procedimientos *taquimétricos*, fácil sería nues tro trabajo; pero no sucede esto, porque como ni aun los mas sencillos de los antiguos dejan d tener aplicación en determinados casos por sí solos ó como auxiliares de los otros, los moder nos son perfeccionamiento de aquellos y no bastan por sí mismos para los planos de grand extensión y para realizar nivelaciones de grande precisión, aunque permitan mejorar los anti guos procedimientos á estos casos destinados, no podemos dejar de ocuparnos de todos desarro llándolos ordenadamente para que en cada caso pueda el Topógrafo, prescindiendo de impro cedentes exclusivismos, hacer la combinación que mas le convenga.

A tal efecto dividirémos este volumen en tres *partes*, dedicando la
primera á los procedimientos antiguos; la
segunda á los modernos y la
tercera á las triangulaciones topográficas y nivelaciones de precisión
haciendo en cada una oportunamente las consideraciones críticas procedentes para que mas fá cilmente se comprenda lo que pueda y deba tener aplicación, segun las circunstancias, en cad caso.

28x10

PRIMERA PARTE

PROCEDIMIENTOS ANTIGUOS

1 — Clasificación de la materia.

Por las razones consignadas en el número 105 del volumen primero, hemos de ocuparnos separadamente de los procedimientos planimétricos y de los altimétricos y para hacerlo con órden subdividir cada uno de los capítulos correspondientes entre artículos, comprendiendo en el primero todo lo relativo á la *teoría*, en el segundo los *trabajos de campo* y en el tercero *los de gabinete*, intercalando entre el primero y segundo del primer capítulo otro artículo destinado á la exposición de las tolerancias admitidas en diferentes países para que sirvan de norma en los trabajos de campo y en las comprobaciones del gabinete correspondientes á todos los procedimientos.

CAPÍTULO I

TEORÍA Y APLICACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS PLANIMÉTRICOS

ARTÍCULO PRIMERO

TEORÍA DE LOS ANTIGUOS PROCEDIMIENTOS PLANIMÉTRICOS

2 — Su clasificación.

Como quiera que, ya porque en el terreno están unidos sus puntos característicos por accidentes lineales mas ó menos regulares, ya porque para determinar su posición relativa, bajo el concepto planimétrico, los consideremos unidos por rectas imaginarias, es indudable que siempre se puede con ellos y otros puntos auxiliares constituir polígonos de lados rectos, que coincidan ó se acerquen en gran manera á los accidentes del terreno.

Por esta razón y porque el plano debe presentar figuras semejantes á las del terreno, cuya razón lineal es la escala, los procedimientos topográficos se fundaron en las distintas combinaciones de condiciones exigidas por la Geometría para la semejanza de los polígonos en general; y como las principales y mas sencillas de estas combinaciones son las tres siguientes:

1.ª Que bajando perpendiculares desde sus vértices á una recta cualquiera, pero de iguales condiciones de situación en ambos polígonos, las abscisas y ordenadas ó sean las distancias del pié de estas perpendiculares á un origen determinado y su magnitud sean respectivamente proporcionales y con igual razón en todas;

2.ª Que siendo respectivamente iguales los ángulos interiores de los dos polígonos los lados homólagos sean proporcionales y

3.ª Que divididos análogamente en triángulos se compongan de igual número de ellos, igualmente dispuestos y respectivamente semejantes, se establecieron los tres sistemas denominados

1.° *de coordenadas ortogonales ó de perpendiculares;*
2.° *de recorrimiento ó poligonal* y
3.° *de triangulación.*

Pero como para que el primer sistema pudiera conservar su condición característica de *un solo eje* sería preciso medir innecesariamente muchas y grandes distancias en algunos casos, distancias que pueden reducirse considerablemente admitiendo varios ejes secundarios relacionados y dependientes de aquel, es mas propio denominarle de *perpendiculares* reservando el nombre de *coordenadas ortogonales* para las propias de los planos modernos, numéricos ó gráficos, en que se cumple aquella condición característica sin aumentar el trabajo necesario.

Como por otra parte la semejanza de los triángulos, base del tercer sistema, se funda principalmente en tres combinaciones de sus elementos; esto es, que sean proporcionales los tres lados; que lo sean dos é igual el ángulo comprendido ó que estando un lado con su homólogo en la razón deseada sean iguales los dos angulos adyacentes, es consiguiente que tal sistema se ha de subdividir en tres métodos, que respectivamente se llaman de *medición, radiación* é *intersección*, que con los dos sistemas primeros y el *mixto* resultante de su combinación constituyen los procedimientos de la antigua Topografía.

Estas consideraciones, en lo esencial, se representan gráficamente en las figuras 1.ª y 2.ª suponiendo la 2.ª construida por cualquiera de los tres sistemas con la condición necesaria de ser la misma la razón de todas las distancias homólogas en ambos polígonos, lo que se comprende fácilmente y asi mismo que si desde los vértices H, J, K y L se bajaran perpendiculares á la

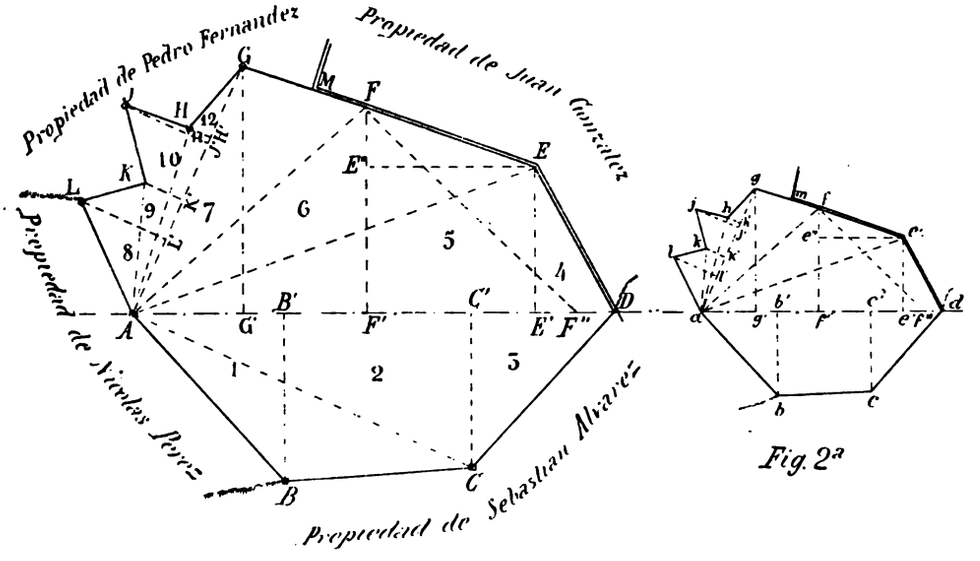


Fig. 1ª

Fig. 2ª

diagonal A D, que sirvió de eje para los demas, habría que medir distancias mayores que las que son necesarias utilizando para eje secundario la diagonal A G previamente determinada.

Por consiguiente si suponemos que el primer polígono es el del terreno en su verdadera magnitud y que tomando en él los datos necesarios en la forma indicada para cada sistema se construye con los de cada uno el segundo, utilizando la razón, p. e., de $^1/_{1000}$ en las distancias homólogas, es indudable que este será el plano de aquel en la escala de 1 : 1000.

3 — Sistema de perpendiculares.

La teoría de este procedimiento queda expuesta en las breves indicaciones antes consignadas y de ellas se deduce que los *aparatos propios* para su aplicación son la *escuadra* y *el reglón*, *cinta* ó *cadena*, así como tambien que en el terreno se han de bajar sobre el eje ó ejes las per-

pendiculares y en la construcción del plano en el papel aquellas se han de levantar en las abscisas determinadas con la escala.

Como de no elegir acertadamente el eje ó ejes necesarios se podría aumentar considerable é innecesariamente el enojoso trabajo de medición de las distancias, es lo que debe procurarse con mas cuidado teniendo en cuenta las condiciones del terreno para evitar en lo posible aquella molestia y consiguiente pérdida de tiempo.

Imposible es dar á conocer á tal efecto los infinitos casos que pueden ocurrir y la mejor

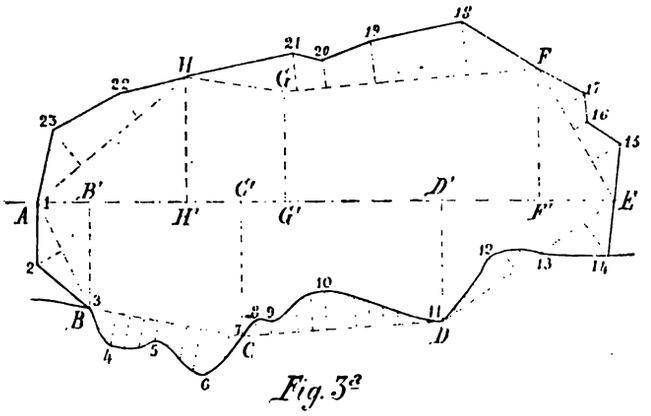


Fig. 3ª

manera de proceder en cada uno; pero como medio de ilustración indicarémos algunos de ellos con figuras, en las que las líneas de construcción ya indican la marcha del procedimiento conveniente.

Así en la figura 1.ª se indica un caso muy general, cuyas condiciones quedan referidas.

En la figura 3.ª se representa el caso de un terreno, en que por ser muchos y cortos los lados de parte de su perímetro y otra de este formada por curva irregular, se utiliza para eje general una línea cualquiera en el sentido de su mayor longitud y para secundarios los lados de un polígono auxiliar en parte inscrito y en parte circunscrito, utilizándose en el perímetro cur-

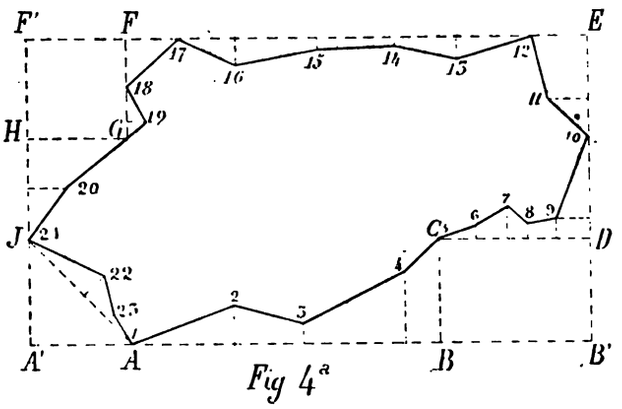


Fig 4ª

vilíneo abscisas que difieren en igual número de metros (generalmente uno ó dos decámetros) para facilitar la construcción.

En la figura 4.ª se representa el caso de un terreno boscoso interiormente inaccesible á la medición directa, en que se utilizan para ejes los lados de un rectángulo exterior ó de un polígono de él derivado.

En la figura 5.ª se representa el caso de un terreno, cuyos vértices son inaccesibles y que por lo tanto se determinan por intersección de perpendiculares á los lados de otro perímetro auxiliar exterior rectangular.

En la figura 6.ª se representa, finalmente, el caso en que parte del eje y de dos perpendicu-

lares (CC" y EE") no se pueden medir directamente en toda su longitud por impedirlo una hoya, pequeña laguna, etc., y para obviar este inconveniente se sustituyen por los ejes auxiliares G"H"G'H' y las perpendiculares EE' y CC', que permiten determinar las coordenadas AE", EE" y AC", C"C muy sencillamente.

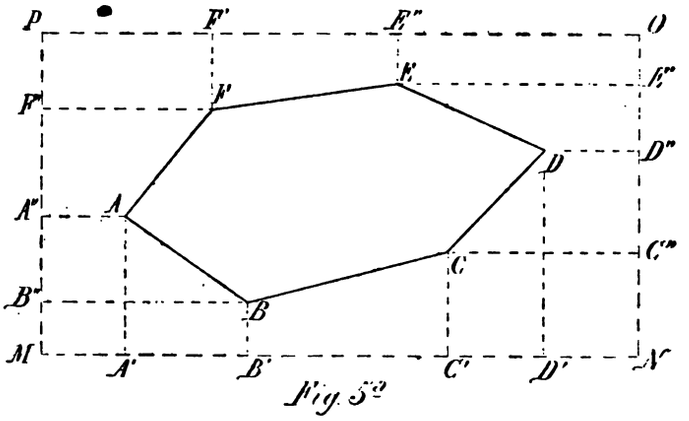


Fig. 5ª

Hasta ahora hemos supuesto que solo se tratara de levantar el plano del perímetro de un polígono cerrado; pero fácilmente se comprende que si se deseara determinar también los accidentes interiores ó detalles de aquel ó levantar el plano de un objeto determinado, como un

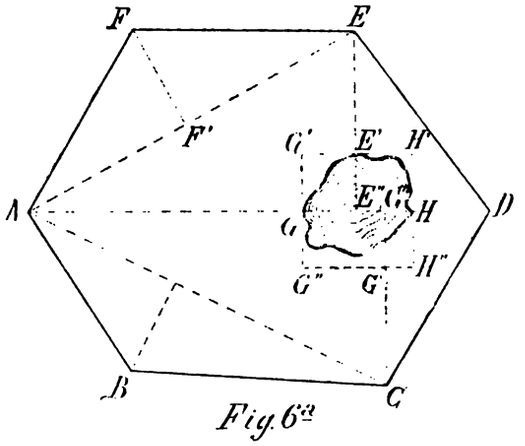


Fig. 6ª

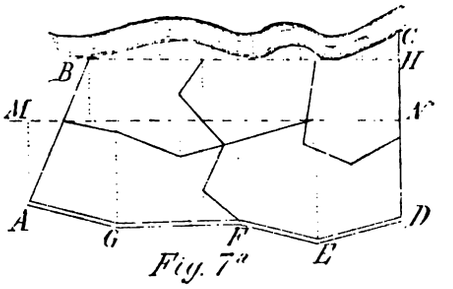


Fig. 7ª

camino, un río, una parte del límite de un predio, etc., se procedería en la misma forma cuidando en el primer caso de que los ejes principal y secundarios utilizados para el perímetro pudieran destinarse á los detalles y que los especiales que fuese necesario establecer se relacio-

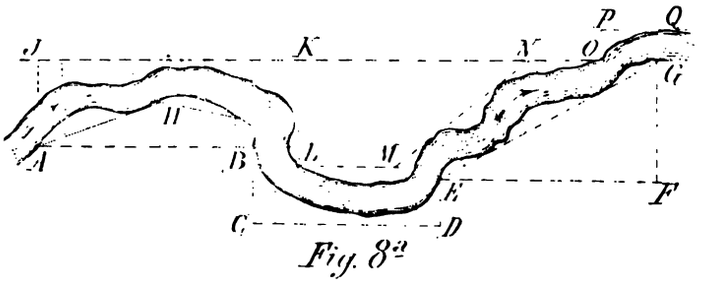


Fig. 8ª

naran con aquellos ó con puntos fácilmente determinables del perímetro, como se indica en la figura 7.ª y en el segundo caso partiendo y terminando en puntos fijos del terreno se establecerían los ejes, que con menor trabajo permitieran determinar la posición relativa de sus puntos característicos, como se indica en la figura 8.ª

Fácilmente se comprende en vista de las precedentes indicaciones que, si es sencilla la consignación de los datos en registros ordenados y la construcción de los planos por este procedimiento levantados, como harémos ver en los artículos siguientes, ha de ser por necesidad relativamente penoso el trabajo de campo que motivan por las muchas distancias, que se han de medir, que no ofreciendo mas comprobación que la consiguiente á la repetición de tal trabajo ó á la medición de otras distancias análogas, ha de dar lugar á los errores consiguientes y á frecuentes equivocaciones si no se hacen las comprobaciones indicadas (1); que la precisión en los resultados depende de la clase de utensilio y del cuidado con que se emplee en el molesto y minucioso trabajo de la medición directa de las distancias, que han de realizar generalmente personas irresponsables y poco escrupulosas y que en terrenos escabrosos ó cubiertos de estorbos tanto la determinación de las perpendiculares como la medición ofrecen tantas dificultades y motivan tales errores y equivocaciones que el sistema es de muy difícil sino de imposible aplicación; *por todo lo cual solo se la dá en los planos de cortísima extensión en terrenos llanos y limpios.*

En estos, procediendo con cuidado en la elección de los ejes principal y secundarios, en la fijación de los pies de las perpendiculares y midiendo las distancias dos veces con reglón ó con la cinta de acero en sentido contrario, se pueden conseguir planos de mucha precisión y por esto se aplica este sistema con provecho en los de edificios y solares y otros semejantes y no en los de extensión de mas de 2 ó 3 hectáreas sino es en el caso de carecerse de un goniómetro ó goniógrafo y aun en este caso debiera preferirse el método de medición ó los demas utilizando para la de los ángulos el sistema de las cuerdas de que nos ocupamos en el número 7 del volumen primero.

Pero, si por sí solo es de muy limitada aplicación este sistema, la tiene grande como auxiliar de todos los demas en la determinación de los pequeños detalles, que permiten simplificar la aplicación de aquellos, como irémos viendo al tratar de cada uno de ellos.

4 — Sistema de recorrimiento ó poligonal.

Sirviendo de base á la teoría de este procedimiento la igualdad de los ángulos del polígono del terreno y del que en el papel constituye su plano y la proporcionalidad en los lados homólogos de ambos, parece natural que para el levantamiento de los planos por este sistema haya de ser indispensable un goniómetro ó goniógrafo y un diastímetro; pero no sucede así, porque tambien con el último se pueden medir los ángulos con bastante precisión por *las cuerdas de sus arcos*, segun detalladamente explicamos en el número 7 del volumen primero; mas como quiera que por este medio se aumenta el muchas veces penoso trabajo de la medición directa de

---

(1) Estas son de tres clases; consistentes la

1.ª En medir todas las distancias dos veces en sentido contrario, lo que tiene la ventaja, en los ejes, de dar para cada abscisa dos distancias complementarias, cuya suma es igual á la magnitud del eje; porque su respectivo origen está en diferente extremo y en las normales largas, como las cadenadas de la medición 1.ª no coinciden con las de la 2.ª, se evitan los errores de las componendas de los medidores: *esta comprobación es la que mas se utiliza.*

2.ª Cuando la escuadra permite medir ángulos de 45 y de 135°, se determina sobre el eje el punto donde concurre la visual que vá al extremo de la normal formando estos ángulos con el eje (F″F en la figura 1.ª) y su distancia al pié de aquella (F″F′) es igual á la normal (F′F); como la distancia de todos modos se ha de medir, el trabajo exigido por esta comprobación consiste en determinar y marcar el punto (F″) y en anotar la distancia resultante al pié de la normal. *Se aplica esta comprobación á las largas y cuando su medición es difícil por interponerse algun obstáculo.*

3.ª Finalmente, otra comprobación consiste en la medición de la recta que une las cabezas de dos normales consecutivas (G F ó F E de la figura 1.ª); como ello implica nuevas mediciones solo se aplica en los planos de poblaciones midiendo las líneas de fachada y en los de edificios y solares, en que por la necesidad de conseguir grande precisión por el mucho valor del terreno se suele comprobar tambien midiendo las diagonales; como todas estas líneas son generalmente de pocos metros todo el trabajo que exigen tales mediciones se hace en poco tiempo; pero no sucedería lo mismo si se aplicaran á los planos de mayor extensión.

las distancias, cuando se disponga de uno de aquellos aparatos se debe utilizar si la extensión y condiciones del terreno lo permiten, porque no siempre sucede esto como ya entonces hicimos constar, y en las pequeñas extensiones desaparecen ordinariamente los inconvenientes de la medición directa de las distancias y encuentra propicia aplicación el sistema de las cuerdas solo ó combinado con el de perpendiculares y el de medición, como sucede en edificios y solares, huertas y jardines.

No es tampoco necesario medir precisamente los ángulos interiores del polígono del terreno, pues basta determinar la dirección de sus lados ya que conocida esta y su magnitud es fácil construir el polígono semejante de su plano, y precisamente la brújula, con que esto se realiza mas comunmente, ha sido y es para muchos Topógrafos el *aparato característico de los recorrimientos* ó *itinerarios*.

Puede admitirse esta opinión relativamente á los de poca precisión, porque se realizan rápidamente con las brújulas sencillas y las de bolsillo, aunque en terrenos de suaves pendientes son preferibles en tal concepto y en el de la precisión otros aparatos, como los sextantes y círculos de reflexión; pero, como ya demostramos en el número 156 del volumen primero, hay en tan generalizada opinión muchos prejuicios y preocupaciones infundadas, que la hacen inadmisible en los planos de bastante precisión y ni siquiera les es exclusiva la ventaja entonces demostrada, de que *con los rumbos de la brújula se disminuyen los errores en la construcción de los planos, que con ellos es tambien mas sencilla*, pues, como luego verémos, esto mismo se consigue, al par que mucha mayor seguridad y precisión, con las pantómetras perfeccionadas y los teodolitos *conservando la orientación con el limbo azimutal*.

Lo antes consignado no implica contradicción con la base fundamental de la teoría del sistema, porque de la dirección ó rumbo de los lados se deducen fácilmente, si se considera conveniente, los ángulos interiores del polígono, ó de estos y el rumbo de uno de ellos los de los demas, como luego verémos.

Por ahora importa mas que para apreciar las condiciones generales del sistema indiquemos su marcha con cada clase de aparatos y las comprobaciones á que se presta en polígonos cerrados y en perímetros abiertos, pues naturalmente estos dos casos se presentan en la práctica.

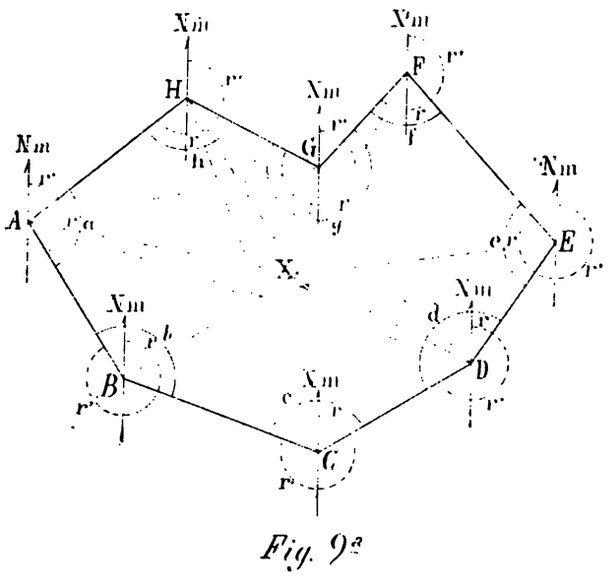


Fig. 9ª

En polígonos cerrados.

Supongamos que la figura 9.ª representa el del terreno; que en este se hayan marcado con banderolas ó jalones clavados verticalmente sus vértices y un punto interior X visible desde todos ellos; que asi mismo lo sean desde A los D y G, el H desde C y D y desde cada uno el anterior y siguiente y finalmente que la graduación del limbo azimutal y los rumbos aumenten en el sentido de N. á E. S. y O.

Esto supuesto y colocado en estación en el vértice A el aparato, *pantómetra* ó *teodolito*, bien nivelado su limbo azimutal, arreglado el ocular del anteojo á la vista del observador, suelta la aguja imanada de la brújula y en coincidencia las graduaciones 0° y 180° del limbo con el cero de sus nónius opuestos y asegurada la alidada al platillo del limbo, se hace girar este y aquella unidos hasta que el plano de colimación comprenda la banderola del vértice H, en cuya situación se fija el platillo del limbo comprobando y en caso necesario corrigiendo la coincidencia de las graduaciones 0° y 180° con el cero de los nónius opuestos.

Cuando hayan cesado las oscilaciones de la aguja imanada, se lee la graduación, que señala en el limbo de la brújula tomando nota de ella, pues será el rumbo del lado AH, no solo al objeto de orientar el plano sino al de evitar equivocaciones comprobando sucesivamente los rumbos de los lados con sus inversos, é inmediatamente despues se pone en libertad la alidada haciéndola girar hasta que el plano de colimación comprenda la banderola del vértice B sujetándola entonces con el tornillo de presión y afinando la coincidencia con el á esta destinado, la graduación que en el limbo azimutal señale entonces el cero del nónius primero será el valor del ángulo HAB, el del nónius segundo le comprobará, pues difiere de aquella en 180° justos y la aguja imanada señalará el rumbo del lado AB, que restando de él el de AH dará tambien aproximadamente el valor del mismo ángulo HAB en este caso, en que los dos lados AH y AB están al de la derecha de la meridiana; se anotan los datos referidos y se hacen las comprobaciones indicadas.

Inmediatamente despues se dirigen visuales sucesivamente á los puntos G, X y D de comprobación anotando los rumbos, que para cada uno señale la aguja imanada y las graduaciones que en el limbo azimutal marque el cero del nónius primero respectivamente para los ángulos HAG, HAX y HAD, que con grande provecho se utilizarán despues en la construcción del plano, asegurando desde luego la aguja imanada.

Hemos prescindido de los ángulos verticales, porque nos concretamos ahora á la proyección horizontal, pero si se quieren despues calcular las alturas relativas por este medio, lo que es siempre conveniente y aumenta poco el trabajo, se cuida de hacer que en cada visual la cruz filar coincida con un punto de la banderola de altura conocida y se mide la del eje de muñones del anteojo para hacer despues la corrección i—m, así como tambien de leer y anotar para cada lado los ángulos verticales, con lo cual se tendrá la *observación completa* en la estación A.

Mientras se hace todo esto, que es mas largo de referir que de realizar, los cadeneros, dirigidos y vigilados por el Ayudante, miden la distancia AB determinando, en caso necesario, los pequeños detalles con este lado relacionados, haciendo la medición dos veces, al menos, en distinta dirección con el reglón ó la cinta de acero, cuando se quiere conseguir bastante precisión y una con la cadena ó cinta de hilo en otro caso.

Trasladado el aparato al vértice B, nivelado el limbo azimutal, puesta en libertad la aguja y hecha la coincidencia del cero de aquel con el del nónius primero y comprobada con el del segundo, se hacen girar limbo y alidada unidos hasta que el plano de colimación comprenda la banderola clavada verticalmente en el punto A utilizando á tal objeto los tornillos de presión y coincidencia que rigen los movimientos del platillo de este limbo; esto conseguido se lee y anota el rumbo inverso dado por la aguja para el lado BA, que ha de diferir en 180° del directo AB, con lo cual se tiene desde luego una comprobación, pero con la inseguridad consiguiente á las variaciones y perturbaciones de la aguja y su poca precisión, si bien evita las equivocaciones; despues se pone en libertad la alidada, se la hace girar hasta que el plano de colimación comprenda exactamente la banderola clavada en el punto C y se lee y anota el valor del ángulo ABC que señalará en el limbo el nónius primero y comprobará el segundo y el rumbo de BC, que marcará la aguja en el limbo de la brújula y permitirá hacer una comprobación inmediata del ángulo ABC, completando la observación con los ángulos verticales en la forma antedicha, si se creyera conveniente, pues este es igual al rumbo BC + 360° — rumbo BA, como claramente se deduce de la figura.

Suéltase la alidada y se dirige la visual al punto de comprobación X leyendo y anotando en igual forma el rumbo de BX y el ángulo ABX, con lo que quedará terminada la observación en la estación B.

Durante ella el Ayudante con los cadeneros mide la distancia BC y determina los pequeños detalles con este lado relacionados.

Del mismo modo se procederá en todos los vértices sucesivos del polígono cuidando de hacer en D ademas de la observación general de comprobación á X la recíproca de A y la directa de H; en G la recíproca de A y en H las de C y D.

Ademas de las comprobaciones que suministran desde luego los rumbos inversos de todos los lados y diagonales observados, suministra otra mas fehaciente la suma de los ángulos interiores del polígono, que debe ser igual á tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos y si se hace la estación complementaria de X se aumentan estas comprobaciones con los rumbos inversos de las direcciones radiales X A, X B... etc. y con los ángulos A X B, B X C... etc. porque conociendo así el valor de los tres ángulos de cada uno de los triángulos, en que queda dividido el polígono, la suma de cada grupo debe ser igual á dos rectos facilitando despues el medio de descubrir y anular todo error notable solo con que se tenga seguridad de haber medido bien un solo lado: otras comprobaciones presta este sistema que darémos á conocer en *los trabajos de gabinete.*

Si en lugar de proceder como queda dicho y se hacía antes, aun en los trabajos mas delicados, se *conserva la orientación con el limbo azimutal*, no solo se disminuye el trabajo simplificándole, sino que se procede con mas seguridad consiguiendo sobre el terreno comprobaciones mas precisas, pues los rumbos no se obtienen con la indeterminación y poca precisión propias de la aguja imanada sino con la seguridad y exactitud que á los limbos y nónius corresponden, utilizando la brújula como simple testigo para evitar equivocaciones.

En efecto: si cuando puesto el aparato en estación en el vértice A, nivelado su limbo azimutal, hecha la coincidencia de su cero con el nónius primero y consiguientemente el del segundo con la graduación 180° y soltada la aguja, se hacen girar limbo y alidada unidos hasta que la aguja señale en completo reposo el cero del limbo de la brújula, declinada ó no, es indudable que, sí el aparato está bien corregido, el plano de colimación del anteojo, que suponemos centrado, coincidirá con el meridiano geográfico ó con el magnético y si en tal situación se fija el limbo y dando libertad á la alidada se dirigen sucesivamente visuales á los puntos H, G, X, D y B, los ángulos, que respectivamente se lean con el nónius primero en el limbo, serán los rumbos de las direcciones A H, A G, A X, A D y A B y por consiguiente si cuando instalado el aparato en B en lugar de hacer la coincidencia del cero del nónius primero con el del limbo azimutal se hace con la graduación correspondiente al rumbo A B $\pm$ 180°, es indudable que señalará su inverso y si se dirige la visual al punto A y en ella se fijan el limbo y alidada unidos, el diámetro 0°—180° tendrá en la estación B una dirección perfectamente paralela á la que tenía en A, y siendo la distancia pequeña relativamente á la que se necesita para que se haga perceptible la convergencia de los meridianos, en el punto B estará dicho diámetro 0°—180° comprendido en el geográfico ó magnético, como lo estaba en A y así lo atestiguará la brújula con el grado de precisión y fidelidad que la caracterizan.

Si asegurado en esta posición el limbo se suelta y hace girar la alidada hasta que el plano de colimación comprenda sucesivamente las banderolas fijadas verticalmente en los puntos X y C, con el cero del nónius primero de la alidada se determinarán los rumbos ó azimutes de B X y B C con toda la seguridad y precisión propias del aparato con relación á la directa originaria A N y así lo justificará la brújula.

Procediendo análogamente en los vértices sucesivos, en D ya se tendrá una comprobación segura con el rumbo D A inverso del A D, que diferirán precisamente en 180° y lo mismo se observará en G A, H A, H C y H D y si ademas se hace estación en X y orientando con el inverso de A X se dirigen visuales á todos los demas vértices, por ser inversos de los rumbos obtenidos desde cada uno la comprobación en los ángulos será inmediata y completa y dará los elementos necesarios para calcular sencillamente el valor de los ángulos interiores del polígono y los tres de cada uno de los triángulos, en que aquel queda dividido y las coordenadas planimétricas de todos los puntos observados.

Se comprende fácilmente la mayor sencillez de este proceder que al par la presenta mucho mayor en los trabajos de gabinete, ya se construya el plano con trasportador, ya se calculen las coordenadas de sus vértices, comparado con el anterior y así mismo que con él la pantómetra y el teodolito ofrecen en la comprobación sobre el terreno y en la construcción del plano todas las ventajas de la brújula y ninguno de sus inconvenientes.

Con las brújulas que no tienen limbo azimutal, ó si teniéndole no se quiere hacer uso de él, naturalmente no hay que hacer las coincidencias antes consignadas sino esperar á que la aguja permanezca quieta y dirigiendo visuales á cada punto anotar los rumbos directos é inversos, que la aguja señale, comprobando con los segundos si en los primeros se cometió equivocación ó notable error y las perturbaciones que motivaran influencias estrañas.

Ciertamente que la observación en cada estación se hará en bastante menos tiempo con atmósfera tranquila; pero si sopla viento algo fuerte que haga oscilar constantemente la aguja ó esta se halla perturbada ó *alocada* por las influencias accidentales, de que nos ocupamos en los números 101 y 156 del volumen primero, en lugar de la indicada economía en trabajo y tiempo se consigue pérdida y la impaciencia y malestar del operador atormentado por la duda de conseguir el dato necesario.

De todos modos se comprende que con estos aparatos nunca se tendrá la seguridad y precisión que con las buenas pantómetras y teodolitos y si, como en estos, se utiliza el limbo azimutal, en las que le tienen, hay que proceder enteramente como con ellos y desaparece aquella economía de tiempo y de trabajo.

Con el sextante y *el círculo de reflexión*, en los terrenos que permiten su aplicación, es mucho más rápida la observación, porque no exigen su puesta en estación; pero, como con ellos solo se pueden medir los ángulos interiores ó exteriores del polígono, no dan directamente mas comprobación que la de la suma de todos los interiores y la de los que se forman en el punto X, cuando en él se hiciese estación, pues es sabido que la suma de estos ha de ser igual á 360° y ademas hacen los trabajos de gabinete mas molestos.

Con la plancheta se opera en la forma explicada en el número 172 y si se utiliza el *procedimiento recomendable*, de que allí dimos noticia detallada, se consiguen sobre el terreno con suficientes comprobaciones (en los límites de precisión del graficismo en el campo, y con los inconvenientes que al uso de tales aparatos señalamos) resultados aceptables; pero inferiores á los de los aparatos anteriores.

En la forma que dejamos consignada es cuando este sistema ofrece mayores condiciones de seguridad y precisión, en cuanto lo permite la medición directa de las distancias; pero es solo extrictamente aplicable en terrenos de extensión inferior á 100 hectáreas, de forma análoga á los polígonos regulares y que permitan ver desde un punto interior próximo al centro todos ó la mayor parte de los vértices; porque en los de mayor extensión ó cuando la forma general es alargada ó muy irregular será casi siempre necesario tomar dos ó mas puntos interiores ó exteriores para la comprobación y esta resultará parcial y menos completa.

En perímetros abiertos.

Pueden ocurrir dos casos generales;

1.° *Que la línea poligonal una dos puntos determinados previamente por una triangulación ó poligonación bien comprobadas y*

2.° *Que la poligonal se desarrolle entre dos puntos de situación no definida.*

El primer caso realmente debiera comprenderse entre los de perímetros cerrados, porque de una ú otra manera lo queda la poligonal con la recta que une sus extremos, especialmente si son visibles uno de otro; pero como no siempre esto sucede, como perímetros abiertos se consideran y es el caso que ocurre con mas frecuencia, creemos oportuno dar aquí una idea de la marcha que se ha seguido y sigue y la modificación que se debe introducir.

Supongamos que, como en la figura 10 se indica, la poligonal vaya desde el vértice (35) al (26) de una triangulación previamente realizada, distantes entre sí mas de tres kilómetros y que esté destinada, como generalmente sucede, á servir de base para detallar una de las grandes líneas divisorias del terreno, como ríos, arroyos, caminos, carreteras ó sendas, el límite de un gran predio, de una sección de término municipal, etc., etc.

Naturalmente no se podrá, como en el caso de la figura 9.ª, elegir un solo punto de comprobación, porque no sería visible desde todos los vértices principales de la poligonal ó tendría

lugar en malas condiciones; pero sí podrán señalarse tres ó mas en que esto no suceda y que sean puntos notables del terreno que convenga determinar por cualquier motivo y especialmente porque han de servir de vértices de otra poligonal al objeto de relacionarlas entre sí y comprobar al menos algunos de los triángulos resultantes, como por ejemplo, los AXC, CXE, EX'J, HX"K y KX"M, lo cual si motiva algun trabajo en el movimiento de banderolas, no es difícil, ya que si bien no están determinados directamente los lados AC, CE, EJ, HK y KM, lo serán gráficamente en el plano y en caso necesario se podrían calcular, así como los ángulos á ellos adyacentes, por sencillas fórmulas trigonométricas y muy especialmente si se determinan las coordenadas planimétricas de los vértices de la poligonal, con todo lo que se daría á esta y á su enlace con las que pasaran por los puntos X, X" y por X' mayor seguridad; pero es de advertir que estas comprobaciones se han de hacer en el gabinete y se prescinde de ellas ordi-

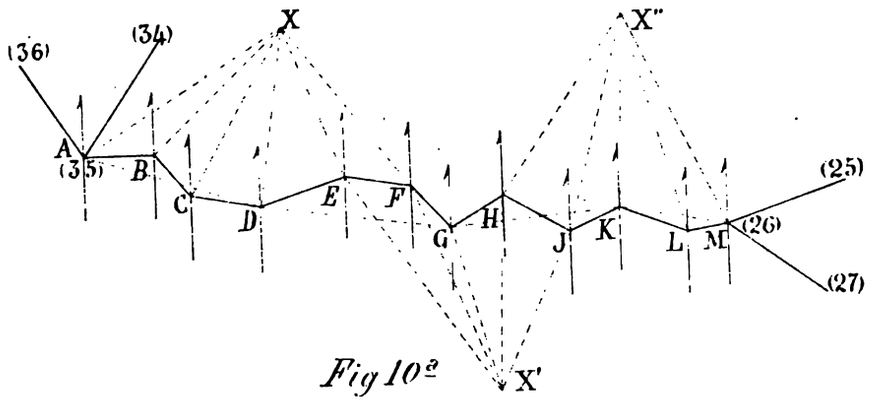


Fig 10ª

nariamente contentándose con las gráficas, que no tienen igual importancia, porque en ellas pueden influir á la vez los errores en los ángulos, en las distancias y los propios del graficismo.

Esto basta para comprender que son mas las comprobaciones que naturalmente se obtienen durante el levantamiento en los polígonos cerrados, sino comprenden grande extensión, que en los abiertos y para ratificar esta opinión indicarémos la marcha que se sigue en estos.

Con las pantómetras y *teodolitos* en la estación A ó (35) se empieza por comprobar la brújula de que están provistos y si su limbo tiene el movimiento necesario para declinarla se hará así utilizando el conocido azimut del lado 35-34 de la triangulación, á cuyo efecto basta hacer que el cero del nónius primero del limbo señale en este la graduación correspondiente á tal azimut, que el plano de colimación comprenda el lado 35-34 y mover el limbo de la brújula hasta que la aguja señale en él dicho azimut estando en completo reposo, con lo cual despues dará para todos los lados de la poligonal los azimutes y en la estación M con el de 26-25 de la triangulación se comprobará si se ha ó no conservado la brújula en buen estado, aunque no es comprobación muy fidedigna, pues puede haber estado la aguja perturbada en otros vértices y allí no, engañando al operador.

No sucederá lo mismo si se conserva la orientación con el limbo, de manera que procediendo así se tendrán como comprobaciones directas, que son de las que ahora nos hemos de ocupar, las de los rumbos inversos y la del azimut resultante para el lado 26-25, pero siempre con la indeterminación consiguiente á la acumulación ó compensación fortuita de los errores parciales.

Lo propio sucede cuando viéndose desde A el punto M se observa su rumbo ó azimut directa é inversamente.

Las comprobaciones consiguientes á las visuales dirigidas á los puntos X, X' y X" se observan y utilizan en la construcción del plano, no durante el levantamiento y como ademas en su reunión en el mismo punto ó buena intersección, que las justifica, influyen grandemente las distancias, no sirven para descubrir los errores de los ángulos, rumbos ó azimutes, ni menos para distribuirlos racionalmente, porque no influyen del mismo modo en el error que se nota, los cometidos en los ángulos que los correspondientes á las distancias.

La única manera de descubrir durante el levantamiento los errores en los ángulos, evitar su acumulación ó las compensaciones fortuítas y de dar medios racionales para su compensación y la consiguiente á los errores inevitables de las distancias, sería elegir las estaciones de la poligonal de manera que se vieran cada tres ó cuatro y se observaran los rumbos ó azimutes directos é inversos de estas líneas de mira, como en la figura 10 se indica en las AD, DG, GK y KM, que es precisamente el medio utilizado en el procedimiento modernísimo de *comprobaciones sucesivas*, como detalladamente explicarémos en el número 70.

En el segundo caso, cuando los extremos de la poligonal sean puntos de situación no determinada, habrá menos comprobaciones que en el primero, porque ni se podrán determinar tan fácilmente los azimutes de sus lados, ni se comprobará con el del lado de la triangulación en el extremo y mucha mayor diferencia habrá en la construcción del plano, porque desarrollándose la poligonal en el primer caso entre puntos bien determinados se descubrirán los errores notables y nada de esto sucede en el segundo.

Hemos omitido cuanto se refiere á la manera de medir los ángulos, rumbos ó azimutes y distancias, porque se hace enteramente lo mismo que en los polígonos cerrados.

Con las brújulas será mas sencillo el trabajo, porque no hay que realizar coincidencias de los nónius con las graduaciones del limbo azimutal, sino simplemente dirigir las visuales y leer los rumbos que la aguja señale, pero en cambio, si estos serán algo mas exactos que los indicados por la brújula de las pantómetras ó teodolitos por su mayor tamaño, no se tendrá el recurso de conservar la orientación con el limbo, que dá mayor seguridad y por consiguiente las comprobaciones serán menos fidedignas á excepción de las de los rumbos directos é inversos, que lo será mas por la razón indicada.

Con la plancheta se utilizarán en el levantamiento las comprobaciones consiguientes á todas las visuales á este efecto dirigidas; pero con la indeterminación del graficismo en el campo y de que en aquellas influyen los errores en los ángulos y en las distancias y si bien al parecer se descubren los errores finales y en parte se pueden corregir sobre el terreno, ni esto se hace sin grandes inconvenientes, ni deja de ser muchas veces ilusorio, porque las compensaciones fortuitas producen con ella todo su pernicioso efecto, aunque podrán servir de mucho para evitarlas las visuales auxiliares AD, DG, GK y KM orientando respectivamente con ellas la plancheta en las estaciones correspondientes.

Tanto en los perímetros cerrados como en los abiertos, debe tenerse presente que la plancheta ofrece dos inconvenientes notables que pueden motivar errores de alguna consideración, por lo cual no debe utilizarse con el sistema de recorrimiento ó, en caso necesario, se ha de hacer con toda clase de precauciones; los indicados inconvenientes son:

1.° Que es casi imposible, segun dejamos manifestado, núm. 172, colocar en muchos casos sobre el punto de estación el que en el plano le representa, especialmente con las planchetas ordinarias, que no tienen los dos movimientos de traslación del tablero y por este solo concepto puede cometerse un error de 5′ en la dirección de los lados de la poligonal, aunque ordinariamente no pasará de 2′ ó 3′ y

2.° Que en la orientación de la plancheta con los lados de 10 centímetros, que no serán menores de los que muchas veces hay que admitir, ya se puede cometer con la escala de $^1/_{1000}$ un error de 41′ 14″, que podrá sumarse con el precedente.

Como por otra parte en la plancheta se va construyendo el plano por los ángulos del polígono, el error que en uno se comete produce otro mucho mayor en el cierre, porque todo el resto de la poligonal gira alrededor del vértice, en que aquello tuvo lugar, en un ángulo igual al del error primero y si bien pueden compensarse con otros sucesivos, pueden tambien sumarse sus efectos dando lugar á errores mucho mayores, por cuyo motivo se ha desechado la plancheta en los trabajos catastrales de precisión (1) y cada vez se utiliza menos en todos los demas.

(1) Por una supuesta economía se admite en las Instrucciones italianas para los terrenos extensos y de poco valor; pero se ha hecho muy poco uso de esta facultad.

Sin embargo, con las precauciones que dejamos recomendadas podrá utilizarse, á falta de mejores aparatos y hasta en combinación con los goniómetros, la de Wiotti en la determinación de los detalles por radiación, aunque, como verémos en la segunda parte, consideramos preferible el uso general de los taquímetros.

Fáltanos para terminar la materia de este número indicar, como hemos prometido, la *manera de deducir de los rumbos directos é inversos los ángulos interiores del polígono y de estos y el rumbo ó azimut de un lado los de los demas.*

Para evitar funestas equivocaciones hemos de tener en cuenta si los rumbos determinados aumentan en el sentido de N. á E. ó si lo hacen de N. á O.; porque hay brújulas graduadas en el primer *sentido*, que hemos considerado el *normal* y otras en el opuesto, aceptado por muchos Autores por ser costumbre de ciertos países.

En uno y otro caso es preciso tambien tener en cuenta si la marcha de la operación ha sido la supuesta en la figura 9.ª, esto es, en la dirección de A, B, C... ó si se ha seguido la contraria, A, H, G...; porque los *rumbos directos de la primera dirección* serán *inversos* en la segunda y al contrario.

Finalmente no debe olvidarse que de lo que se trata es de determinar los *ángulos interiores del polígono*, que unos se hallan en la *región N.* de la aguja, como los B, C y D de la figura 9.ª y otros en la *región S.*, como los F, G y H.

Si no teniendo en cuenta estas distintas condiciones se aplicara una fórmula general, como algunos proponen, se conseguirian absurdos resultados.

Supongamos en primer lugar que los rumbos aumentan en el *sentido normal* y que la marcha de la operación haya sido la indicada por las letras de los vértices de la figura 9.ª

Designemos los ángulos interiores del polígono por la letra de sus vértices y por *r* y *r'*, respectivamente, los *rumbos directos é inversos, en cada uno medidos;* esto es, en *A* el de AB y AH, en *B* el de BC y BA...

Segun aparece en la figura 9.ª, pueden los ángulos del polígono presentarse en cuatro posiciones distintas:

1.ª Exterior á la meridiana, en la región oriental, como en *A*.
2.ª Id. id. en la región occidental, como en *E*.
3.ª Dividido por ella y en su región N., como en *B*, *C* y *D*.
4.ª Id. id. y en su región S., como en *F*, *G* y *H*.

Los ángulos *A* y *E* de los dos primeros casos son evidentemente iguales á r—r', á que, para ser comprendidos en la misma fórmula, no hay inconveniente en poner bajo la forma de 360° + r—r'.

Los ángulos *B*, *C* y *D* del tercer caso, se deduce fácilmente á la vista de la figura que, son iguales á 360°—r'+r ó 360°+r—r' como en el caso anterior.

Los ángulos *F*, *G* y *H* de la cuarta posición, tambien se vé claramente en la figura que, son iguales á r—r' ó 360+r—r'.

De manera que en las condiciones supuestas la fórmula general aplicable es, llamando *A* á cualquiera de los ángulos,

$$A = 360° + r - r' \qquad (1.ª)$$

Si la marcha de la operación hubiera sido la contraria, esto es en la dirección A, H, G..., como entonces los *rumbos directos* serían los *inversos* antes considerados, no habría que hacer otra cosa que cambiar su signo en la fórmula anterior resultando

$$A = 360° + r' - r \qquad (2.ª)$$

Si los rumbos aumentaran en el sentido de N. á O., con la primera dirección en la marcha de la operación se utilizaría la segunda fórmula y con la segunda de aquella la primera de estas, como es fácil deducir á la vista de la figura suponiendo trazados los arcos correspondientes.

Es claro que cuando la diferencia r—r' de la primera fórmula ó r'—r de la segunda sean positivas, se puede prescindir de los 360°, que en nada variarían el valor del ángulo, pero no pue-

de esto hacerse cuando sean negativas, como en B, C y D, en el supuesto primero; pues entonces tendríamos el valor de los ángulos exteriores y no el de los interiores que buscamos.

La solución del segundo problema ó sea deducir los rumbos ó azimutes de los lados de un polígono, cuando se conocen sus ángulos interiores y el rumbo ó azimut de uno de estos, es muy sencilla; porque si es el *r* de A, el inverso de B será: $r' = r \pm 180°$ y conociendo el r' de B se deducirá el valor de su directo, r de BC, de las fórmulas 1.ª ó 2.ª, segun los casos y de unos á otros vértices se deducirán sucesivamente todos los rumbos directos é inversos que se buscan.

Este segundo problema es de mucha aplicación en las triangulaciones por el sistema antiguo; pero verémos que se puede evitar con ventajas de distinto género conservando la orientación mediante el limbo azimutal del teodolito ó taquímetro y el primero deduciendo directamente los ángulos de los azimutes al medirlos con repetición.

5 — Sistema de triangulación.

Método de medición

Ya digimos en el número 2 que este sistema se subdivide en los métodos de *medición, radiación é intersección* y que el primero de estos se funda en la semejanza de los triángulos por la proporcionalidad de sus tres lados.

Es por consiguiente necesario en su aplicación medir los de los diferentes triángulos, en que se divide el polígono del terreno, para construir sus semejantes en el papel y por lo tanto no se necesita para ello otro aparato que un diastímetro (cadena, cinta, reglón, etc.)

De aquí se deduce que este método no puede aplicarse mas que á pequeñas extensiones, en que la medición directa de las distancias no ofrece tantos inconvenientes y así en efecto se hace y mas generalmente solo en la determinación de los pequeños detalles como auxiliar de otros procedimientos.

No es indiferente, bajo el punto de vista del trabajo que este motiva, que la subdivisión del polígono se haga de una ú otra manera, porque no resulta igual la distancia total que hay que medir para conseguir el objeto; pero como las parciales largas son las que ofrecen mas inconvenientes, se debe procurar especialmente que resulten lo mas cortas posibles, aunque su número sea mayor.

Esto depende de la forma del polígono, pero generalmente serán mas largas si se divide por sus diagonales, como en la figura 1.ª, que si se toma por vértice comun un punto interior, X, como en la figura 9.ª; sin embargo circunstancias especiales, que el Topógrafo apreciará fácilmente en cada caso, pueden hacer mas recomendable aquella subdivisión.

Método de radiación

Fundado en la semejanza de los triángulos por la proporcionalidad de dos lados y la igualdad del ángulo comprendido, implica la medición de ángulos y distancias y exige por consiguiente el empleo de goniómetros ó goniógrafos y diastímetros y por sí solo no es tampoco aplicable mas que á pequeñas extensiones, porque disminuye poco los inconvenientes de la medición directa de las distancias y como por otra parte, cuando estas son largas, pequeños errores en los ángulos los producen considerables en los terceros lados y por consiguiente en la forma general del polígono y no ofrece comprobaciones sin la repetición del trabajo, es poco recomendable este procedimiento.

Esto se comprende fácilmente suponiéndole aplicado á la división del polígono indicada en la figura 1.ª y á la que expresa la figura 9.ª

En la 1.ª habrá que medir las distancias AB, AC, AD, etc. y los ángulos BAC, CAD, etc. y si en aquellas, no midiéndolas mas que una vez, se cometía una equivocación y aun solo con los errores consiguientes á la medición directa con la cadena ó la cinta de hilo, la posición de los vértices del polígono no quedaría bien determinada sin que hubiera medio de comprobación ni de compensación racional, propias del método, porque si se hacía midiendo alguno ó

varios de los lados BC, CD... etc., ya se utilizaba para ello el método anterior y si haciendo estación en otro vértice, C, se medían los ángulos ACB, ACD, ACE... etc., ya se utilizaba al mismo objeto el método de intersección.

En la división segun la figura 9.ª los ángulos tendrían una comprobación directa en su suma, pues había de ser igual á cuatro rectos, pero no las distancias, ni por consiguiente el resultado final si no se acudía á los procedimientos antes indicados.

Los aparatos mas apropiados son naturalmente los que dan mayor seguridad y precisión; esto es los teodolitos para los ángulos y el reglón para las distancias; pero rara vez se utilizan, siendo mas frecuente que se emplee la plancheta ó la brújula y la cinta de hilo, con los que los errores son indudables.

Todo esto no obstante, este método es el que se utiliza con grandísimo provecho en los modernos procedimientos para la parcelación ó referencia á la base de operaciones de todos los puntos característicos del terreno, como luego verémos y esto se comprende perfectamente, porque como en ellos los ángulos se miden con mucha precisión y con comprobación y las distancias tambien evitándose los inconvenientes y molestias de la medición directa, se consigue pronto y bien el resultado que se desea.

Método de intersección

Segun en el número 2 ya digimos, el fundamento de este método está en que los triángulos, en que se subdivide el polígono del terreno ó los que en él se puedan considerar para fijar la posición de sus vértices con relación á determinadas líneas, tengan con los correspondientes trazados en el papel un lado homólogo en razón constante para todos y que sean iguales los ángulos adyacentes.

De esto se deduce desde luego, que reduciéndose considerablemente la medición directa de distancias se evitarán con este procedimiento muchas molestias y los errores, que son inherentes á tal medición, con la condición empero que la de la base ó bases que se elijan se haga con mucha precisión, lo cual es factible por ser pocas, y que lo propio suceda con los ángulos; pues, de los errores que en aquella ó en estos se cometan, se han de originar otros mucho mayores en los vértices ó puntos principales, que así se determinen, por hallarse ordinariamente á distancias considerables y para evitar este inconveniente en lo posible y tener ademas la necesaria comprobación, es preciso elegir con cuidado la base ó bases, de manera que se puedan medir bien, que desde sus extremos y otros puntos de ella se vean todos ó la mayor parte de los vértices y puntos principales que convenga determinar, que los triángulos resulten de forma conveniente (1) y que cada vértice ó punto principal, que así se determine, lo sea al menos por tres visuales concurrentes en el mismo punto.

---

(1) La mejor es la del equilátero, porque los tres ángulos son los mayores posibles y aunque la intersección de dos perpendiculares es la mas precisa, como cada punto ha de quedar determinado al menos por tres visuales, con aquella condición se reducirían á dos y los ángulos de la base serían mas agudos.

No siendo muchas veces posible utilizar la condición equilateral en las triangulaciones trigonométricas ni en las intersecciones gráficas, se ha fijado como límite inferior de los ángulos de los triángulos resultantes en uno y en otro caso la magnitud de 30° y consiguientemente el superior de 120°

Para concretar las ideas hemos calculado el error que se produce en la altura de un triángulo isósceles de 300 metros de base suponiendo que en los ángulos de esta se cometa un error de 5′ y que el ángulo del vértice ó sea el de la intersección sea de 60°, de 30° y de 20°.

Con el de 60° el error en el vértice resulta de 0'85 metros.
Con el de 30° » » » 3'20 »
Con el de 20° » » » 7'20 »

Siendo de advertir que en el plano de escala de $^1/_{1000}$ la intersección grática resulta de tal manera que á la distancia del vértice verdadero correspondiente al error hallado en el último caso las dos visuales se confunden, pues su separación es solo de 0'12 milímetros, y en los otros dos será ya perceptible la separación á la distancia del error calculado para cada uno, pues en el segundo es de 0'77 milímetros y en el primero de 0'5 milímetros: es decir, que la intersección es aceptable en estos dos casos y de ningun modo en el tercero por mucha que sea la delicadeza con que el plano se construya, justificando plenamente los límites impuestos.

Dedúcese de las precedentes consideraciones que los *aparatos característicos* en este procedimiento son: *como goniómetro el teodolito ó al menos la pantómetra en terrenos de mas de 10 hectáreas* y *como diastímetro el reglón* y *la cinta ó fleje de acero;* pero en los menores pueden utilizarse sin grandes errores la brújula y la plancheta entre los primeros y la cadena y cinta de hilo en los segundos operando siempre con cuidado y con las precauciones consiguientes á las condiciones características de cada aparato.

Es de advertir que en los planos de reconocimiento, en que se utiliza grandemente este procedimiento, generalmente se emplean los aparatos de la última combinación, porque no se busca en ellos la precisión que los de la 1.ª suponen y que es por otra parte incompatible con las pequeñas escalas y el graficismo que en tales ocasiones se utilizan.

Supongamos para fijar las ideas que se quiera levantar el plano del polígono del terreno representado en la figura 11, que de su reconocimiento previo haya resultado que la diagonal de mas fácil medición y desde cuyos extremos y punto intermedio O se ven la mayor parte de los vértices, es la AH; pero que esto no sucede relativamente á los puntos D y E que solo se ven bien desde C, B y F y desde O' y finalmente que la superficie sea de poco mas de 100 hectáreas; con tales condiciones no cabe duda en la elección de la base AH para toda la parte inferior á CBF y la BF para la superior con los respectivos puntos intermedios O y O' para hacer en ellos estación y determinar las direcciones de comprobación.

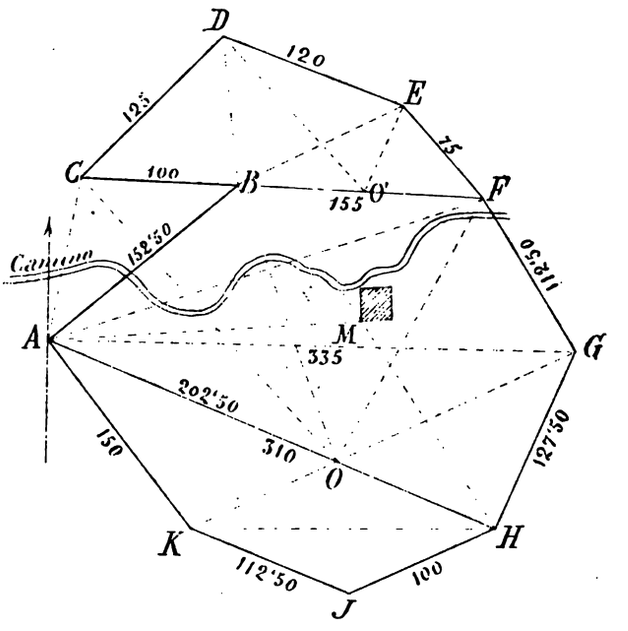


Fig 11ª

Al hacer el reconocimiento previo del terreno se marcarán los vértices y puntos notables que convenga con banderolas ó jalones verticales, de manera que se puedan ver unos de otros y de los extremos de la línea diagonal, lado ó cualquiera otra línea que desde luego se sospecha podrá servir de base, se hace al mismo tiempo el cróquis y los vértices se designan en él con letras relacionándolas con el nombre del sitio y objeto ú objetos, que en el terreno determinen cada punto.

Esto hecho, mientras que el Ayudante con los cadeneros mide con cuidado la base AH determinando y marcando el punto O, el operador pone en estación el aparato en A, orienta el diámetro 0°—180° de la *pantómetra* ó *teodolito,* si de estos se dispone, como digimos en el número 4 y dirigiendo sucesivamente visuales á los puntos C, B, F, M, G, H, J y K lée en el limbo y anota ordenadamente los rumbos correspondientes; se traslada el aparato á O y orientando con el rumbo inverso de AO=AH se dirigen visuales á los mismos puntos leyendo y anotando los rumbos resultantes y trasladando el aparato á H se hace lo propio, con lo cual se tendrán los datos necesarios para construir el polígono inferior á CBF.

Si desde las estaciones precedentes se viera el punto O' sería conveniente dirigirle desde ellas visuales para tener una comprobación mas, porque las intersecciones determinantes de los puntos B, O' y F han de resultar en línea recta y las distancias BO' y O'F tambien las comprobarían.

El punto M quedaría determinado y la casa á que pertenece mediante las dos perpendiculares bajadas desde dos de sus esquinas á la visual HM, como en la figura se indica; así tambien podrían determinarse los puntos principales del camino que por aquella cruza el polígono,

pero se comprende que no sería fácil determinarle en todos sus detalles, aunque sí por perpendiculares y medición de los pequeños triángulos resultantes, si fijados por intersección sus puntos principales las líneas que los unen se utilizan como base del detalle.

Para determinar con los puntos D y E la parte superior del polígono se haría estación en B orientando con el inverso de AB comprobando los rumbos BO y BH, se observan y leen despues los rumbos BF, BE y BD y haciendo estación sucesivamente en O' y F se comprueban los rumbos de las visuales que antes se les dirigieron y se leen y anotan los correspondientes á O'D, O'E, FD y FE y como entre tanto habrán los cadeneros medido las BO' y O'F bajo la dirección y vigilancia del Ayudante, se tendrán todos los elementos necesarios para medir y comprobar el plano gráfico ó calcular las coordenadas del numérico mediante la resolución trigonométrica de los triángulos utilizados.

Si no pudiera hacerse estación en los puntos B, O' y F podría utilizarse el procedimiento de *intersección inversa ó de cúspide de pirámide* haciendo sucesivamente estación en D y E y midiendo desde ellos los ángulos CDB, BDF, BDE, DEB y BEF, pues con ellos y las distancias CB y BF, que gráfica ó numéricamente se pueden deducir de los datos anteriores, se determinaría la posición de los vértices D y E con relación á la base CBF, analíticamente por las fórmulas que consignarémos en la *tercera parte* ó gráficamente con el *trasportador de tres reglas* y en su defecto por el llamado *problema de la carta* ó de los *arcos capaces,* que darémos á conocer en el artículo cuarto de esta al ocuparnos de los trabajos de gabinete.

Podrían aumentarse las comprobaciones midiendo todos los ángulos interiores del polígono ó el rumbo de sus lados, á cuya combinación dan algunos Autores el nombre de procedimiento por *doble intersección;* pero se comprende que así se quita al de que tratamos su principal ventaja de economizar el tiempo y las molestias reduciendo considerablemente el número de estaciones; no es por lo tanto recomendable y solo, á lo mas, aplicable á las estaciones de dudosa situación por las malas condiciones de la intersección de las visuales que para determinarlas se utilizaron desde la base ó bases antes elegidas; pero en este caso deben medirse los ángulos ó rumbos á partir de estaciones bien determinadas.

Con la brújula se procederá enteramente como queda dicho y serían las mismas tambien las comprobaciones con la sola diferencia de la menor apreciación de los rumbos y las molestias y errores consiguientes á las perturbaciones de la aguja imanada.

Con la plancheta se seguirá la misma marcha obteniendo análogas comprobaciones con las visuales recíprocas, la de la magnitud de las distancias BO' y O'F y la de resultar estos tres puntos en línea recta con el grado de precisión correspondiente al graficismo en el campo.

Se comprende que en muchos casos convendrá tomar para base ó bases líneas interiores ó exteriores al polígono, segun las condiciones de este, que fácilmente se apreciarán en cada caso, ó dos lados consecutivos de su perímetro.

Aunque el que hemos representado en la figura 11 no es de los mas favorables al método de que nos ocupamos, se notan desde luego sus ventajas por el menor número de estaciones que hay que hacer y las menores distancias que hay que medir en comparación con todos los métodos precedentes; pero si esto es indudable con relación á puntos determinados y bastante separados entre sí, no sucede lo mismo respecto á los próximos que determinan la forma de los detalles del terreno, por lo que se ha de combinar al efecto con los precedentes.

6 — Sistema mixto.

Porque sin graves inconvenientes en la generalidad de los casos no puede aplicarse uno cualquiera de los procedimientos antes explicados con exclusión de los demas, se han combinado todos al objeto de levantar los planos con la precisión necesaria y el menor trabajo posible.

Al efecto, *en los terrenos de grande extensión* se subdividen las operaciones en tres clases; *triangulación, poligonación* y *parcelación ó detalles;* teniendo por objeto:

La primera, cubrir el terreno con una red de triángulos, que permitan fijar con seguridad y precisión cierto número de puntos;

La segunda, subdividir las mallas de la red triangular mediante *alineaciones rectas* ó *itinerarios poligonales*, que acercándose á las líneas y puntos característicos ofrezcan base segura para su fácil determinación y

La tercera, hacer estas referencias por los medios mas sencillos, seguros y económicos.

De la manera como se han realizado y se realizan actualmente las *triangulaciones* nos ocuparémos detalladamente en la TERCERA PARTE.

En la *poligonación* se siguen tres procedimientos diferentes:

Uno, llamado de *alineaciones*, muy utilizado en los antiguos Catastros y que aun defienden con tesón los viejos geómetras franceses, consiste, como se indica en la figura 12, en subdividir cada triángulo en sencillas figuras rectilíneas, cuyos lados se apoyan en puntos de los lados de las precedentes determinados por medición directa.

Cuando los lados de los triángulos de la red trigonométrica no exceden de 300 á 500 metros, las distancias se miden con reglones ó cintas de acero dos veces en sentido contrario para comprobar las parciales y totales, el terreno es poco accidentado y sin estorbos y se procede con muchas precauciones, pueden conseguirse buenos resultados; pero como este trabajo es sumamente oneroso no se han cumplido tales condiciones, ni por consiguiente conseguido aquellos.

El Ingeniero Rabbini, Director del Catastro piamontés, propuso en 1855, como detallarémos mas adelante, utilizar este procedimiento con minuciosas triangulaciones de 300 metros de lado; pero como esto es difícil de conseguir y no evita los demas defectos del sistema, no fué aceptada la propuesta.

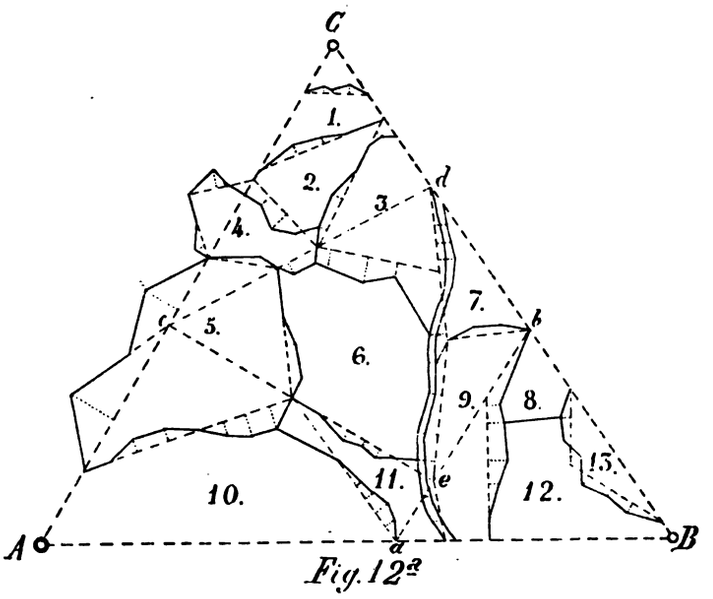


Fig. 12ª

Otro, *llamado propiamente de poligonación*, consiste en determinar con buenos goniómetros y diastímetros las líneas poligonales que pasando cerca de las características del terreno van de un vértice á otro de la triangulación, de uno de estos á otro de la poligonal precedente ó de uno á otro de dos poligonales, llamándose estas sucesivamente de primero, segundo y tercer orden; midiendo sus lados dos veces en sentido contrario y calculando las coordenadas ortogonales de todos sus vértices para hacer la comprobación y corrección numérica de los errores inevitables, con lo que puede admitirse una triangulación de lados de 2000 y mas metros, especialmente si se utiliza el medio de comprobaciones sucesivas, los resultados pueden ser excelentes cuando el terreno no es muy accidentado ó no presenta grandes estorbos, porque con ellos la medición directa es siempre muy errónea.

Finalmente el tercer procedimiento consiste en realizar el precedente en sus dos primeros órdenes y utilizar entre las poligonales alineaciones rectas, que no excedan de 150 metros y unan dos vértices ó dos puntos bien determinados de aquellas, por cuyo medio, en algunos casos, se pueden simplicar los trabajos y midiendo, como se ha hecho en el nuevo Catastro prusiano, los ángulos con buenos teodolitos y las distancias con reglones dos veces y toda clase de

precauciones y calculando las coordenadas ortogonales de todos los vertices y extremos de las alineaciones rectas para comprobar y corregir por su medio los errores. los resultados pueden ser excelentes, aunque á costa de mucho trabajo y gasto.

En la parcelación, cuando las alineaciones rectas o la poligonación es completa, basta hacer la referencia de los puntos de detalle á sus lados por medio de perpendiculares ó de pequeñas mediciones, pues su separación nunca debe pasar de 10 metros. y es consiguiente que á tal efecto no son necesarias las escuadras ni señalar tales puntos con banderolas y jalones; pues á ojo se pueden levantar y bajar las perpendiculares con bastante exactitud.

En los terrenos de mediana extensión. de 10 á 500 hectáreas. no es ordinariamente necesaria triangulación y por consiguiente se reducen los trabajos del levantamiento del plano á los de *poligonación y parcelación:* pero, como la primera debe comprender el perimetro sin mas comprobaciones que las que son propias del sistema poligonal en perimetros cerrados, se han de tomar todas las precauciones en su lugar aconsejadas y especialmente las de elegir uno ó mas puntos interiores ó exteriores de comprobación por intersecciones y las visuales entre los vértices reunidos en grupos de 3 ó 4, que es la base del modernisimo procedimiento de *poligonación con comprobaciones sucesivas,* ya que así se evita la acumulación de errores y se facilita la distribución racional de los inevitables y aunque se proceda gráficamente ofrece importantes comprobaciones.

Determinado con seguridad el perimetro del polígono del terreno la poligonación interior se realiza como queda indicado para los terrenos de grande extensión. pues los vértices de aquel y los puntos interiores desde ellos determinados les dan base de apoyo y comprobación, especialmente si se utilizan, como goniómetro, buenas pantómetras ó teodolitos y como diastímetro el reglón ó la cinta de acero.

En tales planos tambien pueden utilizarse la brújula y la plancheta con las precauciones para ellas recomendadas; pero solamente cuando no sea necesaria grande precisión.

En estos planos la *parcelación* se realiza con referencia á las poligonales indicadas en la misma forma que en los de grande extensión.

En los de edificios y solares, huertos y jardines y en los demas terrenos de menos de 10 hectáreas es improcedente la *triangulación* y pocas veces necesaria la verdadera *poligonación;* pero de todos modos puede hacerse esta con sencillos goniómetros y aun determinando los ángulos del polígono envolvente y los de las pequeñas poligonales interiores por las cuerdas de los arcos (número 7 del volúmen primero), pero ordinariamente bastará aplicar los sistemas de perpendiculares y medición como dejamos explicado para el primero y mas detallarémos al tratar de los trabajos de campo.

Antes empero debemos ocuparnos de las tolerancias admitidas en distintos países en los trabajos de campo y primeras comprobaciones de los de gabinete para toda clase de planos y procedimientos planimétricos; pues aunque con ello hayamos de anticipar algunas ideas nos servirán de norma en tales trabajos y reuniéndolos en un solo articulo evitarémos repeticiones y facilitarémos la busca de sus preceptos; pero no comprenderémos lo relativo á los desniveles y las áreas, que aplazamos para cuando nos ocupémos de los trabajos de gabinete con los procedimientos modernos, porque seria difícil de comprender lo que dijéramos antes de describir ciertos aparatos y procedimientos especiales para determinarlos.

ARTÍCULO SEGUNDO

TOLERANCIAS ADMITIDAS EN LAS NACIONES MAS ADELANTADAS PARA LOS MEJORES PLANOS CATASTRALES

7 — Preliminares.

Hasta que el eminente Porro, perfeccionando en sumo grado la medición indirecta de las distancias y extendiendo el uso de los mejores teodolitos en la medición de los ángulos y el cálculo de las coordenadas ortogonales á todos los puntos característicos del terreno, fundó los *planos numéricos* con excelentes condiciones de precisión y comprobación dando seguridad á los resultados, los Topógrafos habían hecho caso omiso de la teoría de los errores y probabilidades y admitido grandes tolerancias en el cierre de los perímetros, en las comprobaciones gráficas y en el cálculo de las áreas, limitándose á tener aquellos en cuenta y restringir las segundas al determinar las coordenadas de los vértices de las triangulaciones.

Esto era natural y consiguiente al uso general de la plancheta ó de la brújula en las poligonaciones y parcelaciones y al graficismo ordinario, que exclusivamente admitían en la construcción de los planos, porque con tales medios los errores por necesidad habían de ser grandes é indeterminables y poca la seguridad en los resultados.

Como quiera que son todavía muchos los Topógrafos, que persisten en tan pernicioso desconocimiento de las condiciones de los planos, ignorando ó despreciando las grandes ventajas de la discreta aplicación de los nuevos procedimientos, los perfeccionamientos introducidos en los antiguos y las restringidas tolerancias establecidas en los modernos Catastros, que es donde se hacen mas evidentes las ventajas de la precisión de los planos, hemos creído oportuno llamar su atención sobre la teoría de los errores y probabilidades como lo hicimos en el número 10 del volúmen primero y destinar este artículo á consignar las tolerancias admitidas en los mejores planos catastrales relativamente á los ángulos, á las distancias y á los cierres de los polígonos para que sirva de norma en todos los que se levanten por los antiguos y por los modernos procedimientos.

8 — Tolerancia en los ángulos (1).

En la Instrucción topográfica publicada en 1878 por el *Instituto Geográfico y Estadístico de España* se fijan las siguientes tolerancias:

De *30'* en la comprobación con distinta *brújula* en los rumbos de los *itinerarios* DESTINADOS AL RELLENO DE LOS MAPAS CONSTRUÍDOS GRÁFICAMENTE EN LA ESCALA DE $^1/_{25000}$.

Del duplo de la apreciación directa del teodolito multiplicado por el número de vértices en el cierre de las poligonales en las poblaciones, que se han de construir en la escala de $^1/_{500}$.

De *1'* en la suma de los tres ángulos de cada triángulo en las *triangulaciones topográficas*, midiéndose con teodolito de apreciación teórica de 10", con reiteración.

En la Instrucción IX de las dictadas para la renovación del *Catastro prusiano* se fijan las tolerancias siguientes:

De $1'5'\sqrt{n}$ con la graduación sexagesimal y $3'\sqrt{n}$ con la centesimal, siendo n el número de ángulos *para las poligonaciones*, utilizándose al efecto la siguiente

(1) La Dirección General de contribuciones directas y del Catastro de Francia ordenó á Mr. Faurel, Verificador especial de este servicio, que hiciera un resumen de las tolerancias admitidas en los principales Catastros europeos y así lo hizo tan ilustrado Topógrafo publicando su interesante recopilación en un folleto de 56 páginas de 31 por 21 centímetros con noticias y comentarios, que debieran tener muy presentes los que de Catastros se ocupan.

TABLA DE TOLERANCIA ANGULAR

n	p=1/n	DIVISIÓN SEXAGESIMAL $1'5'\sqrt{n}$ minutos	DIVISIÓN CENTESIMAL $3^{c}\sqrt{n}$ centígrados
1	1'00	1'5'	3'0^{c}
2	0'50	2'1'	4'2^{c}
3	0'33	2'6'	5'2^{c}
4	0'25	3'0'	6'0^{c}
5	0'20	3'4'	6'7^{c}
6	0'17	3'7'	7'3^{c}
7	0'14	4'0'	7'9^{c}
8	0'13	4'2'	8'5^{c}

La diferencia tolerable se distribuye por partes iguales entre todos los ángulos de la poligonal.

Se establece así mismo que no se pueda corregir cada ángulo mas que en lo siguiente:

En 2' á 4^{c} en los terrenos fáciles;

En 2'5 á 5^{c} » » de condiciones medias;

En 3' á 6^{c} » » difíciles.

Debe tenerse presente que allí se calculan las coordenadas planimétricas de los vértices de las poligonales.

Segun las experiencias del profesor Lorber la *apreciación media* de los ángulos rectos con las escuadras ó el error que se puede cometer tomando toda clase de precauciones es de

1'6' con las cónicas de pínulas;

2'6' con las cilíndricas id.;

1'3' con las de espejos;

1'1' con las de prisma.

Los mayores errores posibles son *triplos* de los precedentes.

Las *Instrucciones* dictadas en 15 de Abril de 1889 para la ejecución de los trabajos topográficos del *nuevo Catastro italiano* fijan las siguientes *tolerancias:*

En las *triangulaciones* la suma de todas las diferencias entre la suma de los tres ángulos de cada triángulo y 180° dividida por el número de triángulos ha de ser menor de 20", esto es

$$\frac{\Sigma\,\Delta}{n} < 20''$$

en que Δ representa cada una de estas diferencias y n el número de triángulos: se considera *plausible* el trabajo de una campaña de triangulación cuando el indicado cociente sea de 15" ó menos.

En las *poligonaciones* el *error de cierre angular*, esto es la diferencia entre el azimut trasmitido por la poligonal y el del lado de la triangulación concurrente en el vértice límite de aquella, no debe exceder de

$$2'\sqrt{n} \text{ ó } 4'\sqrt{n}$$

segun las modificaciones introducidas en 18 de Marzo de 1897 en las Instrucciones de 1889, en que se fijaban las mismas admitidas para el *Catastro prusiano.*

Nada se establece concretamente sobre la *tolerancia angular* en las parcelaciones, que si bien segun la Instrucción prusiana se reducen á pequeñas referencias por perpendiculares á los

polígono $10^m \sqrt{K}$ (siendo K la longitud en kilómetros del perímetro) cuando no exceden de 100 kilómetros y de $15^m \sqrt{K}$ para los que excedan.

En las *poblaciones*, medidas las distancias dos veces con cinta de acero se tolera una diferencia máxima de $^1/_{500}$ y entre su media y la de las medidas de comprobación $^1/_{1000}$.

En la Instrucción IX dictada para el nuevo *Catastro prusiano* se fijan para las ***distancias de las poligonales***, que se miden dos veces con reglón en sentido contrario y tomando toda clase de precauciones, las siguientes tolerancias:

$t = 0'01 \sqrt{4\,(d) + 0'00\,5\,d^2}$ en terreno poco accidentado;

$t' = 0'01 \sqrt{6\,(d) + 0'00\,75\,d^2}$ en id. medianamente accidentado;

$t'' = 0'01 \sqrt{8\,(d) + 0'01\,d^2}$ en id. difícil,

en que *d* es la longitud del lado.

Con sujeción á estas fórmulas y para facilitar su aplicación se ha calculado la siguiente

TABLA DE TOLERANCIAS EN LAS DISTANCIAS

LONGITUDES MEDIDAS	DIFERENCIAS ADMISIBLES SEGUN LAS CONDICIONES DEL TERRENO		
	I Favorable	II Mediano	III Difícil
Metros	Metros	Metros	Metros
10	0'06	0'08	0'09
30	0'11	0'14	0'16
50	0'14	0'18	0'20
80	0'19	0'23	0'26
100	0'21	0'26	0'30
200	0'32	0'39	0'45
300	0'41	0'50	0'57
400	0'49	0'60	0'69
500	0'57	0'70	0'81

El reglamento catastral de Baden señala para análogas distancias las tolerancias siguientes:

Para las distancias de	30 metros	60 metros	150 metros	300 metros
en llanura	0'4 por 100	0'3 por 100	0'17 por 100	0'12 por 100
ó sean	0'12 metros	0'13 metros	0'255 metros	0'36 metros
en montaña	0'5 por 100	0'4 por 100	0'25 por 100	0'20 por 100
ó sean	0'15 metros	0'24 metros	0'375 metros	0'60 metros

El reglamento catastral de Wuttemberg admite para las distancias poligonales las siguientes tolerancias:

0'1 por 100 en terreno llano ó no inclinado mas del 2 por 100,

0'2 por 100 en terreno accidentado con inclinación de 2 á 7 por 100,

0'3 por 100 en terreno difícil,

ó sean en 100 metros de distancia respectivamente 1, 2 y 3 decímetros.

El reglamento catastral de Suiza para *mediciones en llanura* admite, segun las condiciones de los límites de los predios y parcelas, en las distancias de

3 á 30 metros la tolerancia de 3 á 9 centímetros.
30 á 60 » » » 12 »
60 á 90 » » » 15 »
90 á 120 » » » 18 »

En *terrenos montañosos* se admite hasta el *triplo* de las precedentes tolerancias.

Las de los antiguos catastros italianos variaban del ½ á 1 por 100 en buenos terrenos y hasta el 2 por 100 y en algunos casos hasta el 6 por 100 en los montañosos.

En el catastro piamontés se fijaba para las

distancias de	20 met.	50 met.	100 met.	200 met.	300 met.	400 met.	500 met.
las tolerancias de	0'4 »	0'5 »	0'8 »	1'05 »	1'20 »	1'25 »	1'45 »

En la circular de 18 de Marzo de 1897 haciendo algunas modificaciones á las Instrucciones dictadas en 15 de Abril de 1889 para la ejecución de los trabajos topográficos del nuevo Catastro italiano, se fijan para las *distancias* las siguientes tolerancias:

En las *parcelaciones* cuando las distancias se miden con reglones ó cintas de acero

$$t = 0'05 \sqrt{D}$$

de la que resulta para 100, 200 y 300 metros respectivamente, 0'5, 0'70 y 0'865 metros.

Cuando se determinan por medio de la plancheta la diferencia entre la distancia medida en ella y la directamente en el terreno no debe ser superior á

$$t = 0'00025\ N + 0'05 \sqrt{D}$$

en que N representa el denominador de la escala y suponiendo esta de $^1/_{2000}$ resultaría para las distancias de

	50	100	200	y 300	metros
las tolerancias de	0'85	1'00	1'2	1'365	»

que naturalmente resultan mayores que las precedentes, porque lo han de ser los errores consiguientes al graficismo y aun no es de esperar que se consigan tales resultados teniendo en cuenta la magnitud real que en el plano les corresponde y los inconvenientes gravísimos del graficismo en el campo y la escala $^1/_{2000}$ ó $^1/_{4000}$ utilizada con ellas.

Entre las dos mediciones de cada distancia ó lado de las *poligonales* fija el § 22 de la Instrucción II de 15 de Abril de 1889 las siguientes tolerancias:

$t = 0'015 \sqrt{D} + 0'0008\ D$ en terreno llano	ó en 100 metros	0'23 metros.
$t' = 0'020 \sqrt{D} + 0'0008\ D$ en terreno ondulado		0'28 id.
$t'' = 0'025 \sqrt{D} + 0'0008\ D$ en terreno difícil		0'33 id.

Si las distancias se miden con la estadía se fija la tolerancia en

$$t = 0'3 \text{ por } 100$$

En las *triangulaciones* la diferencia entre las dos magnitudes de un lado determinadas por distintos caminos no debe exceder de $^1/_{2500}$ de su longitud.

La diferencia entre los logaritmos de los dos valores no podrá ser mayor que las 15 unidades del quinto órden decimal.

Llamando $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$ las diferencias expresadas en unidad de la quinta cifra decimal de los dos valores hallados para los lados $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ de una campaña de triangulación la media de su suma no deberá exceder de 5, es decir

$$\frac{\Sigma\delta}{n} \leq 5$$

siendo *n* el número de lados considerados y δ las diferencias tomadas todas con signo positivo.

En nuestro concepto las tolerancias admisibles *en las distancias* debieran ser:

En las bases y lados de las triangulaciones el $^1/_{5000}$ á $^1/_{10000}$, segun su importancia, que implican un error medio menor de $^1/_{10000}$ y $^1/_{20000}$ correspondientes respectivamente á la apreciación verdadera en los ángulos de 20" á 10" ó 6 y 3 milígrados, con la comprobación conjuncial en las diferencias resultantes para la magnitud de cada lado calculada por dos caminos diferentes, que exige la Instrucción italiana, esto es, $\frac{\Sigma\delta}{n} \leq 5$ unidades de la 5.ª cifra de la mantísa logarítmica.

En las *poligonales* de precisión levantadas con teodolito y reglón ó cinta de acero ó con buenos taquímetros, las fijadas por la Instrucción italiana de 1889 (1), esto es:

$$t = 0'015\sqrt{D} + 0'0008\ D \text{ en terreno llano,}$$
$$t' = 0'020\sqrt{D} + 0'0008\ D \text{ en id. ondulado,}$$
$$t'' = 0'025\sqrt{D} + 0'0008\ D \text{ en id. difícil,}$$

y aun sería preferible la mas sencilla propuesta por Porro para las distancias y las coordenadas planimétricas de

$$t = 0'1 + 0'001\ d$$

en que *d* es la longitud de las distancias ó la suma aritmética de los valores absolutos de las abscisas ó de las ordenadas.

Para las *poligonales* determinadas con *brújula ó plancheta* y cadena ó cinta de hilo, podría admitirse la tolerancia señalada por la Instrucción italiana

$$t = 0'00025\ N + 0'05\sqrt{D}$$

cuando sea suficiente la precisión correspondiente antes calculada para ella.

Con estas tolerancias, tomando la media de los dos valores comparados, resultaría para *error probable* en 100 metros:

con buenos taquímetros en *terreno ondulado*

$$E = \frac{2}{3} \times 0'14 = 9 \text{ centímetros}$$

que aun en la escala de $^1/_{500}$ estarían representados en el plano por la magnitud casi inapreciable de *2 décimas de milímetro* y

Con la plancheta 25 centímetros, que en la escala de $^1/_{1000}$ estarían representados por 25 centésimas de milímetro inapreciable en el graficismo en el campo.

En las *parcelaciones* hay que distinguir los dos casos siguientes:

1.° Que se realicen mediante numerosas poligonales con perpendiculares de menos de 10 metros como en el *Catastro prusiano* y

2.° Que se determinen los detalles por el sistema taquimétrico con referencia á poligonales distante entre sí 200 ó 400 metros.

En el primer caso la diferencia entre los dos valores de las perpendiculares debe ser nula y en la verificación de la distancia entre dos puntos de detalle, cuyas coordenadas planimétricas rara vez se determinan por la complicación de los cálculos necesarios, se ha de tener en cuenta la tolerancia en las poligonales en que se apoya su determinación y los errores del graficismo dependiente de la escala del plano, pero si esta fuese de $^1/_{1000}$ podrá admitirse la misma tolerancia del segundo caso, que puede ser la señalada por la Instrucción italiana para las mediciones con la estadía, esto es

$$t = 0'3 \text{ por } 100$$

si se calcula numéricamente, lo cual es muy fácil si los dos puntos comparados se han determinado sobre una misma alineación recta y la admitida por la misma Instrucción para los trabajos de la plancheta

$$t = 0'00025\ N + 0'05\sqrt{D}$$

si la distancia se mide sobre el plano.

10 — Tolerancias en el cierre de los polígonos.

Por *cierre* ha de entenderse:

En las *triangulaciones*, la base de comprobación á que se llega desde los últimos triángulos, cuya longitud calculada y la directamente medida se comparan para hallar el *error de cierre*.

(1) Podrían reducirse á la mitad ó á las $^2/_3$ estas tolerancias; pero no hay inconveniente en admitirlas sino en casos de grandísima precisión, en que las diferencias distarán mucho del tipo de las tolerancias.

En los *polígonos cerrados*, que el último vértice del perímetro se confunda con el primero y si así no resultase la distancia que los separa será el *error de cierre.*

En las *poligonales abiertas* desarrolladas entre dos puntos de situación conocida, como dos vértices de una triangulación ó poligonal previamente determinadas, que se confundan con el primero y el último respectivamente del perímetro, que se considera, siendo el *error de cierre* la distancia entre el último de este y el segundo de aquellos y finalmente,

En los *polígonos abiertos* desarrollados entre puntos indeterminados *no hay cierre.*

En el error de este influyen indudablemente los de las distancias y los de los ángulos ó rumbos y por lo tanto se ha de calcular mediante la diagonal de las diferencias de las coordenadas planimétricas, que sirven de base y las obtenidas, que es la que mide la distancia entre la situación del punto verdadero y el obtenido y está por consiguiente representado por la fórmula

$$e_c = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

en la que e_c representa el error de cierre buscado y e_x y e_y las diferencias entre los valores de las abscisas (x) y las ordenadas (y) obtenidas para el último punto de la poligonal y los que deberían corresponderle.

Como el valor de las x y de las y no es proporcional al de los ángulos ó rumbos y sí lo es al de las distancias, se han de separar en la compensación de los errores, distribuyendo racionalmente los de los ángulos antes de calcular las coordenadas x é y, y compensar estas despues proporcionalmente á las distancias, pues que el error final ya solo de ellas puede provenir, como detalladamente explicarémos al ocuparnos del procedimiento de *poligonación con comprobaciones sucesivas.*

Consiguientemente á esto, *los que sin la previa compensación angular calculan las coordenadas y distribuyen el error de cierre proporcionalmente á la longitud de cada lado, á la de las coordenadas, ó á su número, no consiguen la compensación racional de los errores inevitables, antes por el contrario muchas veces los aumentan engañándose con un falso cierre.*

Se comprende fácilmente tambien que los que hicieren la medición de los ángulos y de las distancias sin las precauciones debidas y sin repetición y no calculen las coordenadas planimétricas de los vértices, **ni conocerán los errores posibles ni tendrán medio racional de corregirlo, viéndose frecuentisimamente engañados por falsos cierres consiguientes á compensaciones fortuitas y tendrán que apelar á los inadmisibles medios de correcciones gráficas injustificadas y perniciosas desconociendo siempre el grado de precisión en tales casos.**

Esto consignado para evitar equivocaciones, veamos las tolerancias admitidas para el *cierre de los polígonos.*

Segun el señor Gattoni (página 52), en la Instrucción IX dictada para la renovación del *Catastro prusiano* se utiliza, al objeto indicado, la fórmula antedicha,

$$e_c = \sqrt{e_x^2 + e_y^2},$$

despues de la corrección angular y para evitar cálculos en su aplicación se tiene preparada una Tabla (5.ª) como la que se inserta en la página siguiente.

En dicha Tabla se han despreciado las fracciones del centímetro en más ó en menos.

Su manejo es enteramente igual al de la Tabla pitagórica; se busca la e_x ó e_y en la primera columna y la otra en la cabecera y en la línea de la primera y columna de la segunda se encuentra el valor de e_c; así, si $e_x = 0'14$ y $e_y = 0'08$ resulta $e_c = 0'16$ m.; en el caso de ser impares las unidades de centímetro se halla la media si fuere necesario, aunque es mejor, cuando las dos lo son, buscar en una con una unidad más y en otra con una menos; así; si $e_x = 0'15$ y $e_y = 0'09$ se encontrará en la línea 0'14 y columna de 0'10, $e_c = 0'17$ metros.

TABLA DE LOS ERRORES DE CIERRE

	o'02	o'04	o'06	o'08	o'10	o'12	o'14	o'16	o'18	o'20
o'02	o'03	o'04	o'06	o'08	o'10	o'12	o'14	o'16	o'18	o'20
o'04	o'04	o'06	o'07	o'09	o'11	o'13	o'15	o'16	o'19	o'20
o'06	o'06	o'07	o'08	o'10	o'12	o'13	o'15	o'17	o'19	o'21
o'08	o'08	o'09	o'10	o'11	o'13	o'14	o'16	o'18	o'20	o'22
o'10	o'10	o'11	o'12	o'13	o'14	o'16	o'17	o'19	o'21	o'23
o'12	o'12	o'13	o'13	o'14	o'16	o'17	o'18	o'20	o'22	o'23
o'14	o'14	o'15	o'15	o'16	o'17	o'18	o'20	o'21	o'23	o'24
o'16	o'16	o'16	o'17	o'18	o'19	o'20	o'21	o'23	o'24	o'26
o'18	o'18	o'18	o'19	o'20	o'21	o'22	o'23	o'24	o'25	o'27
o'20	o'20	o'20	o'21	o'22	o'23	o'23	o'24	o'26	o'27	o'28
o'22	o'22	o'22	o'23	o'23	o'24	o'25	o'26	o'27	o'29	o'30

Para que el error de cierre se pueda distribuir es necesario que resulte inferior á la tolerancia deducida de las fórmulas siguientes:

en terreno de buenas condiciones $t = o'01 \sqrt{4(S)+o'005\,(S)^2}$

en id. de condiciones medias $t' = o'01 \sqrt{6(S)+o'0075\,(S)^2}$

en id. de malas condiciones $t'' = o'01 \sqrt{8(S)+o'01\,(S)^2}$ (1)

en las que S = suma de la longitud de los lados de la poligonal.

Para evitar los cálculos consiguientes á la aplicación de estas fórmulas se ha preparado una tabla (3.ª) de la forma siguiente:

PRIMER CASO

S	t	$1/t^2$
740	o'75	1'78
753	o'76	1'73
767	o'77	1'69
780	o'78	1'64
793	o'79	1'60
807	o'80	1'56
820	o'81	1'52

SEGUNDO CASO

S	t'	$1/t'^2$
741	o'92	1'18
751	o'93	1'16
762	o'94	1'13
773	o'95	1'11
784	o'96	1'09
795	o'97	1'06
806	o'98	1'04

TERCER CASO

S	t''	$1/t''^2$
756	1'08	o'857
766	1'09	o'842
775	1'10	o'826
785	1'11	o'811
794	1'12	o'797
803	1'13	o'783
813	1'14	o'770

Como se vé, cada error, e_c, corresponde á todas las longitudes comprendidas entre dos valores de S y de esta suerte, conocido el de la longitud desarrollada de la poligonal, se busca en la Tabla el valor de e_c ó t correspondiente, segun las condiciones del terreno, á la media de los de S que le comprenden, el que se escribe en el registro entre paréntesis al lado de la diagonal calculada con las diferencias de las x y de las y, por $\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2}$ en la forma siguiente:

Sean $\Delta_x = +o'09$, $\Delta_y = +o'13$; $e_c = \sqrt{(o'09)^2+(o'13)^2} = o'16$; pues si la suma de la longitud de los lados es 789'90 metros en terreno de condiciones medias, como es el caso considerado por Gattoni, se escribe entre paréntesis indicando la Tabla en que se ha encontrado esta tolerancia, esto es $e_c = o'16$ (II o'97), con lo que se pone en evidencia que se ha conseguido un error de cierre muy inferior á la tolerancia y se puede proceder á su distribución.

En la primera de estas Tablas se vé que la tolerancia admitida es próximamente de $1/1000$, lo que implica un error probable menor de $1/3000$ despues de la distribución.

(1) En las fórmulas y en las muestras de las Tablas hemos cambiado por t, t' y t'' la letra *a* utilizada en el original por ser más expresivas y para ponerlas en consonancia con las usadas en las tolerancias de las distancias.

da y como el error total no es igual á la suma de los parciales, sino al producto del de cada lado multiplicado por la $\sqrt{n}$ en el supuesto admisible de ser todos iguales en mas ó en menos, lo que para el caso supuesto daría el duplo de tal error individual, el que segun la teoría de los errores es próximamente la cuarta parte de la diferencia de las dos medidas, que determinan la tolerancia, no pueden menos de resultar exageradas las deducidas de las fórmulas precedentes.

Para comprobar esta opinión supongamos una poligonal compuesta de cuatro lados iguales de 200 metros, que se hayan medido con reglones dos veces en sentido contrario; pues bien, siendo la diferencia de estas de o'28 metros, segun las experiencias de Lorber, y o'07 metros el error medio en cada lado, el de su suma ó de cierre (1) sería $0'07\sqrt{4} = 0'14$ metros y la tolerancia $t = 0'14 \times 4 = 0'56$ metros, mientras que con la

1.ª fórmula de la Instrucción prusiana $t = 0'01\sqrt{4 \times 800 + 0'005 \times 800^2} = 0'80$ metros,

1.ª fórmula de la Instrucción italiana $t = 0'015\sqrt{800} + 0'0008 \times 800 + 0'1\sqrt{4} = 1'26$ metros, y con la fórmula para la estadía $t = 0'^{06}\sqrt{800} = 0'06 \times 28'3 = 1'698$ metros,

y con la 2.ª $t = 0'8\sqrt{5} = 1'792$ metros.

Consideramos mas procedente y sencilla en su aplicación la expresión de la tolerancia en función de las coordenadas planimétricas de los vértices, como se aceptó para el Catastro de Módena, pero reduciéndola, como Porro proponía y es ahora mas factible con los buenos taquímetros, á

$$t = 0'1^{m} + 0'001\ d$$

siendo *d* la suma aritmética respectivamente de las abscisas y ordenadas de la poligonal y t la diferencia admisible en las *x* y en las *y;* si se desea mas amplitud, se pueden aceptar las fórmulas de la Instrucción prusiana y sus Tablas, cuyas tolerancias resultarán casi siempre excesivas; pues la experiencia dá para el error en la suma de muchas distancias, ángulos ó áreas cuidadosamente medidas, resultados mas favorables que los indicados por las fórmulas de la teoría de los errores (número 10 del volumen primero).

11 — La incertidumbre segun Salmoiraghi y consecuencias.

Para terminar la materia interesante de este artículo creemos oportuno hacer constar la respetable opinión del ilustre Salmoiraghi sobre la exactitud necesaria de los planos y las precauciones que deben tomarse para conseguirla.

Dice (2), con razón hasta cierto punto, que la precisión debe ser la misma para todos los característicos del terreno y que si se procura conseguirla mayor en los vértices de la triangulación y de las poligonales que en los demas puntos, es solo para satisfacer mejor las condiciones técnicas, esto es, para asegurar la precisión en los característicos y que despues de terminado el plano nada significan aquellos; esto es tanto así, como que ni característicos de los accidentes del terreno son muchas veces; pero no hay duda que no todos los característicos de un momento tienen la misma importancia, porque los de las parcelas de un predio, p. e., son variables y no los de sus límites mientras no cambien sus condiciones geométricas y por consiguiente es mas necesaria la precisión en los límites del predio que en los de sus parcelas y mas en los de estas permanentes ó muy durables, como edificios, puentes, etc., etc., que en las variables consiguientemente á su cultivo y aprovechamiento.

«La cuestión por consiguiente bajo el punto de vista práctico, dice, se reduce á fijar *la in»certidumbre*, que llamamos *elemental*, para un punto cualquiera».

---

(1) Se supone que préviamente se haya hecho la compensación de los errores angulares segun la teoría del procedimiento por poligonación con comprobaciones sucesivas, que permite hacerla racionalmente lo mismo que la de las distancias despues de calculado el error de cierre.

(2) Les Cleps, página 22 y siguientes.

Comentando estos resultados en el concepto de *graduación de las tolerancias* dice que segun de ellos se deduce si con la escala de $^1/_{500}$ para las distancias menores de 200 metros pueden admitirse en los ángulos un error superior á 5' centígrados, para las de 5000 ó mas metros aun en la escala de $^1/_{5000}$ ya es preciso apreciar mas de 1' centígrado y por esto en la determinación de los puntos por intersección desde otros lejanos es necesario utilizar goniómetros de grande precisión y restringir este medio de intercalar puntos trigonométricos en las triangulaciones, pues resulta un sistema defectuoso; es tambien por esto que «*la relación de tolerancia puede aumentar gradual y naturalmente al descender de las grandes á las pequeñas distancias*» resultando en estas innecesarias las precauciones que se toman para medir con escrupulosidad y grande precisión los ángulos y las distancias.

A la perspicacia de tan ilustre Ingeniero no ha pasado desapercibida la condición de que levantado un plano con un objeto dado y por consiguiente construído en una escala puede ser despues necesario hacerlo en otra mayor para darle otro destino y por consiguiente que la tolerancia del primero sería insuficiente para el segundo; tampoco ha olvidado que segun su tésis debiera haber el mismo error en la distancia entre dos puntos directamente determinados que en la correspondiente á dos que lo fueran indirectamente y por eso dice que se ocupa solo de *la incertidumbre elemental* y finalmente tiene muy en cuenta que si sus consideraciones son perfectamente aplicables á los planos gráficos, no sucede lo mismo á los numéricos, pero dan idea clara de las condiciones generales de la tolerancia, deduciendo que debe ser gradual y no absoluta.

Esta graduación necesaria es precisamente lo que sin duda indujo á los Autores de las Instrucciones catastrales de Baden y Suiza á establecer las tolerancias, que para las distancias dejamos consignadas, aunque con distintas relaciones y no sería difícil ni tal vez desacertado fijar análogamente para las distancias, que mas generalmente ocurren medir ó calcular, las tolerancias correspondientes á la escala mayor utilizable en los planos topográficos, que es la de $^1/_{500}$, dejando que en los de construcción, en que se utilizaran mayores, se fijara la tolerancia en cada caso segun la importancia de las obras y así tambien que aquellas tolerancias solo sirvieran para distancias mayores de 20 metros ó que como Porro propuso se expresara su valor en forma binómia, con lo cual se evita la injusticia antes indicada.

En efecto; siendo $t = 0'1 + 0'001\ d$
en distancia de 4 metros sería $t = 0'1 + 0'004 = 0'104$ que sobradamente se puede conseguir;
en distancia de 400 metros sería $t = 0'1 + 0'4 = 0'5$ que tambien se puede cumplir;
en distancia de 4000 metros sería $t = 0'1 + 4 = 4'1$ metros que no ofrecería dificultad ninguna.

Por consiguiente no puede haber inconveniente, como antes hemos dicho, en aceptar las fórmulas de la Instrucción prusiana ó la de Porro que acabamos de recordar, ni tampoco hasta la distancia de 300 metros que suele ser la máxima medida con la estadía, admitiendo la fórmula de Salmoiraghi.

Para que nuestros lectores se hagan cargo de las tolerancias absoluta y relativa en diferentes distancias segun la fórmula prusiana para terrenos de medianas condiciones, y la relativa por metro de la de Porro á esta y la apreciación angular, segun la de Salmoiraghi, *en el supuesto de ser el error gráfico admisible en plano de escala de* $^1/_{500}$, esto es la mayor, *de 0'25 mm.*, que es lo más que se puede pedir, comprendemos en el estado de la página siguiente los resultados.

Estos se prestan á muy importantes comentarios, de que prescindirémos por el momento, y dan mucha luz acerca de las condiciones necesarias con que se han de medir las distancias y los ángulos para conseguir una incertidumbre tolerable.

En efecto: en la mínima prefijada por Salmoiraghi ponen en evidencia los resultados de las columnas segunda y tercera que á 300 metros ya es necesario medir las distancias con una precisión superior al $^1/_{1000}$ y por consiguiente con mucha precaución y en cambio no la exigen los ángulos correspondientes, porque es solo indispensable la precisión de 5' centígrados, que se puede conseguir con las buenas pantómetras y los medianos teodolitos y taquímetros.

DISTANCIAS	Segun la fórmula de Salmoiraghi		Segun la fórmula prusiana		Segun la fórmula de Porro
	TOLERANCIA RELATIVA		TOLERANCIA ABSOLUTA	TOLERANCIA RELATIVA	TOLERANCIA ABSOLUTA
Metros	por metro	angular	Metros	por metro	en metros
(1.ª)	(2.ª)	(3.ª)	(4.ª)	(5.ª)	(6.ª)
20	0'0125 m.	79'54"	0'110 m.	0'0055	0'120 m.
30	0'0083	52'74"	0'136	0'0044	0'130
40	0'0061	38'83"	0'158	0'0039	0'140
50	0'0050	31'83"	0'178	0'0035	0'150
75	0'0033	21'00"	0'225	0'0030	0'175
100	0'0025	15'71"	0'259	0'0026	0'200
150	0'00166	10'56"	0'335	0'0022	0'250
200	0'00125	7'96"	0'387	0'0019	0'300
250	0'00100	6'37"	0'390	0'0016	0'350
300	0'00083	5'28"	0'497	0'0016	0'400
400	0'00062	3'95"	0'600	0'0015	0'500
500	0'00050	3'18"	0'698	0'0014	0'600
800	0'00031	1'97"	0'971	0'0012	0'900
1000	0'00025	1'59"	1'162	0'00116	1'100
2000	0'000125	0'79"	2'049	0'00102	2'100
3000	0'000083	0'53"	2'924	0'00097	3'100
4000	0'000062	0'39"	3'591	0'00089	4'400
5000	0'000030	0'32"	4'663	0'00093	5'100

A la distancia de 1000 metros en su medición es necesaria la precisión de $^1/_{3000}$ imposible de conseguir sin tomar todas las precauciones recomendadas para la medición de bases topográficas y sin embargo la de 1'59" centígrados exigida en los ángulos se consigue fácilmente con los buenos taquímetros y teodolitos.

Ahora bien: en una triangulación ó en una poligonación con comprobaciones sucesivas realizadas con cuidado se conserva bien la precisión de las distancias básicas por medio de los ángulos y *de aquí se deduce que por su medio y sólo por él puede alcanzarse la grandísima precisión propuesta por Salmoiraghi y de ninguna manera por los demas procedimientos utilizados ordinariamente.*

También se comprende en vista de los resultados del estado precedente que para conservar en una triangulación con lados de 5000 metros la incertidumbre prefijada, á que corresponde la precisión de $^1/_{20000}$ es necesaria en los ángulos al menos la de 10" ó 3 milígrados, cuando con aquella se ha medido la base y deducido la longitud del primer lado y esto es digno de tenerse en cuenta en las triangulaciones.

Finalmente, los resultados de las columnas 4.ª, 5.ª y 6.ª, dan á conocer que las fórmulas prusianas son bastante ámplias y gradualmente proporcionadas á las distancias y que lo propio sucede con las tolerancias absolutas deducidas de la fórmula de Porro; que estas pueden utilizarse y así se ha hecho por ilustres Topógrafos, con relación á la longitud desarrollada de las poligonales ó respectivamente á la suma de cada clase de las coordenadas planimétricas relativamente á la estación de origen en ellas, cuya forma permite hacer mas fácilmente la distribución de los errores y consiguientemente determinar las coordenadas definitivas.

ARTÍCULO TERCERO

TRABAJOS DE CAMPO

12 — Su clasificación.

Para simplificar en lo posible la explicación de la intrincada y compleja materia propia de este artículo nos ocuparémos sucesivamente del *levantamiento de los planos de terrenos de pequeña, mediana y de grande extensión* con los sistemas y aparatos mas apropiados en cada caso, sin perjuicio de hacer las indicaciones que consideremos necesarias, cuando varios fueren utilizables, para facilitar á los principiantes la elección mas oportuna segun las condiciones del terreno objeto de su trabajo y destino del plano.

La primera dificultad con que para esto tropezamos consiste en señalar límites á la extensión característica de cada una de las tres clases indicadas, porque no pueden menos de ser arbitrarios, y esto con tanto mayor motivo cuanto que la forma del perímetro general y la subdivisión y accidentes del terreno y su destino han de influir necesariamente en la aplicación de procedimientos y aparatos; porque si, por ejemplo, en terreno edificable ó de huerta inmediato á poblaciones de importancia la extensión de 10 hectáreas ya es de bastante consideración y obliga á medir con mucha precisión, no puede menos de clasificarse entre los planos de pequeña extensión si está destinado á tierras de labor, distante de poblado, en terreno llano y despejado y poco dividido; lo mismo ocurre cuando se trata de diferenciar los de mediana y grande extensión; pero como es necesario para entendernos no hablar con vaguedad, *solo al objeto de resolver en lo posible esta dificultad señalarémos los límites de 0 á 10 hectáreas á la pequeña; de 10 á 500 hectáreas á la mediana y de 500 en adelante á la grande extensión.*

Sea cualquiera el procedimiento y aparato que se haya de utilizar, *es condición precisa* que se comprueben y corrijan cuidadosamente los aparatos y utensilios que se vayan á emplear y en caso de incorrección que se tome nota de las modificaciones, que consiguientemente se hayan de hacer en los ángulos ó en las distancias y medir estos elementos con las precauciones necesarias para que la precisión en los resultados se encuentre dentro de los límites de la tolerancia correspondiente, á fin de evitar dudas incompatibles con la formalidad del buen Topógrafo.

13 — Levantamiento del plano de terrenos de pequeña extensión con distintos procedimientos y aparatos.

Supongamos en *primer lugar* que se nos pida el plano y superficie de un *predio uniparcelar* de menos de dos hectáreas, llano y despejado y de la forma representada en la figura 1.ª

Desde luego se comprende que por el sistema de perpendiculares se pueden conseguir fácilmente los datos necesarios para realizar sencillamente la construcción del plano y el *cálculo directo de la superficie*, condiciones características del sistema.

Como siempre, se ha de hacer un reconocimiento previo del terreno y especialmente de sus límites y confinancias marcando los puntos necesarios para que el perímetro quede bien determinado y así mismo los puntos donde empieza y termina cada una de aquellas; pero es de advertir que en casos, como el de que se trata, no es indispensable el uso de banderolas, ni formales jalones; pues bastan al efecto cañas de un metro de largo, abiertas en uno de sus extremos, en que se sujeta un papel blanco, que se clavan en el suelo: hácese al propio tiempo un cróquis detallado, en que se designan con letras los puntos marcados y se elige la base ó bases que se han de utilizar indicando las perpendiculares y mediciones de líneas oblícuas, que convenga hacer, para que á su vista se comprenda el trabajo que se haya de realizar.

La escala empleada en tales planos es generalmente la de $^1/_{1000}$ ó $^1/_{2000}$; pero segun el destino que se haya de dar al terreno podrá convenir elegir otra mayor y es preciso tener este dato muy en cuenta para acomodar al futuro destino la precisión, con que se ha de conseguir el plano.

Como las perpendiculares que se han de trazar y medir exceden de 10 metros, se han de determinar con una escuadra cualquiera, aunque, como al ocuparnos de ellas digimos, son preferibles las de reflexión alineadoras con bastón, que fije el punto y permita descansar el brazo.

La magnitud de las abscisas y ordenadas se escriben muchas veces sobre el cróquis; pero como resulta de esto confusión, es preferible hacerlo en un registro especial, como el que se

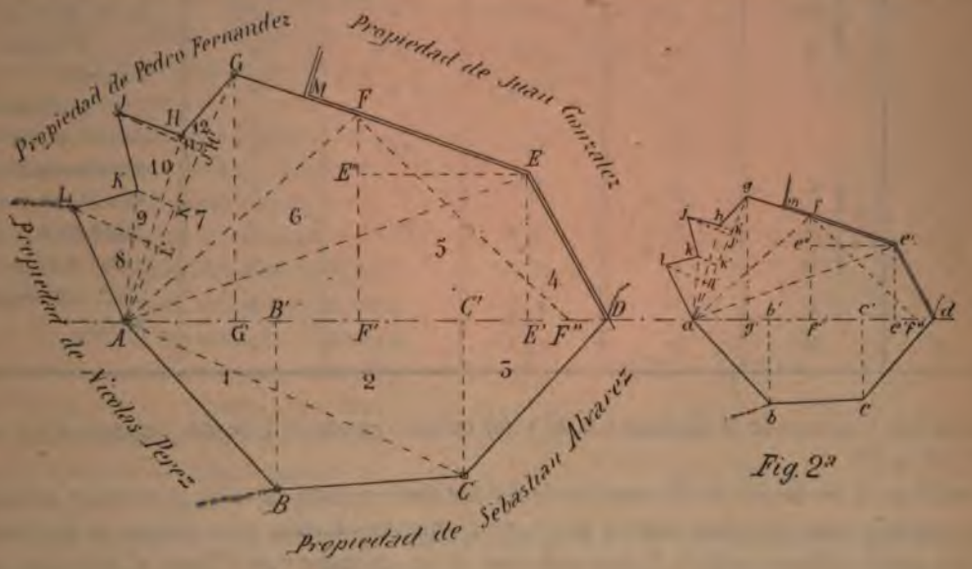


Fig. 1ª

Fig. 2ª

pone despues, reservando aquella anotación para las distancias determinantes de algun punto por el método de medición y los que con referencia á un vértice del polígono y en un lado de este fijan el principio ó el fin de una confinancia y otros pequeños detalles del límite ó exteriores é interiores, que convenga conocer.

La magnitud de las abscisas se cuenta desde el principio de su eje respectivo en el sentido que indica su designación y el de las perpendiculares desde su intersección con el eje, llamándose *de la izquierda* ó *de la derecha*, segun que se encuentren á uno ú otro lado del eje suponiendo que el operador le recorre en el sentido de su designación; así que al llamar al eje principal de la figura 1.ª A D, se indica que se marcha del punto A al D y serán ordenadas ó perpendiculares de la izquierda las G' G, F' F y E' E y de la derecha las B' B y C' C, consignándose la distancia A D en la columna de las abscisas con ordenada cero.

Para mayor comodidad se pueden poner el cróquis y el registro en el mismo pliego destinando la página de la izquierda al cróquis y al registro la de la derecha de las dos interiores y en la primera exterior la indicación del plano con el nombre de la finca, término municipal en que se encuentra, pertenencia, etc.

Para un plano como el de que se trata basta un pliego de papel.

La *brigada* se puede limitar en este caso al Topógrafo y dos peones medidores, si las distancias se han de medir con cinta de acero, de hilo ó cadena y de tres ó cuatro de estos si con reglón; supongamos que se utilize la primera de 20 metros.

Bajo la dirección y vigilancia del Topógrafo proceden los peones á medir el eje A D; colocada la cinta en la segunda posición, como el primero ya observa que el punto G' ha de estar en ella, manda no moverla, determina con la escuadra este punto, y contando y anotando la distancia A G' le marca con caña ó estaca de 25 á 30 centímetros de largo y ordena se continúe la medición; en la tercera posición de la cinta determina y marca con otra caña el punto

REGISTRO DE CAMPO DEL PLANO DEL PREDIO **Tal** LEVANTADO POR EL SISTEMA DE PERPENDICULARES (

EJES	PUNTOS del perímetro	PUNTOS interiores y exteriores	MAGNITUD DE LAS abscisas	MAGNITUD DE LAS Ordenadas de la izquierda	MAGNITUD DE LAS Ordenadas de la derecha	OBSERVACIONES
A D	G	»	35'1	7'22		1.ª Los vértices A, L, K, J, H y G son hitos de piedra. — El límite M, F, E, D zanja: C y B montones de piedra. 2.ª Confinancias de L á M con Pedro Fernández; de M á D con J. González; D á B Salvador Alvárez y de B á L con Nicanor Pérez.
	B	»	48'2	»	47'3	
	F	»	66'0	62'5	»	
	C	»	100'3	»	44'6	
	E	»	116'2	39'8	»	
	D	»	136'3	»	»	
A G	L	»	24'1	23'2	»	
	K	»	38'0	4'1	»	
	J	»	52'3	21'3	»	
	H	»	57'2	6'0	»	
	S	»	81'0	0'0	»	
G F	M	»	19'5	0'0	»	

B′ contando y anotando la distancia A B′ y del mismo modo se procede respecto á los puntos F′, C′, E′ y D.

Repítese la medición de las posiciones del eje determinadas por los pies de las perpendiculares señalados con las cañas á partir de D comprobando aquellas y las distancias parciales, que resultan por la diferencia de A D con cada una de las anotadas hasta llegar al punto de partida, con lo cual se tendrán las abscisas con menos error de tres centímetros, si se han hecho las dos mediciones con cuidado, y la seguridad de estar bien bajadas las perpendiculares.

Se mide cada una de estas en dos sentidos opuestos, lo cual no implica pérdida de tiempo y da seguridad: se anota su magnitud en el lugar correspondiente del registro siendo preferible que se haga primero con las de la izquierda y despues con las de la derecha empezando estas por la más próxima á D.

Se procede despues en la misma forma para el eje auxiliar A G y sus perpendiculares, que por ser cortas no exigen el uso de la escuadra y teniendo cuidado de medir la distancia G M al terminar la primera medición de A G, no se pierde tiempo en andar las distancias repetidas veces sin necesidad.

Con estos datos comprobados sobre el terreno se tiene seguridad de poder construir el plano sencillamente y con precisión y no hay necesidad de esperar á haberlo hecho para calcular la superficie del terreno; pues como queda dividido en triángulos y trapecios rectángulos y medidas sus bases y alturas, en poco rato se puede conseguir aquella en presencia de las figuras del cróquis y los datos del registro; por eso á este sistema le llaman los franceses *arpentage*, derivando este nombre de *arpent*, medida antigua allí usada para el area ó superficie de las tierras.

Supongamos *en 2.° lugar* que el predio de que se trate, aunque de las condiciones generales antes expresadas, *comprenda próximamente la extensión de 9 hectáreas.*

(1) Cuando las distancias se midan dos veces en sentido contrario, para que en el registro aparezcan todos los resultados de las dobles mediciones, se puede utilizar uno de la forma del que para los detalles de los planos de mediana extensión se consigna en el número 14, aunque bastaría poner para cada abscisa y ordenada las dos medidas en esta forma $\begin{cases} 1.^a - 35'1 \\ 2.^a \ 101'2 \end{cases}$ para la abscisa A G′ y $\begin{cases} 1.^a - 72'2 \\ 2.^a - 72'2 \end{cases}$ para su ordenada; la suma de los dos valores de la abscisa debe ser igual á la longitud del eje A D y los de la ordenada iguales: sus diferencias dirán si son ó no tolerables y en caso afirmativo se tomará el término medio.

Como en este caso ya resultarían muy largos los ejes y perpendiculares, no sería fácilmente aplicable el anterior procedimiento y habría de examinarse cual de los demas debiera preferirse teniendo en cuenta las condiciones del aparato disponible.

Si este fuera una brújula sencilla, no cabe duda que convendría aplicar el sistema de recorrimiento con un punto interior de comprobación en la forma indicada en la figura 9.ª, pues el de intersección, que es el único que disminuiría el trabajo é inconvenientes de la medición directa de las distancias, es incompatible con la poca precisión y seguridad con que los ángulos se miden con la brújula, aunque algunas veces se utiliza con ella este procedimiento sin fijarse en la precisión que se consigue.

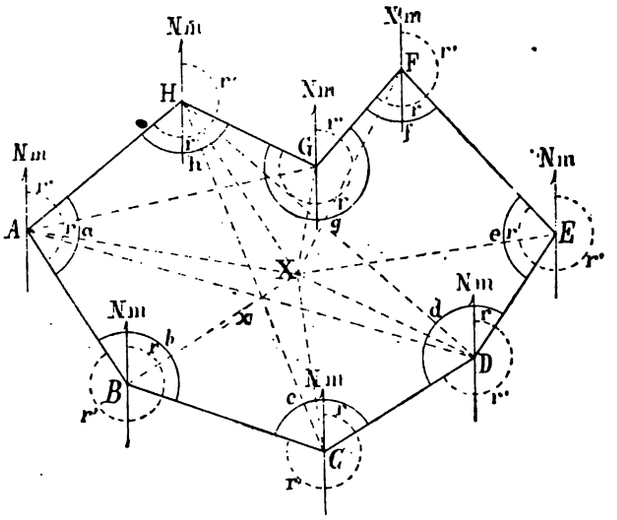


Fig. 9ª

Si se dispusiera de *una plancheta* sucedería lo contrario, porque, eligiendo una ó dos bases de buenas condiciones, por este procedimiento se reducen considerablemente la medición directa de las distancias, los traslados embarazosos del aparato y las puestas en estación y consiguientes orientaciones, que son, ademas del graficismo en el campo, sus mas graves inconvenientes y por lo tanto con ella por el método de intersecciones se pueden conseguir aceptables resultados.

En el caso de poderse disponer de *una buena pantómetra* ó de *un teodolito* con mayor motivo sería preferible el método de intersecciones al de recorrimiento, porque los resultados serían con estos aparatos mas precisos y seguros.

Supongamos que solo se dispone de una brújula sencilla y de una cinta de acero.

En el reconocimiento previo se marcarán todos los vértices y el punto de comprobación con cañas mayores que en el caso anterior ó con verdaderos jalones indicando en el cróquis las visuales, que se han de dirigir desde cada estación. Para que los lados se midan dos veces sin que haya que recorrerlos tres, como resultaría haciendo la medición de comprobación desde luego, se miden una vez seguidamente y despues se repite la medición en sentido contrario á partir del punto de orígen, anotando separadamente la distancia resultante para cada lado.

Esto implica que se realicen con cierta independencia la medición de los ángulos y la de las distancias, sopena de que el Topógrafo ó los medidores hayan de perder tiempo esperándose y como por otra parte el primero no puede sin el mismo inconveniente dirigir y vigilar á los cadeneros, lo mas acertado es encargar este trabajo á un Ayudante ó á un peón de confianza é inteligente, que debe anotar las distancias resultantes en la primera y en la segunda medición y hacerla repetir si la diferencia entre ambas para cada lado resultara superior á la *tolerancia*, que el Topógrafo cuidará de advertirle calculándola para cada decena de metros y á fin de evitar equivocaciones en esta anotación conviene darle relacionados los lados para que consigne el resultado de cada medición y la media en la forma siguiente ú otra semejante.

Lados — Metros		Lados — Metros	
AB =		HA =	
BA =		AH =	
Diferencia =		Diferencia =	
BC =		GH =	
CB =		HG =	
Diferencia =		Diferencia =	

Consiguientemente á estas indicaciones la *brigada* se ha de componer, en este caso, por lo menos del Topógrafo y de un peón destinado á trasladar el aparato y á sostener el parasol durante la observación y anotación de los rumbos por una parte y por la otra de dos peones medidores y otro especial que dirija y vigile la medición de las distancias y anote sus resultados.

Con estas advertencias y lo dicho en el número 4 no ofrecerá ninguna dificultad el levantamiento del plano y para evitar dudas sobre las condiciones del registro, en que se han de anotar ordenadamente los rumbos y las distancias, ponemos á continuación una muestra del modelo mas sencillo.

PUNTOS DE		RUMBOS		DISTANCIAS		Observaciones
Estación	Vistos	Directos	Inversos	Designación	Metros	
A	H	»		A H	47'2	
»	G		»	»	»	
»	X		»	»	»	
»	D		»	»	»	
»	B		»	A B	35'15	
B	A	»		B A	35'20	
»	X		»	»	»	(1)
»	C			B C	27'50	

Comprobadas las distancias con la repetición de su medida y los rumbos directos con los inversos no solo de cada lado del polígono sino tambien de las visuales de comprobación y muy especialmente si se hace la estación suplementaria X, se puede tener la seguridad de construir el plano con la precisión correspondiente al aparato y á la medición directa de las distancias sin temor á grandes errores y equivocaciones, pues hay medios de descubrirlos y anularlos.

Con una buena *pantómetra* con brújula se podría proceder en la misma forma conservando la orientación con el limbo, como ya digimos en el número 4.

Este sistema obliga á medir muchas distancias y á hacer otras tantas estaciones motivando mucho trabajo y por esto si se dispone de una plancheta, pantómetra ó teodolito ***casi siempre será preferible utilizar el método de intersecciones.***

Al efecto en el terreno representado en la figura 9.ª pudiera elegirse para base la diagonal *HC*, p. e.; midiéndola con especial cuidado y fijando en ella la situación del punto *X'*, lo que podría hacerse bajo la dirección del Topógrafo; este haría estación sucesivamente en los puntos *H*, *X'* y *C* y dirigiendo visuales á todos los vértices del polígono quedaría cada uno determinado por triple intersección; y como estando marcados todos los vértices poco se tardaría en hacer otra estación de comprobación, desde *C* se trasladaría á *D* midiendo los ángulos CDA, CDX', CDH, CDF y CDE, que permitirían hacer buenas comprobaciones en el plano.

La brigada con este procedimiento podría reducirse al Topógrafo y dos peones medidores y otro para trasladar el instrumento y sostener el parasol.

En el *cróquis* se indican todas las visuales que se han de dirigir y los datos pueden consignarse en un registro de la forma de los utilizados con la brújula si, como es siempre preferible, se utilizan los rumbos ó azimutes conservando la orientación con el limbo ó de la siguiente, si se miden y anotan los ángulos de las diferentes visuales con la base.

---

(1) En el registro se debe hacer constar el procedimiento principal que se sigue y el aparato que se utiliza y cuando, como en este caso, es la brújula, si está ó no declinada, así como el diastímetro con que se miden las distancias y cuantas veces se hace en cada una, reservando la columna de las observaciones para indicar las condiciones de los vértices y las perturbaciones de la aguja, que señalaran los rumbos inversos y otras noticias semejantes.

REGISTRO DEL PLANO DEL PREDIO **Tal** LEVANTADO CON LA PANTÓMETRA POR EL MÉTODO DE INTERSECCIONES

Mediciones de la base	Estaciones	ÁNGULOS		Observaciones
		Designación	Valor ° '	
H X′ = 127'35	H	C H B		
X′ H = 127'47	»	— A		
Suma = 254'82	»	— S		
Media = 127'41	»	— F		
	»	— E		
	»	— D		
X′ C = 215'72	X′	C X′ B		
C X′ = 215'64	»	— A		
Suma = 431'36	»	— H		
Media = 215'68	»	— G		
	»	— F		
H X′ = 127'41	»	— E		
X′ C = 215'68	»	— D		
H C = 343'09	C	H C G		
	»	— F		
	»	— E		

Operando *con una plancheta* es innecesario el registro y muchas veces el cróquis y, aunque con los inconvenientes del graficismo en el campo, ofrece ventajas por las comprobaciones, que directamente se consiguen.

Hasta ahora hemos supuesto que siendo el predio, cuyo plano se trata de levantar, *uniparcelar* y *de lados rectos su perímetro*, hubiera que determinar pocos detalles; si así no fuera, en un terreno de muy corta extensión podría aplicarse el sistema de perpendiculares, como se indica en la figura 7.ª, utilizando como eje principal la alineación recta M N y como secundarios la B H á ella referida y las mismas perpendiculares que mas se acercan á los puntos característicos de los detalles.

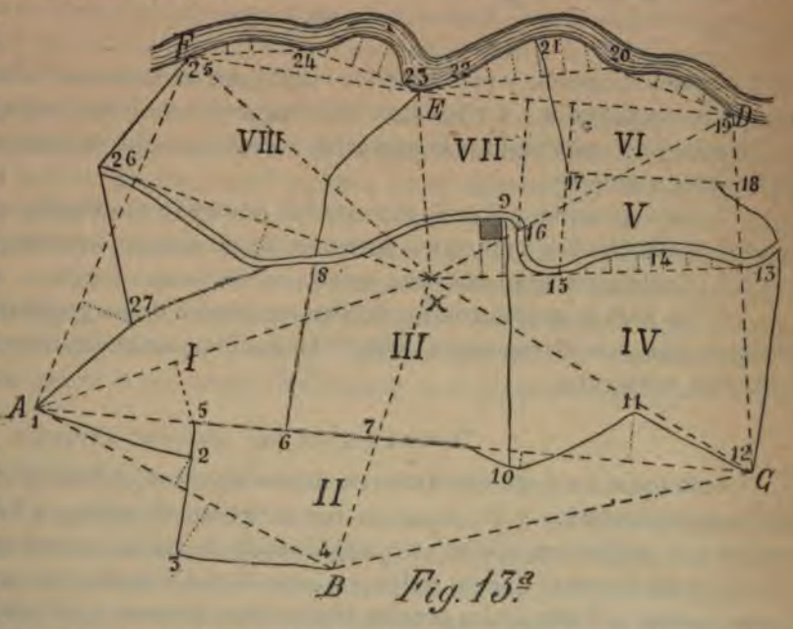


Fig. 13.ª

Si como se indica en la figura 13 fuera mayor la extensión y la accidentación, podría sustituirse el verdadaro perímetro del predio por el auxiliar A B C D E F, que se determinaría por recorrimiento ó intersección, segun los casos, y desde sus vértices un punto interior X por intersecciones y todos los detalles del perímetro y de la parcelación se fijarían sencillamente con relación á los lados de aquel, á las visuales precitadas ó á otras alineaciones, que uniendo dos puntos de situación conocida se acerquen á los característicos de la periferia y de las parcelas, como se indica en la figura.

Supongamos ahora que se trate de levantar el plano de una pequeña población, como la

representada en la figura 14, con suficiente precisión para conseguirle de buenas condiciones en la escala de $^1/_{500}$ y que no dispongamos de mas aparatos ni utensilios que dos buenas cintas de acero.

Practicado un detenido reconocimiento y hecho con todo cuidado el cróquis correspondiente, resulta que se puede circunscribir el polígono ABCDEF y trazar las trasversales, que en la figura constan de línea interrumpida constituyendo con porciones de aquel otros polígonos envolventes de las distintas manzanas de casas y huertos adosados á algunas de ellas, así como tambien que en la determinación del valor de los ángulos por la cuerda de sus arcos ó de los suplementarios solo se podrán utilizar radios de 3 ó 4 metros excepto en las trasversales, que terminan en los puntos *f*, *g*, *h* y *m*.

Los vértices del polígono exterior se marcarán con fuertes estacas clavadas en tierra y los de las poligonales trasversales con otras menores, á fin de que los mismos puntos puedan servir

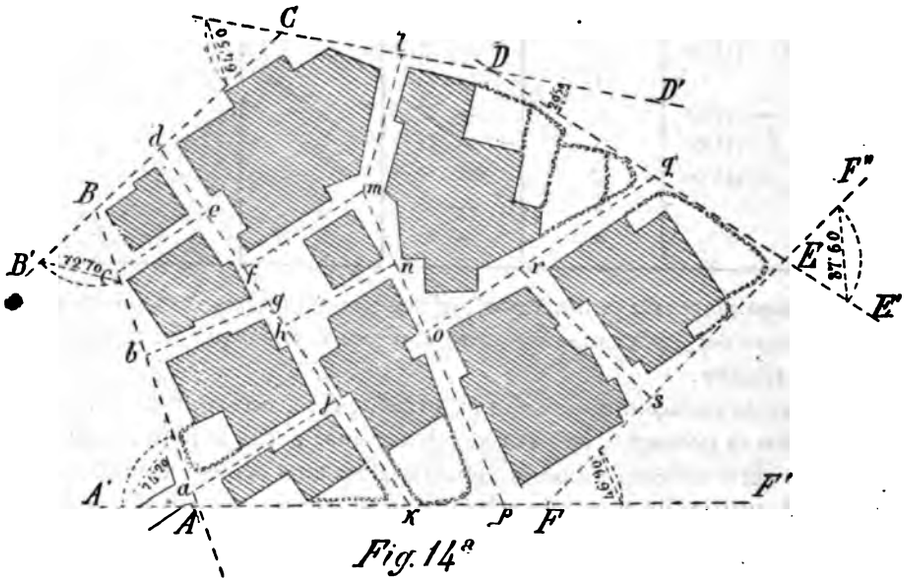


Fig. 14ª

para trabajos sucesivos, y para hacerlos visibles en el levantamiento del plano se señalan los primeros con cañas de 1 á 1'5 metros y los segundos con otras de 30 á 50 centímetros.

Hecho esto; para realizar la operación topográfica sin vacilaciones ni dudas se procederá en el órden siguiente:

1.° Se determinará el polígono exterior midiendo sus ángulos y sus lados y sobre estos los puntos donde en ellos empiecen ó terminen las poligonales trasversales.

2.° Se determinarán estas con iguales condiciones.

3.° Se hará lo propio con los detalles por medio de perpendiculares ó sencillas mediciones para que den claramente á conocer las condiciones geométricas de cada manzana de casas y huertos adyacentes.

Determinación del polígono exterior

Como todos los ángulos interiores, menos uno, son obtusos se determinará su valor por el de los suplementarios y en el agudo por el opuesto al vértice, á fin de utilizar el mayor radio posible y la mayor comodidad en la medición de la cuerda correspondiente.

Ya se ha supuesto que los radios variarán de 3 á 5 metros por no permitir otra cosa el terreno y como la Tabla de las cuerdas inserta en el número 7 del volumen primero está calculada para el radio de 10 unidas, es consiguiente que se han de modificar sus resultados.

Esto puede hacerse de dos modos:

Si se considera el decímetro como unidad y por consiguiente los 10 decímetros ó 1 metro como el tipo de la Tabla, los enteros que esta dé serán decímetros y con el radio de 3 metros,

la poligonal trasversal *mp;* midiendo esta se fija la posición de los puntos *n* y *o* y consiguientemente lo quedarán las traversales *nh* y *oq* dando nuevas comprobaciones con las distancias *mp* y *oq* y finalmente con la de *rs*.

Aunque se pudiera dar mas seguridad al plano midiendo los ángulos, que las poligonales trasversales forman entre sí ó con los lados del polígono exterior, no son necesarios, porque las distancias son suficientes para ello; de los únicos que no se debe prescindir son los indicados para determinar el punto *m* y en caso de duda los *moq* y *og*D para tener seguridad en la posición y magnitud de la *og*.

Se comprende en vista de lo expuesto que la red poligonal de una pequeña población puede hacerse sin dificultad y con bastante precisión sin necesidad de utilizar ningun goniómetro, con tal que se midan todas las distancias indicadas con bastante cuidado, lo que no implica ninguna dificultad porque son pequeñas, sobre todo las que exigen mayor precisión, que son los radios y cuerdas de los arcos de los ángulos.

Determinación de los detalles

Con pequeñas perpendiculares á los lados del polígono envolvente de cada manzana edificada y en algunos casos mediante la medición de la distancia á dos puntos de posición conocida quedarán todos bien determinados y completados los datos necesarios, no solo para construir el plano en escala aunque sea de $^1/_{500}$ y medir sobre él las areas de las manzanas edificadas y huertos, sino tambien para hacerlo por el cálculo, porque se puede conseguir el plano numérico de la red poligonal.

Registro de la red poligonal del plano del pueblo de ..... cuyos ángulos se miden por las cuerdas de sus arcos

Ángulos auxiliares				Ángulos interiores		Distancias				Observaciones
Designación	Radio — Metros	Cuerda — Metros	Valor — Gr. cent.	Designación	Valor — Gr. cent.	Parciales Desig.	Parciales Metros	Totales Desig.	Totales Metros	
POLÍGONO EXTERIOR										
B A A′	3	3'300	74'20	B A F	125'80	»	»	A B	211'6	Azimut de AB=391'40c
»	»	»	»	»	»	A *a*	16'3	»	»	A=Estaca en el ejido.
»	»	»	»	»	»	A *b*	109'8	»	»	
»	»	»	»	»	»	A *c*	170'5	»	»	
A B B′	5	5'405	72'70	A B C	127'30	»	»	B C	166'2	B=Hito del huerto de P. S.
»	»	»	»	»	»	B *d*	55'4	»	»	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
POLIGONALES TRANSVERSALES										
B *d e*	3	4'110	96'40	B *d e*	96'40	»	»	*d k*	300'4	*d k*=Calle de Ambrós.
»	»	»	»	»	»	*d e*	50'7	»	»	
»	»	»	»	»	»	*d f*	92'5	»	»	*c e*=Calle del Pino.
»	»	»	»	»	»	*d g*	127'0	»	»	*b g*=Calle del Retamar.
»	»	»	»	»	»	*d h*	143'5	»	»	
»	»	»	»	»	»	*d j*	206'0	»	»	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
m f k	10	13'507	94'40	*m f k*	94'40	»	»	*f m*	97'5	
D *l m*	4	3'502	98'80	D *l m*	98'80	»	»	*l m*	80'3	
»	»	»	»	»	»	»	»	*m p*	237'5	
»	»	»	»	»	»	*m n*	»	»	52'4	
»	»	»	»	»	»	*m o*	»	»	97'5	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

Determinados los detalles casi en su totalidad por perpendiculares á los lados de la red poligonal se pueden consignar los resultados de su medición en un estado enteramente análogo al inserto en la página 40.

Los detalles se pueden comprobar midiendo las fachadas de las casas entre cada dos puntos determinados por perpendiculares, con lo cual quedarán medidos los cuatro lados de los trapecios ó rectángulos parciales resultantes, cuya superficie es fácil determinar por el cálculo para deducir numéricamente el area de la parte edificada dentro de cada perímetro interior.

Por este sistema y precauciones recomendadas no hay dificultad en admitir para estos planos la *tolerancia* prevenida por la *Instrucción prusiana*, ó la fijada segun el sistema de Porro sobre cuya base calculamos el estado inserto en la página 35 ó cualquiera de las otras que para las distancias en las poligonales y en el cierre de los polígonos se han señalado en los mejores Catastros y de que dimos cuenta en los números 9 y 10.

Finalmente si se tuviera que hacer la planta de un edificio como el representado en la figura 15, se empezaría por determinar su perímetro con relación á un rectángulo ú otro polígono circunscrito fijando las aberturas con todos sus detalles y de ellos se deduciría el espesor de los muros, despues con referencia á la cara interior de ellos se determinan los distintos departamentos midiendo los lados y diagonales y el espesor de sus paredes directamente por las aberturas ó indirectamente como se indica en las distancias anotadas en la figura; si algun departamento tiene uno de sus límites en curva se determina esta por perpendiculares á su cuerda, cuyos extremos se fijan con relación á los de los lados rectos, como se indica en el departamento número 4 de la figura; las chimeneas y las escaleras que están sobre el piso del plano y el superior se figuran y las ventanas se indican como en la figura aparecen si son altas y si su hueco interior al alfeizar llega al piso del plano suprimiendo la línea interior, porque realmente aquel llega hasta el plano vertical de la línea interior del alfeizar, es decir que aun por debajo de la ventana se reduce el espesor del muro.

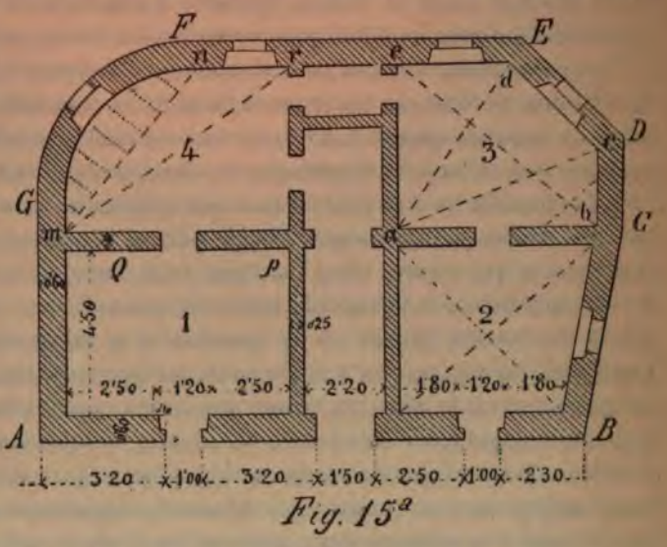


Fig. 15ª

No creemos necesario dar mas explicaciones sobre esta clase de planos, ni los de fachada y de fortalezas, porque á los mas indoctos se les ocurrirá la manera de representarlos; pero si alguno deseare mas detalles sobre estos particulares puede consultar con provecho la Planimetría de Giol y Soldevilla, que se ocupa de ello muy extensamente.

14 — Levantamiento del plano de terrenos y poblaciones de mediana extensión con distintos procedimientos y aparatos.

Teniendo que ser necesariamente arbitrarios los límites de la superficie característica de los planos de pequeña, mediana y grande extensión, como ya hicimos constar en el número 12 al hacer su clasificación, aceptarémos para la explicación de los procedimientos mas convenientes con los antiguos aparatos, de que ahora nos hemos de ocupar, que se trate de levantar primero el plano de un terreno de 400 hectáreas medianamente accidentado y dividido en predios de 4 á 25 hectáreas y parcelas de 0'25 á 2 hectáreas y despues de un pueblo de extensión de 200 hectáreas.

No es necesario hacer consideración alguna para poner en evidencia que en un terreno de tal extensión no podrían aplicarse, como procedimientos principales, los de perpendiculares y medición sin grandísimas molestias, gastos y errores.

Por esto desde remotos tiempos se utilizó en tales casos el sistema de poligonación determinando el perímetro con una poligonal, á la que se referian sus detalles por perpendiculares y medición de pequeñas distancias, y por otras trasversales, que se apoyaban en aquella, se determinaban todas las líneas y accidentes interiores.

Utilizáronse al efecto la plancheta ó la brújula y la cadena ó la cinta midiéndose ordinariamente las distancias una sola vez y como medios de comprobación se dirigían visuales á puntos préviamente determinados ó á otros visibles desde muchas estaciones, que lo quedaban por múltiples intersecciones; con tales aparatos y medición de distancias y ateniéndose exclusivamente á los resultados gráficos, díchose está que tales planos habían de ser de poquísimo valor y sin permitir determinar *entre que límites se hallaba la verdad, condición esencial de todo plano*, dejaban ancho campo á toda clase de errores y compensaciones fortuitas, que engañaban en el cierre muchas veces al mismo operador ó este lo hacía á aquel por quien trabajaba utilizando injustificadas componendas, que producían un cierre solo aparente.

La carencia de mejores procedimientos y aparatos disculpaba en muchos casos á aquellos Topógrafos; porque, en los terrenos escabrosos especialmente, no podían proceder de otra manera sin motivar gastos cuantiosos incompatibles muchas veces con el destino de los planos; pero que hoy se haga lo mismo por facultativos calificados, cuando la Topografía y la construcción de aparatos les dan medios mas que suficientes para resolver sencillamente todas las dificultades, ó porque desconocen tales medios ó porque no dan á los buenos planos la grande importancia que tienen, no se justifica; y sin embargo tales hechos se realizan cada dia, porque no se comprueban debidamente todos los que se hacen; y como por tan improcedente competencia los buenos planos no se aprecian ni se pagan, de aquí que por falta de interés muchos Topógrafos se encuentran á la altura de los que trabajaron en la primera mitad del siglo XIX, sin que les sirva de disculpa, como pretenden muchos de ellos, que así realice sus *itinerarios* el Instituto Geográfico y Estadístico de España, porque este con ellos solo se propone conseguir el relleno de los mapas de escala de $^1/_{25000}$ y no es para tal objeto necesaria mayor precisión, con tanto mayor motivo cuanto que desarrolla aquellos entre dos vértices de su triangulación de tercer órden ó la especial topográfica hecha al efecto sobre la misma base, utiliza brújulas frecuentemente comprobadas y cintas de acero en la medición de distancias con tolerancia de $^1/_{500}$ en la diferencia resultante en la comprobación y en ciertos casos se dispone el uso de la pantómetra para los ángulos y de la estadía para las distancias, y como en el plano de las poblaciones utiliza mayores escalas, ya exige en estos casos el empleo del teodolito en la medición de los ángulos y la repetición en la de las distancias con cintas de acero comprobadas tomando muchas precauciones y exigiendo tolerancias mas restringidas para conseguir la precisión necesaria; no tienen, pues, aquellos razón para disculpar su proceder al comparar sus trabajos con los del Instituto Geográfico Español.

Nuestra anterior apreciación se comprende al observar que las buenas teorías y prácticas topográficas se han extendido mas y se han perfeccionado en aquellos países donde se realizaron ó están haciéndose buenos Catastros, y es porque allí ha habido necesidad de aquilatar la precisión con buenas comprobaciones y por eso á estos países acudimos para encontrar los mejores procedimientos y las racionales tolerancias, que permiten esperar la necesaria y posible precisión de los planos.

En los de que ahora nos ocupamos no son aplicables las triangulaciones formales, de que trataremos en la *tercera parte*, porque equivaliendo la extensión total del terreno que tomamos como tipo á un cuadrado de 2 kilómetros de lado, no cabe en ella una serie de triángulos, cuyos lados han de tener por lo menos aquella longitud y ordinariamente mucho mayor.

Sin embargo el ilustrado Ingeniero Sr. Rabbini, director del Catastro piamontés, propuso

en 1855 (1) sustituir al sistema de gráficas poligonales, que antes se utilizaba, una densísima triangulación con lados de 300 metros; calcular su longitud y las coordenadas de los vértices trigonométricamente y utilizar estos y otros puntos de los lados como extremos de las alineaciones rectas, á las que por perpendiculares se habrían de referir todos los puntos característicos de los límites de los predios y parcelas.

Como medía los ángulos con teodolito y las distancias sin duda con la cinta de acero dos veces (2) en sentido contrario, puede asegurarse que los resultados serían muy aceptables si fuera fácilmente posible realizar esas densísimas triangulaciones; pero el mismo Rabbini ya indicaba que así no sucedía, cuando establecía que en caso necesario se extendiera la longitud de los lados á 500 ó 600 metros á lo mas y aun, contradiciéndose, pasaba de este límite, pues segun resulta del ejemplo que pone en su libro y que Gattoni copia en la lámina segunda de su excelente memoria, el triángulo allí utilizado tiene lados de 800, 760 y 630 metros aproximadamente, alineaciones de 803 y perpendiculares de 60 y 80 metros, lo cual ofrece grandísimos inconvenientes, que unidos á aquella dificultad y al gasto considerable que motiva (2) ha sido sin duda causa de que no se aceptara tal procedimiento.

Si como dejamos manifestado no pueden utilizarse como procedimientos principales los de perpendiculares y triangulaciones en los planos de terrenos de mediana extensión, es indudable que se ha de apelar en tal concepto al sistema poligonal, que se puede desenvolver sin dificultad en tales extensiones adaptándose á las condiciones de los límites del perímetro general, de los predios y parcelas y de toda clase de accidentes; pero sin prescindir del auxilio de los demas sistemas, ya para adquirir seguridad en la situación de sus vértices, ya para referir mas fácilmente á sus lados todos los detalles convenientes; es decir que, como siempre, se ha de utilizar el procedimiento mixto sirviendo de base ó principal el poligonal; pero como en el caso supuesto, aunque en lo principal se desarrolle en polígono cerrado ha de tener al menos 8 kilómetros, se comprende fácilmente que si no se toman en la determinación de sus vértices muchas precauciones, podríanse acumular los errores impidiendo conseguir la precisión conveniente en el perímetro y en las poligonales trasversales, que, si bien muchas veces indicarían su existencia, no darían medios para descubrirlos y anularlos.

No siendo nuestro objeto detallar los trabajos de campo, que en otros tiempos se realizaban, sino los que todavía se siguen con los antiguos procedimientos, pero perfeccionados, como hemos dicho ha tenido y tiene lugar en los modernos Catastros y muy especialmente en el prusiano é italiano, si bien sus Instrucciones excelentes no se acomodan al caso de que tratamos, porque refiriéndose á grandes superficies sus poligonaciones y parcelaciones se han de basar en las triangulaciones geodésicas de cada país y en las topográficas de ellas derivadas, de aquellas podrémos sacar las prescripciones fundamentales, que deben servir de norma en los trabajos de campo de los planos de que ahora nos ocupamos, aunque harémos las modificaciones que creamos oportunas para acomodarlas á nuestra particular opinión y á las condiciones del caso á que nos referimos. Debe el Topógrafo en primer lugar reconocer detenidamente el terreno fijando los vértices de la poligonal principal con estacas, en que esté pintada la letra mayúscula con que en el cróquis se la designe (3), cuando al efecto no puedan elegirse hitos de término, de

---

(1) Lecciones «sull accertamento catastale, attuazione e conservazione del Catasto». — Torino. Stamperia Reale 1885. Gattoni pág. 76.

Este sistema debió ser el aplicado en el Catastro parcelario francés, segun dice Prevot en el volumen segundo de su Topografía, página 306; pero como no se medían las distancias mas que una vez y las perpendiculares se levantaban á ojo, muchas veces los resultados fueron malos.

(2) Segun la Junta superior del nuevo Catastro italiano dice en la página 80 de su excelente memoria de Abril 1886, los planos del Catastro piamontés dirigido por Rabbini costaron 13'33 liras por hectárea.

(3) En las Instrucciones prusianas los vértices de todas las poligonales, los de las triangulaciones, las distancias, el órden en la marcha de los trabajos, etc., etc., todo se expresa con números y de aquí resulta grande confusión; creémos mas oportuno para evitarla hacer la designación de las estaciones con letras en la forma descrita en el número 56 del volumen primero, que, como verán en la *segunda parte*, se acomoda perfectamente á los modernos procedimientos y en gran parte á los antiguos.

propiedad ó kilométricos de carreteras, cabeceras de puentes ú otros semejantes, en que se pueda colocar cómodamente el aparato.

Al propio tiempo se fijarán tambien por medio de otras estacas sin designación previa los puntos de la poligonal perimetral de donde han de partir las secundarias ó las alineaciones rectas, á que se han de referir los detalles de las divisiones interiores.

Terminado esto y hecho con todo cuidado su cróquis, se procede en la misma forma con las líneas principales de división, como caminos, ríos, arroyos, etc., marcando los vertices de su poligonal correspondiente con designación apropiada y sin ella las cabezas de las poligonales y alineaciones rectas, que se han de desarrollar dentro del polígono parcial que las primeras determinan.

Para evitar la pérdida de tiempo consiguiente á la repetición de los viajes, una vez terminada la marcación de la poligonal perimetral de una de estas divisiones se puede continuar fijando las poligonales y alineaciones de subdivisión hasta que queden separadas todas las líneas, los predios y parcelas componentes de cada polígono parcial, haciendo de cada uno un cróquis detallado, en que consten la designación de los vértices, los nombres de las vías de comunicación y acuáticas, los de los predios y parcelas y cuantas noticias conviniere tener, indicándose solamente los detalles, que despues se completarán.

Cuando en cualquiera de las poligonales indicadas no fuera fácil medir directamente uno de sus lados ó parte de él, p. e., cuando la cruza un barranco ancho y profundo, se elegirán y marcarán en sus márgenes las bases, que en ella se han de medir para determinar con repetición por dos triángulos, ó de la manera que se juzgara mas conveniente, el ancho del barranco en el lugar en que la poligonal le cruce y como ordinariamente por cada márgen de aquel se hará una poligonal secundaria, los dos puntos de la primera poligonal y los de las secundarias servirán de estaciones de ellas al propio tiempo que al objeto antes indicado quedando la distancia inaccesible ó de difícil medición como un lado de la primera poligonal, si su longitud lo permitía, ó como parte de él midiéndose directamente la restante.

Para evitar complicaciones se puede hacer un cróquis general de la poligonal perimetral y las de las principales divisiones ó polígonos parciales principales y de cada uno de estos otro con todas las demas y las alineaciones rectas necesarias para la completa determinación de los detalles fijándose en todos con claridad las estaciones y su designación, los puntos de donde han de partir otras y las alineaciones rectas, etc., y la escala en que se ha de construir el plano de cada polígono parcial, segun su subdivisión, como se previene en las Instrucciones alemanas, que admiten al efecto diferentes escalas para hacer constar claramente todos los detalles y es á esto consiguiente que se restrinja la tolerancia á medida que la escala aumente: esto es aceptable en un plano parcelario catastral, pero innecesario en los aislados de mediana extensión de que ahora nos ocupamos; sin embargo conviene consignarlo en el cróquis y tenerlo muy en cuenta para elegir una escala, que permita la completa representación de todos los detalles.

Cuando los vértices de las poligonales se marquen con estaca, tubo de arcilla cocida (1) ó pequeño hito de piedra, se referirá cada uno á tres puntos fijos y poco distantes para poderlos reponer en caso de desaparición: cuando fueren hitos, cabeceras de puente, etc., se marcarán con una cruz describiéndose claramente y pintándose en ellos la letra, con que en el cróquis se designen.

Al elegir los puntos de estación se ha de tener en cuenta que no disten entre sí menos de 50 metros ni mas de 400 (2) y que por lo menos se vean cómodamente desde cada una la ante-

(1) Estos se colocan enterrados indicándose exteriormente su situación por un medio cualquiera.

(2) En la Instrucción II de Abril $^{18}/_{1886}$ dictada por la Junta superior del Catastro de Italia se previene que los lados de las poligonales principales no sean menores de 100 metros y de 50 los de las secundarias ni mayores de 350 metros, cuando las distancias se hayan de medir directamente y esto se hace al objeto de evitar los errores en la puesta de estación y los consiguientes en el cierre; ampliamos algo estos límites para facilitar la aplicación y porque creemos que procediendo con cuidado no producirán errores graves.

rior y la siguiente y así mismo, en cada poligonal, de la primera la tercera ó cuarta, de esta la séptima ú octava y así sucesivamente para que se pueda realizar la importantísima comprobación de que nos ocupamos en el número 4, y así mismo que de estas y otras estaciones se vea alguna de otras poligonales ó puntos determinados aislados, que puedan servir de comprobación por intersecciones; conviene por consiguiente que las estaciones se fijen en puntos despejados y algo elevados, pero no mucho que den ocasión á visuales y distancias inclinadas mas de 10°, no importando, al contrario siendo conveniente, que los lados de la poligonal corten una ó mas veces el límite general ó interior con tal que no esté formado por seto vivo, arroyo escabroso, barranco ó de otro modo que dificulte la medición y la visualidad; pues así podrán disminuirse mucho la longitud de las perpendiculares y la intersección del lado de la poligonal con el límite facilita las comprobaciones de detalle.

Con los cróquis indicados el Topógrafo determina en el gabinete la marcha de todos los trabajos y establece el órden, en que se han de realizar, numerando los predios y designando las parcelas con el mismo número del predio á que pertenecen y distintas letras minúsculas esponenciales completando la designación literal de todas las estaciones, cabeceras de alineaciones, etc., etc., á fin de evitar equivocaciones en las referencias entre los cróquis y los registros.

Conviene pasar de tinta todas las líneas poligonales, designaciones, etc., para no confundirlas con los detalles, que despues se dibujarán de lápiz y sacar dos copias, una para el Topógrafo y otra para su Ayudante.

El trabajo previo que acabamos de describir ocupará algun tiempo y motivará molestias; pero quedarán ámpliamente compensados con la economía en ambos conceptos que despues se consigue y la seguridad y sencillez con que se realiza el trabajo principal.

Es conveniente que el reconocimiento, el cróquis y señalamiento de estaciones los realice el Topógrafo acompañado del Ayudante, de un guía práctico y de uno ó dos peones y para hacer los señalamientos provisionales llevar algunos jalones ó banderolas de 2 metros y cañas de 50 á 70 centímetros ademas de las estacas ya preparadas y otras sin designación alguna, pero dispuestas para recibirla, lo que puede hacerse si conviniese sobre el mismo terreno llevando al efecto un alfabeto y números apropiados.

La brigada se ha de componer de dos secciones:

La primera, destinada á la medición de los ángulos, se compondrá del Topógrafo, de un peón destinado á trasladar el aparato, sostener el parasol y dar noticias del terreno, por lo que ha de ser práctico en él y otro, al menos, para el movimiento de banderolas y jalones, joven del país tambien conocedor del terreno y de la situación de los puntos marcados, á cuyo efecto ha debido asistir al reconocimiento previo.

La segunda, destinada á la medición de las distancias y determinación de los detalles, se compondrá del Ayudante y tres peones medidores, si se opera con cinta de acero, y cuatro si con reglones (1).

Aunque algunos consideren excesivo este personal de la brigada, es sin embargo el necesario para proceder con seguridad y rapidez en la operación haciendo simultáneas las dos clases de mediciones.

Instrumentos.—Para que los resultados se encuentren dentro de las tolerancias señaladas á las poligonaciones en los números 8 y 9, esto es: $t = 1'5' \sqrt{n}$ para los ángulos y $t' = 0'1$ metros $+ 0'001$ d. metros para las distancias, es preciso que los primeros se midan con *teodolito de*

(1) Las Instrucciones prusianas ordenan el uso de estos casi exclusivamente en la medición de las distancias; las del nuevo Catastro italiano previenen que se midan con ellos ó con cintas de acero; en nuestro concepto basta hacerlo con estas operando con cuidado y es mucho mas cómodo y resulta el trabajo mas económico: en las pequeñas perpendiculares y mediciones de los detalles no hay inconveniente en utilizar las buenas cintas de hilo, que se manejan mucho mejor.

apreciación indubitada de 1′ (1) bien comprobado y corregido y las distancias al menos con c
ta de acero tambien comprobada, excepto las pequeñas perpendiculares, que podrán med
con buenas cintas de hilo.

Dirigiendo las visuales al pié de las banderolas ó, cuidando de que estas ó los jalones se
jen fuerte y verticalmente en el terreno, á cualquier punto de ellos, se leerán siempre los
gulos con los dos nónius, y con la punta de la aguja imanada para comprobar en una sola posic
del anteojo para los de las poligonales secundarias; en la base de comprobación de la peri
tral y de las divisiones principales reiterando con la inversión del anteojo, aceptando para va
del ángulo la media de las lecturas de los nónius y no permitiéndose entre las lecturas ma
diferencia de 2′.

Se pueden medir los ángulos de las poligonales ó el azimut ó rumbo de sus lados cons
vando la orientación con el limbo; lo segundo es preferible, segun hemos demostrado (núm
156 del volumen primero).

Las distancias se deben medir dos veces sobre los lados de las poligonales y las alineacio
rectas con la cinta de acero y las perpendiculares, que no deben ser mayores de 10 metros,
cinta de hilo fuerte y bien comprobada, no admitiéndose entre las dos mediciones mayor d
rencia que la correspondiente á la tolerancia expresada y para que desde luego se aprecie
cálculo, ponemos á continuación la Tabla de las diferencias admisibles en cada decena,
debe tener á la vista el Ayudante.

Distancias	Tolerancias	Distancias	Tolerancias	Distancias	Tolerancias
50 m.	0'15	190 m.	0'29	330 m.	0'43
60 »	0'16	200 »	0'30	340 »	0'44
70 »	0'17	210 »	0'31	350 »	0'45
80 »	0'18	220 »	0'32	360 »	0'46
90 »	0'19	230 »	0'33	370 »	0'47
100 »	0'20	240 »	0'34	380 »	0'48
110 »	0'21	250 »	0'35	390 »	0'49
120 »	0'22	260 »	0'36	400 »	0'50
130 »	0'23	270 »	0'37	410 »	0'51
140 »	0'24	280 »	0'38	420 »	0'52
150 »	0'25	290 »	0'39	430 »	0'53
160 »	0'26	300 »	0'40	440 »	0'54
176 »	0'27	310 »	0'41	450 »	0'55
180 »	0'28	320 »	0'42		

Admitido el principio de que las perpendiculares determinantes de los detalles no de
ser de mas de 10 metros, parécenos que no habrá inconveniente ninguno en medirlas con b
nas cintas de hilo, que como dejamos dicho, se manejan mejor que las de acero y permanec
do esta extendida en el suelo el Ayudante determinará muy fácilmente la abscisa y la orden
de cada punto sin necesidad de escuadra auxiliado por el tercer peón, tomando nota de su va
y marcando con pequeñas estacas ó cañas provisionalmente los pies de las perpendiculare

(1) En el párrafo 14 de la Instrucción de Abril $^{15}/_{1889}$ para el nuevo Catastro italiano se dispone que los te
litos que se utilicen en la medición de los ángulos de las poligonales tengan limbos de 12 centímetros de diám
y apreciación de 30″ y que se midan los ángulos con reiteración; pues, si bien esto es recomendable y en par
aceptamos para las poligonales principales, no es indispensable, como se comprueba con los resultados consi
dos en el cuadro de la página 37 (número 11) deducidos de la fórmula para las tolerancias propuesta por Sal
raghi, pues para la longitud admitida en los lados de las poligonales resultan tolerables diferencias angulares
tante mayores y si bien estas indican la incertidumbre gráfica, es tan pequeña la numérica resultante que
pueden admitirse en los planos numéricos que relativamente á las poligonaciones trata de conseguirse con la
trucción italiana referida.

hacer la primera medición de cada lado para comprobar las abscisas al realizar la segunda, al objeto de que quede todo comprobado; entonces se quitan las estaquillas.

A fin de comprobar tambien la posición de las alineaciones rectas, que unen dos puntos de lados de poligonales, cuyo ángulo con ellas no se haya medido con el teodolito, y de facilitar el cálculo de las coordenadas de los puntos que convengan, el Ayudante al hacer su medición determinará por el sistema de las cuerdas el ángulo que forman con el lado de donde parten y con aquel en que terminan utilizando siempre que sea fácil el radio de 10 metros ú otro poco diferente é indicando con línea interrumpida la cuerda correspondiente escribirá sobre ella y los radios su magnitud para despues determinar en casa el ángulo, que se escribirá en el cróquis.

Para que el Topógrafo y su Ayudante, que han de trabajar separadamente, aunque siempre á corta distancia para que el segundo reciba en casos dados las órdenes é instrucciones del primero, no se interrumpan en sus trabajos, conviene que cada uno lleve un registro especial, pero ambos relacionados con el cróquis general y por consiguiente entre sí, para consignar numéricamente los resultados de sus mediciones.

Estos registros, que deben prepararse antes de salir al campo, pueden ser:

El primero, destinado á la medida de los ángulos y á expresar el valor total de los lados de las poligonales, que se tomarán del segundo, de la forma siguiente:

Puntos		Valor de los rumbos ó azimutes con (1)											Valor medio del lado	f r d	Observaciones
		la brújula		el limbo y nónius						Medio					
				A			B								
estación	visados	°	′	°	′	″	°	′	″	°	′	″	Metros		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
POLIGONAL DEL PERÍMETRO GENERAL															
A	B	35	30	35	28	30	215	29	00	35	28	45	135'04	f	En A se orienta el diámetro 0 - 180° con la aguja imanada. X — Veleta de la casa de campo de F. T.
»	X	104	30	104	50	30	284	50	00	104	50	5	»	»	
»	E	73	45	73	40	30	253	40	30	73	40	30	»	r	
B	A	215	30	215	29	00	35	28	30	215	28	45	»	f	
»	C														
C	B														
»	D														
»	X														
D	C														
»	E														
E	A														
»	D														

Suponiendo que el Teodolito tenga brújula, como creemos conveniente y sucede en muchos aparatos, comprendemos en las casillas 3 y 4 las indicaciones de la aguja imanada siempre convenientes para evitar equivocaciones.

En las casillas 5.ª á 10.ª los grados, minutos y segundos señalados en los nónius opuestos, suponiendo que cada uno tenga la apreciación teórica de 30″, aunque la real no pase de 1′ y no ponemos otras casillas ó líneas para los de la reiteración con el anteojo invertido, porque no siendo necesaria mas que en los ángulos de la base de comprobación y su diferencia con los va-

(1) Creemos mejor determinar los rumbos ó azimutes conservando la orientación con el limbo, que hacerlo de los ángulos interiores del polígono como muchos Autores aconsejan, porque pudiéndose conseguir la misma precisión en la medida angular evita muchos trabajos de gabinete de los que aquellos suponen necesarios, dan mas comprobaciones directas, facilitan el cálculo de las coordenadas y permiten determinar muy sencillamente aquellos ángulos, cuando conviniere conocerlos, como dejamos demostrado.

lores precedentes sólo llega á las unidades de minuto ó á los segundos, basta indicar c rayita la conformidad ó escribir sobre los primeros los números diferentes, como se in el modelo de registro para la dirección A E; finalmente se consignan los grados, aunq drían suprimirse para el nónius B, porque siempre conviene leerlos y escribirlos á fin d equivocaciones.

En las casillas 11.ª, 12.ª y 13.ª se consigna el valor medio de los azimutes ó rumbo 14.ª el número primero de las dos mediciones de cada lado hechas por el Ayudante; en con las iniciales *f*, *r* y *d* de las palabras *fácil*, *regular* y *difícil* las condiciones, que para l ción de la distancia presenta el terreno, á fin de que en caso necesario se pueda deducir de sus resultados y en la 16.ª se anotan todas las observaciones que se crean oportunas.

Empezando por consignar los datos de la poligonal perimetral, se continuarán todas se determinen por el órden en que se realice la operación, encabezando los datos de ca con su nombre apropiado ó el de su principio y fin separándolas por una raya gruesa y pacio blanco al menos de tres líneas para que se distingan claramente.

Cuando fueren muchas las poligonales, se formará un cuaderno de estos registros esc do en la primera página exterior la indicación del plano, á que se refieran, el nombre y ción del terreno que comprende, etc., etc., y en la segunda los goniómetros y diastímetr lizados, sistema principal seguido, la directriz ó meridiana elegida, cómo se haya deter la orientación del primer lado y cómo se conserve en las demás estaciones, la designa los registros de medición de distancias y parcelación y de los cróquis, que completen es mera documentación topográfica, la que despues de los trabajos de gabinete con la que rresponde se deben conservar ordenadamente en una carpeta especial.

El segundo registro, destinado á la consignación de las distancias, magnitud de los l las poligonales, abscisas y ordenadas especiales de los detalles, puede ser de la forma sig

Designación de los ejes y su determinación	ABSCISAS Y LADOS			Normales		OBSERVACIONI
	Designación	Mediciones 1.ª	Mediciones 2.ª			
				i d		
LADOS DE LA POLIGONAL PERIMETRAL						
A B	»	»	135'04	»	»	(A) Hito de piedra.
	A	»	»	»	0'00	(*a'*) Hito de piedra del
	A a'	22'50	112'57	i	8'56	de la propiedad de
	A b'	37'10	98'00	i	6'25	(*b'*, c' d' y e') seto v
	A c'	72'30	62'81	»	»	1'50 m. de ancho f
	A d'	97'48	37'60	d	7'80	do por espinos y s
	A e'	123'30	11'80	d	5'27	(B) Estaca.
	A B	135'10	»	»	»	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
ALINEACIÓN RECTA DE c (B C) á d (H" J")						
c (B C) á *d* (H" J")	*c d*	»	124'9		»	La línea a' b' c' d' *d*
La *c d* forma con B C	*c*	»	»		0'00	zanja de 40 centí
el ángulo de 47°30' y	*c* a	13'5	112'5	d	7'35	de ancho y 80 de p
con H" J" el de 139°;	*c* b	50'2	75'2	»	»	didad que separa l
con radio de 10 m. la	*c* c	65'7	60'3	i	2'35	celas tal y tal.
cuerda del 1.° es de	*c* d	97'4	37'0	i	6'14	
8'20m y la del suple-	*c d*	125'2	»	i	7'30	
mento del 2.° de 7 m.						

Como se observa en el precedente registro, para designar las abscisas utilizamos en cada lado ó alineación recta, que sirva de eje, las letras minúsculas por su órden, las mismas con un acento para el otro extremo de la normal ó punto detallado y cuando se ha de tomar como eje una alineación recta, cuyos extremos se designen también por letras minúsculas, se subrayan estas, con todo lo que y haciendo preceder á cada una de la letra correspondiente al punto de partida de la distancia y á las normales de las iniciales i y d (izquierda y derecha), se expresa todo con grande sencillez evitando confusiones.

En la segunda medición de las distancias no se designan especialmente, porque es claro que si para el punto c por ejemplo, la primera es la correspondiente á A c, la segunda lo será á B c, que son complementarias relativamente á la A B, pues que las distancias se miden en sentido inverso, y así la suma de los dos valores de la abscisa de cada punto ha de ser igual á la distancia total con la diferencia del error cometido, que desde luego se vé si está ó no comprendido en los límites de la tolerancia.

Designando las alineaciones rectas, cuando se utilizan como eje, en la forma que aparece en la primera casilla del estado precedente y teniendo en cuenta que los ángulos que forman con los lados de donde parten y en donde acaban, se cuentan á partir de estos hasta la alineación recta en el sentido mismo que se cuentan los rumbos ó azimutes, quedan perfectamente relacionadas y permiten calcular las coordenadas al orígen de sus distintos puntos por sencillas fórmulas, como dirémos al tratar de los trabajos de gabinete; para evitar dudas se puede

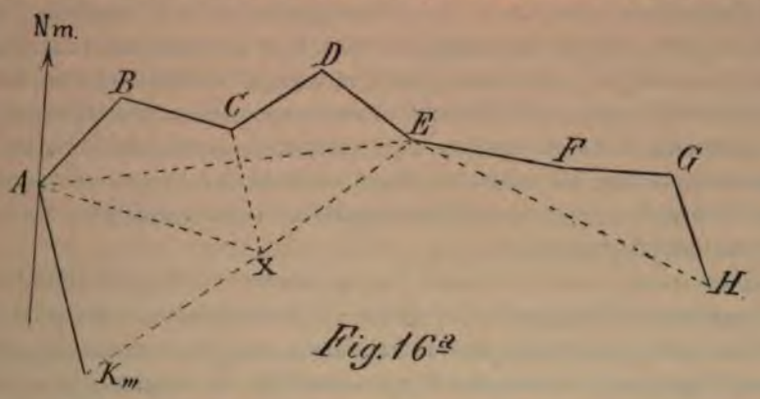


Fig. 16ª

tambien croquizar el principio y fin de la alineación en la misma casilla indicando el ángulo que se mide con la magnitud del radio y de la cuerda correspondiente. (1)

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente dicho y comprobados y corregidos el goniómetro y diastímetros que se han de utilizar, se constituyen las dos secciones de la brigada en la primera estación, A. (Fig. 16).

Empiézase por encargar á un peón que clave fuerte y verticalmente jalones en los puntos B, C, D y banderolas (2) en E y X (si este no estuviera determinado con precisión) y á otro un jalón en K_m, que suponemos el último vértice de la poligonal perimetral.

Entretanto el Topógrafo pone el aparato sobre la estación A, nivelándole con cuidado y haciendo la coincidencia del cero del nónius A con el del limbo y el del B con la graduación 180°; asegura la alidada al platillo del limbo y aflojando el segundo hace girar los dos juntos hasta que en completo reposo la aguja imanada señale el cero de la brújula; esto conseguido, asegurado el platillo y comprobada la coincidencia del cero del nónius A y el del limbo se mira

(1) Rogamos á los Topógrafos prácticos, que se tomen la molestia de leer nuestro libro, que nos dispensen la minuciosidad y repeticiones con que explicamos ciertos detalles; lo hacemos en obsequio á los principiantes, que seguramente nos lo agradecerán, porque necesitan conocerlos para proceder sin dudas ni vacilaciones.

(2) Conviene distinguir las estaciones de comprobación y los puntos que lo han de ser tambien por intersecciones y como de un extremo á otro de cada lado ordinariamente se verá bien un jalón de 1'5 á 2 metros, es conveniente señalar con ellos tales puntos y con banderolas de 2'5 á 3'00 metros los demas, con lo cual tambien se economizan gastos de compra y de traslación del equipaje.

por el anteojo, cuyo ocular se arregla á la vista del observador, colocando un jalón ó banderola en su plano de colimación á 300 ó 400 metros de distancia, el que con la estación A fijará la meridiana geográfica ó magnética, segun que esté ó no declinada la brújula.

Mejor ó peor determinada esta dirección ha de servir como directriz originaria y se ha de marcar y conservar, á cuyo efecto se clava una fuerte estaca señalada con N g ó N m en contacto con la banderola, aunque esta se conservará hasta que hayan terminado las observaciones en la estación A.

Resulta de todo esto que la orientación del plano es solo aproximada, pero quedando marcada en el terreno la directriz utilizada como meridiana, en cualquier momento se puede determinar su desviación de la verdadera y modificar convenientemente los rumbos y coordenadas de los puntos que fueren necesarios ó simplemente añadiendo al plano la flecha indicadora de la verdadera meridiana.

Bien asegurado el platillo del limbo se suelta la alidada y se dirige la visual al punto de comprobación, E, se lee y anota el rumbo señalado por los nónius, se invierte el anteojo y dirigiendo nuevamente la visual á la misma banderola se lee el nuevo rumbo en los dos nónius, en cuya posición el B señalará lo que antes el A y al contrario con poca diferencia, que se anotará, como antes se ha dicho; se vuelve el anteojo á su primera posición y se lee por lo menos el rumbo señalado por el nónius A, que debe ser el mismo señalado en esta, con lo cual se tendrán tres pares de valores, aunque en la segunda y tercera posición del anteojo puede concretarse la lectura á la del nónius más próximo, el B en la segunda y el A en la tercera, sino se notaran diferencias sensibles, para evitarse la molestia de tener que dar tres vueltas alrededor del aparato, que es lo que mas molesta y lo mas expuesto á producir errores con los movimientos del suelo ó tropezando en las piernas del trípode; hácese despues girar la alidada hasta que el plano de colimación comprenda la banderola N m comprobando nuevamente el rumbo.

Todas estas observaciones las realiza un Topógrafo un poco ejercitado en menos de 3 minutos y dan en el concepto angular completa seguridad y base precisa para las comprobaciones y compensación racional de los errores.

Dirígese despues sucesivamente la visual á los puntos B, X y K_{m} y leyendo los rumbos con los dos nónius se anotan en el registro sus valores y se dan por terminadas las observaciones angulares de la estación A, en que se fija una banderola recogiendo desde luego la N m.

Trasladado el Topógrafo á la estación B con su sección de brigada pone en ella el aparato bien centrado y nivelado; si el rumbo de A B fué de 35°, 28′ y 30″, por ejemplo, con el nónius A y de 215° 29′ con el B en la estación anterior, hace ahora coincidir el nónius A con 215° 29′ y el B lo estará con 35° — 28′ — 30″, asegura la alidada al platillo del limbo y soltando este dirige la visual á la banderola colocada en A asegurando el platillo, con lo que el diámetro 0° — 180° estará en B perfectamente paralelo á la dirección que tenía en A y soltando la alidada dirige la visual al jalón, C, y lee y anota el rumbo señalado por los dos nónius A y B, que es lo único que tiene que hacer en la estación B.

Se traslada sucesivamente á las C y D, orienta en la primera con el inverso de B C y en D con la C D determinando y anotando respectivamente los rumbos C D y D E en la forma antedicha.

Colocado en E orienta con el inverso de D E y en cuanto ha asegurado el platillo y soltado la alidada dirige la visual al punto A, *cuyo rumbo ha de coincidir con el inverso de A E dando una excelente comprobación;* si la diferencia no excede de la correspondiente á la tolerancia admitida, para este caso $t = 1'5' \sqrt{4} = 3'$ se admiten como buenos los rumbos obtenidos y se continúa la operación, *pero no con la orientación correspondiente al inverso de D E, sino con la del de A E*, que está exento de los errores parciales y distribuyendo despues el hallado entre los rumbos leídos por partes iguales se hará la compensación con muchas probabilidades de haber hecho desaparecer aquellos errores; si la diferencia excediera de los límites de la tolerancia se buscará la causa del error y en caso necesario se repetirán las observaciones.

Desde la estación E con la orientación deducida del inverso de A E se determina el rumbo

de E H, nueva visual de comprobación, de la misma manera que se determinó la A E, y despues de leer y anotar los rumbos E X y E F se traslada á la estación F continuando las observaciones de la base de operaciones, A B C D E F... y de la de comprobación A E H... hasta que llegando á la estación K_m, última de la poligonal perimetral, con el rumbo K_m A inverso de A K_m se comprueba nuevamente la precisión de todos los rumbos.

En cuanto se haya hecho la comprobación del rumbo E A, modificado la orientación y determinado con seguridad el rumbo de E H se hacen recojer los jalones y banderolas de K_m, B, C y D, que se utilizarán en las estaciones sucesivas, sino las necesitara todavía la sección de brigada del Ayudante.

Este procedimiento permite que en los planos de que ahora tratamos puedan utilizarse sin inconveniente alguno *las buenas pantómetras teodolitas*, porque si bien la apreciación real de sus nónius no pasa ordinariamente de 3', aunque la teórica sea de 1', es seguro que la compensación racional consiguiente al procedimiento permitirá alcanzar la medición de los ángulos de la base de comprobación, A E H... con menos error del tolerado y mucho menor del señalado en el cuadro de la página 37, número 11, que es mas que suficiente en los planos de este género; por lo que *pueden muy bien levantarse estos planos con las buenas pantómetras-teodolitas*.

No sucede lo mismo con las brújulas, si se quiere conseguir el plano numérico susceptible de poderse traducir en el gráfico de escala de $^1/_{500}$; pero si bastara la precisión que dá el graficismo en la de $^1/_{1000}$, ya podría admitirse sin reparo *y lo mismo ocurriría con las buenas planchetas* cuidando de utilizar para estas en lo posible, el *procedimiento recomendable* explicado en el número 172 del volumen primero, ó el anterior dedicando las lados A E, E H... para comprobar y rectificar la orientación de la plancheta: por esto en los planos parcelarios catastrales se admiten con la escala de $^1/_{2000}$ estos aparatos en los terrenos de poco valor y grandes parcelas, (yermos, arenales, roquerales, etc.), pero solo por excepción y como concesión á la economía en los gastos, lo cual no está bien justificado: *en nuestro concepto solo deben admitirse á falta de buenas pantómetras y teodolitos*, porque la inseguridad con que con aquellos se opera y las muchas precauciones que exigen, producen grandes molestias y dudas, que trabajan constantemente la mente del Topógrafo concienzudo.

Antes que este coloque el aparato en la estación A, el Ayudante con su sección de brigada hace poner la cinta de acero en la dirección de A B y determina los detalles de la primera cintada quitándola enseguida para no molestar á aquel y continúa sus mediciones y croquiza los detalles como se indica en la figura 17 anotando las abscisas y ordenadas en su registro especial.

Como ya hemos dicho antes, al levantar una normal debe hacerse con la cinta de hilo permaneciendo la de acero extendida sobre el eje y de esta suerte, en las menores de 20 metros,

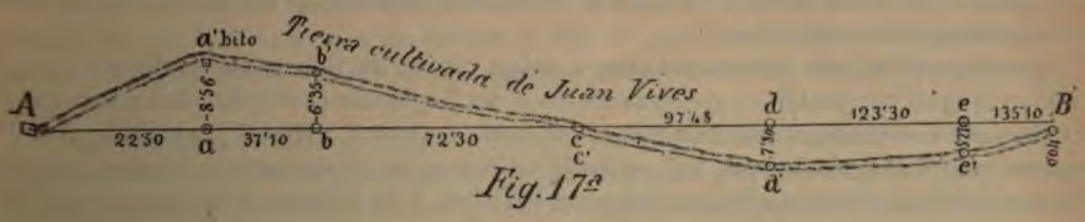


Fig. 17ª

no necesita emplear la escuadra; los dos extremos de la normal se marcan con estaquilla ó caña para hacer su comprobación en la segunda medición de las abscisas y ordenadas y esto hecho se recojen aquellas.

El cróquis de los detalles puede hacerse sobre el del polígono parcial ó con separación para cada eje, como aparece en las figuras 17 y 18, cuidando de relacionarlos claramente; el segundo medio será generalmente el mas sencillo para el campo y en casa se hará el primero.

Cuando desde un punto de la poligonal, que se está midiendo, deba partir una alineación recta necesaria para detallar un límite, se determinará con cuidado y se marcará con una es-

taca y un jalón para hacerle visible, señalando desde luego sobre el eje el radio de 10 metr[illegible] para determinar por la cuerda el ángulo que forman entre sí.

En unos casos podrá convenir para evitar rodeos suspender los detalles de la poligonal pa[illegible]ra hacer los de la alineación recta y en otros al contrario; el Ayudante verá en cada caso lo q[illegible]ue mas le conviene; porque croquizando y anotando con la debida separación lo que á cada e[illegible]je corresponde no resultará confusión.

Ordinariamente el trabajo de la segunda sección de la brigada exigirá mas tiempo que [illegible]el propio de la primera, por lo que el Ayudante debe acelerar el suyo en lo posible y el Topógraf[illegible]afo procurar reducir aquel y hacer todas las comprobaciones con calma auxiliándole alguna ve[illegible]ve para que no hayan de separarse mucho las dos secciones y entre otras cosas la primera cui[illegible]i

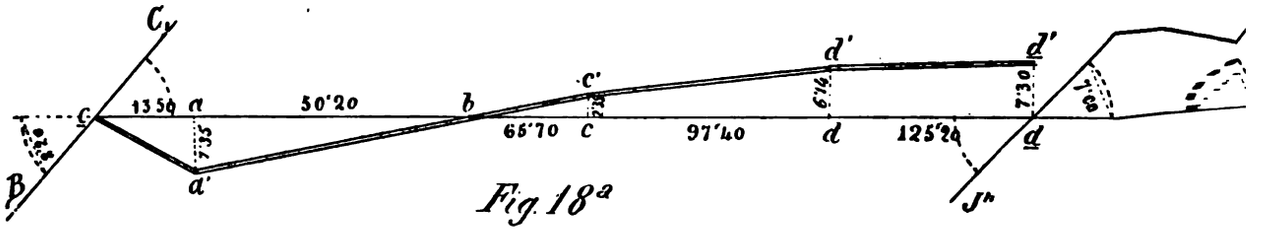


Fig. 18ª

dará de poner y quitar las banderolas y jalones, de clavar y señalar convenientemente las esta[illegible]cas, que no se pusieron en el reconocimiento previo, y de medir las referencias de las estaciones.

En la figura 18 se representa el cróquis de los detalles determinados con referencia á la ali[illegible]neación recta *c* (de B C) y *d* (de H" J"), cuyas abscisas y ordenadas constan en el registro de la página 54.

El personal de la brigada compuesto, segun queda dicho, del Topógrafo, su Ayudante y cinco peones, se considerará por algunos excesivo; pero no lo es, si se ha de trabajar con órden, seguridad y rapidez; podría suprimirse el Ayudante y un peón encargándose el Topógrafo de la medición de los ángulos y las distancias y de croquizar los detalles; pero no solo se emplearía mas del duplo del tiempo, resultando en definitiva mucho mas caro, sino que se daría lugar á equivocaciones; la indicada división del trabajo ofrece muchas ventajas y en cuanto sea posible debe admitirse.

Cuando existe una triangulación muy densa, como la aconsejada por Rabbini, pueden reducirse los ejes á alineaciones rectas y la brigada al Topógrafo y cuatro peones, tres medidores y uno destinado al movimiento de banderolas y jalones.

Concretarla al Topógrafo y dos peones, como dicen algunos que lo hacen, es imposible; so-pena de incurrir en grandes complicaciones, que se traducen en pérdida considerable de tiempo, ó, lo que es peor, en notables errores por no repetirse la medición de las distancias y en apreciar á la vista las de los detalles.

En cuanto la brigada se retira del campo, deben pasarse de tinta todos los datos de los registros y cróquis cotejándolos y consignando en el del Topógrafo la longitud de los lados de las poligonales y en los cróquis los nombres de los sitios, predios y parcelas, de los ríos, arroyos, caminos interiores y confinantes, etc., se harán la indicación de los cultivos y cuantas otras se crean convenientes oyendo al efecto á los guías prácticos, á fin de evitar despues en el dibujado del plano toda clase de dudas.

En los días de mal tiempo el Topógrafo con el Ayudante puede ocuparse en el cálculo de las coordenadas de los vértices de las poligonales y alineaciones rectas, como dirémos al tratar de los trabajos de gabinete, y los peones en hacer estacas, limpiar las cintas, jalones, etc., y en otros trabajos análogos suministrando á los primeros cuantas noticias locales les conviniere conocer.

Segundo caso. Si el plano que se quiera levantar fuera el de una población de mediana importancia, se procedería en la misma forma, pero teniendo en cuenta las condiciones si-

1.ª La poligonal perimetral debe acercarse en lo posible á la parte edificada y huertos y solares anejos, procurando que sus vértices se hallen enfilados con las calles que á ella llegan y que desde la mayor parte de ellos y especialmente desde los de la base de comprobación se vea algun punto notable interior, á fin de conseguir por intersecciones una triangulación mas ó menos regular; como lo primero es muchas veces imposible de conseguir, sino se reduce excesivamente la longitud de los lados, es indispensable admitir normales mayores de 20 metros y en este caso habrá que utilizar para levantarlas una escuadra.

2.ª Las poligonales trasversales de primer órden se harán pasar por las calles principales, que desemboquen en la perimetral y, cuidando que sus vértices enfilen con las calles á aquellas concurrentes, por estas se trazarán sucesivamente las poligonales de segundo y tercer órden y así se continuará hasta formar polígonos, que comprendan inmediatamente cada manzana edificada ó edificable.

3.ª Estas se determinarán por perpendiculares á los lados de las poligonales, que las circunden midiendo para comprobación directa la línea de fachadas, cuya longitud se comparará con la deducida numéricamente en cada triángulo, trapecio ó rectángulo, que se forme con ella y la abscisa y ordenadas que la determinen.

4.ª La tolerancia se debe reducir á la mitad de la antes señalada ó sea $t = 0'05$ metros $+ 0'0005$ D. metros, y para conseguir este grado de precisión se han de medir los ángulos con goniómetro de apreciación real de $1'$, las abscisas cuidadosamente con cinta de acero y las pequeñas ordenadas con otra buena de hilo bien comprobadas, proscribiéndose en absoluto la brújula, cuyas perturbaciones en los pueblos son frecuentísimas é indeterminables, y la plancheta incompatible con la grande escala necesaria en tales planos y de muy difícil manejo en aquellos.

5.ª Los cróquis de los detalles deben hacerse en escala aproximada de $^1/_{500}$ y $^1/_{200}$ para apreciar claramente las mas pequeñas entradas y salientes de las fachadas, indicándose en ellos el número con que se distinga cada casa, el de sus pisos y condiciones características de construcción, ademas del nombre de cada calle ó plaza y de los distritos ó barrios en que la población se divida y

6.ª Finalmente, de los templos y notables edificios públicos se hará la planta baja despues de terminados los detalles exteriores con relación á la línea de fachada en la escala aproximada de $^1/_{100}$.

15 — Levantamiento del plano de terrenos de grande extensión ó de grandes poblaciones.

Como ya hicimos constar en el número 12 al hacer su clasificación, para conseguir con la necesaria exactitud esta clase de planos se han de realizar tres clases de operaciones; son á saber: triangulación, poligonación y parcelación ó determinación de detalles, que ya entonces definimos.

Aunque de la primera nos hemos de ocupar especial y detalladamente en la Tercera parte, no podemos prescindir de consignar ahora que la opinión mas generalizada es que sus vértices disten entre sí de 2000 á 5000 metros y, como las poligonales de primer órden han de tener con tal motivo un considerable desarrollo, se han de realizar con muchas precauciones para anular en lo posible la acumulación de los errores inevitables y, lo que es mas peligroso, las compensaciones fortuitas.

Cierto es que por el procedimiento de Rabbini y el análogo de Rojas los lados de la triangulación se llegan á reducir á 300 metros ó menos, porque en el primero las poligonales se sustituyen por alineaciones rectas y por radiaciones en el segundo; pero este se ha de comprender entre los procedimientos modernos, de que nos ocuparémos en la Segunda parte, y el primero no se ha aceptado por la generalidad de los Topógrafos á causa de las dificultades que ofrece su realización; sin embargo pueden citarse los Catastros del distrito de Linz, en el Rhin,

en que se ordenó fijar un vértice trigonométrico por cada 44 hectáreas y otro poligonométrico por cada 1'20 hectáreas á causa de la minuciosa subdivisión del terreno y en Suiza se previno que los lados de la triangulación de quarto órden tuvieran de 450 á 600 metros y los de las poligonales de 60 á 150 metros. (1)

No hay, ni puede haber, regla fija para la longitud de los lados de los distintos órdenes de la triangulación topográfica, porque las condiciones de los aparatos disponibles y especialmente las del terreno son las que se imponen; sin embargo ya que no sea fácilmente hacedero reducir la distancia á 250 ó 300 metros, en cuyo caso los vértices serían puntos de estación haciendo innecesarias las poligonales, el ideal sería, con la medición directa entiéndase bien, que la distancia entre ellos fuera de 1000 metros, pues pudiendo desarrollarse la poligonal con 3 á 5 estaciones no tendría lugar la acumulación de errores y muy probablemente tampoco las compensaciones fortuítas, que son el mayor peligro á que el Topógrafo se expone, *cuando no utiliza el procedimiento modernísimo de comprobaciones sucesivas.*

Es de advertir que es mas fácil reducir la magnitud de los lados de la triangulación de último órden, cuando esta se hace expresamente con bases especiales procediendo de los menores á los mayores, que cuando, como generalmente se aconseja y se hace, se derivan directamente las triangulaciones topográficas de las geodésicas y si las bases especiales se miden al $^1/_{20000}$, lo cual no es difícil con buenos reglones, y los ángulos con buenos teodolitos repitiendo ó reiterando 4 ó 5 veces y mas segun los casos, en los correspondientes á los triángulos de segundo y primer órden topográfico ó tercero geodésico, no se incurrirá en errores que afecten á la referencia entre unos y otros de una manera sensible y la distribución de los vértices se hará de modo mas conveniente á los trabajos topográficos, porque las poligonales se desarrollarán entre puntos bien determinados y no muy distantes.

Fijados sobre el terreno los vértices de toda la red triangular y calculadas sus coordenadas se completa el plano con la poligonación y parcelación en la forma explicada para los de terrenos de mediana extensión, teniendo en cuenta las siguientes advertencias:

1.ª Se ha de prescindir naturalmente de la poligonal perimetral; pero como al reconocer el terreno para proyectar primero y realizar despues la triangulación se habrá hecho el estudio de las divisiones principales y en ellas comprendido varios vértices, se fijará en el papel con escala suficiente la posición verdadera de estos y con referencia á ellos se hace el cróquis de cada sección, sea el terreno libre, sea de una grande población; de manera que el total quedará dividido en mayor ó menor número de ellas constando en cada polígono parcial los vértices de la triangulación en su interior fijados y los próximos exteriores y

2.ª Con referencia á ellos se determinarán las poligonales principales, que á su vez servirán de base á las secundarias y alineaciones rectas; de manera que el plano general se compondrá del conjunto de los planos de los polígonos especiales relacionados por la red triangular y levantados separadamente como si fueran de terrenos de mediana extensión; pero con lados ó perímetros y puntos de comprobación comunes, que serán principalmente los vértices de la triangulación, con lo cual quedarán todos perfectamente ligados formando un todo homogéneo.

---

(1) Memoria citada de Gattoni. — Nota de la pág. 27.

un lápiz bien afilado la magnitud que se desea trasladar al plano ó conocer; pues con el compás de puntas fijas, que es generalmente el utilizado, se cambia la distancia pinchando el papel para dejar marcado el punto y si se utiliza el de punta de lápiz casi nunca la tienen tan afilada como los largos y sueltos.

No creemos necesario decir mas sobre el uso de estas escalas, que son menos exactas que las de marfil, ebonita, etc., que se encuentran en el comercio y se aplican directamente sobre el plano permitiendo medir mejor las distancias; pero tienen aquellas la ventaja de que, como se encojen ó dilatan á la vez que lo hace el papel del plano, se evita en parte el error consiguiente, á cuyo efecto se deben trazar dos en sentido perpendicular, porque el papel no varía lo mismo en ambos sentidos.

Como la apreciación real no pasa nunca de o'3 milímetros, que con los errores del trasporte y señalamiento de los puntos, bien puede elevarse á o'5 milímetros, se comprende desde luego la poca precisión del graficismo, pues siendo la escala de $^1/_{1000}$ de las mayores utilizadas, ya con ella importa por sí mismo el error de medio metro tanto en cortas como en largas distancias.

La figura 20 es una *escala de trasversales* de $^1/_{5000}$; cada 2 centímetros representan 100 metros y se colocan sucesivamente en la recta A B para tener las centenas; á la izquierda se pone otra A F que se divide en 10 partes representativas de las decenas y como sería imposible dividir

Fig. 20ª

cada una en 10 partes para representar las unidades, se apela al procedimiento geométrico siguiente, que lo permite con alguna precisión y sin confusión.

Sobre la A G, normal á la A B, se toman 10 magnitudes arbitrarias iguales y se trazan paralelas á la A B; se une el punto G al H; en el triángulo H A G las porciones de las paralelas comprendidas entre los lados A G y G H valen, segun un teorema conocido de la Geometría, 1, 2, 3... 10 décimas de H A y como esta es $^1/_{10}$ de A C, ó decena de metros en el caso á que nos referimos, las distintas unidades de la primera decena estarán dadas en las respectivas paralelas, que al efecto se numeran de abajo á arriba; por los demas puntos de división de la A F se trazan paralelas á la oblícua H G y es consiguiente que en cada paralela interceptarán la magnitud de su decena y las unidades correspondientes á la paralela; es decir que si esta es la 8.ª y la inclinada la 5.ª, desde su intersección con la paralela 8.ª á la normal A G habrá una distancia representativa de 58 metros y los decímetros se podrán tambien apreciar teóricamente tomando la distancia, no sobre las paralelas, sino entre ellas á la correspondiente á los decímetros que se fijen.

El uso de estas escalas es sencillo y teóricamente de mucha precisión relativa.

Supongamos que se quiera tomar sobre la escala la distancia de 545'8 metros.

Sobre la normal señalada 500 y entre las paralelas 5.ª y 6.ª á 8 décimas de su distancia de la 5.ª ó 2 décimas de la 6.ª se fija una punta del compás ó el punto señalado en la tira de papel que se quiere utilizar y paralelamente á la A B se toma la distancia que separa aquella normal de la trasversal 4.ª, pues hasta la normal de A se tienen 500 metros y en el resto están contenidos los 45'8, por utilizar la 4.ª oblícua y la imaginaria paralela próxima á la 6.ª; de manera

F; $AF' = 66'0$ metros y $F'F = 62'5$
E; $AE' = 116'2$ » y $E'E = 39'8$

las diferencias $50'2$ y $22'7$ serán los valores de los catetos del triángulo $FE''E$, cuya hipotenusa será

$$FE = \sqrt{50'2^2 + 22'7^2} = 55'092 \text{ metros}$$

Si la medición directa nos hubiera dado 55'24 metros, la diferencia 148 milímetros nos probaría no solo que el error se hallaba dentro de los límites de la tolerancia, sino que podría ser producido, mas que por los cometidos en la medición de las distancias, por los consiguientes á la falta de precisión de la *escuadra* utilizada al bajar sobre el eje las perpendiculares FF' y EE', porque esto bastaría en algunos casos para producir el encontrado.

En efecto: hemos dicho en el número 148 del volumen primero, página 403, que, segun las experiencias realizadas por el profesor Lorber, el *error constante* que se comete con las *escuadras de pínulas* es de 4'5' y el *accidental* de 2'6', que podemos muy bien fijar en total en 7' y en el número 149, página 406, hicimos tambien constar que segun aquellas experiencias tales errores con las *escuadras de espejos* ascendían á 3' y 1'3', cuyo total se puede fijar en 4', errores que generalmente serán mayores en la práctica ordinaria; pues bien; si suponemos que en el punto E' se inclinara la normal errónea en un sentido y en el contrario en F', como esto produciría el efecto de aproximar ó alejar los puntos E' y F' ó disminuir ó aumentar el cateto EE'', por el cálculo se había de conseguir para FE un valor menor ó mayor que el verdadero.

La separación, de su lugar verdadero sobre el eje, de los puntos F' y E', sería, segun el errror mínimo de 4'

para F' $s = \text{Tang. } 4' \times 62 = 0'0011 \times 62 = 0'068$ metros
para E' $s' = \text{Tang. } 4' \times 39'8 = 0'0011 \times 39'8 = 0'044$ »
en total ó disminución ó aumento de $E'F'$ $= 0'112$ »

que haría aumentar el valor de FE en 103 milímetros.

Si, como ordinariamente se hace, solo se aplicara la comprobación sobre el plano gráfico, no sería fácil encontrar ninguna diferencia, porque la hallada, en la escala de $^1/_{500}$ estaría representada por algo menos de o'3 milímetros y entre dos puntos señalados de lápiz es imposible apreciarla, y sin embargo en terrenos de gran valor no debe despreciarse y para evitar tales errores en estos casos se deben tener en cuenta todos los medios de comprobación con la mayor exactitud posible y calcular las superficies numéricamente, á lo que se presta perfectamente el sistema de perpendiculares, aplicado con muchas precauciones, lo cual es solo hacedero, como ya hemos dicho, en terrenos de corta extensión, llanos y limpios de estorbos.

Antes de empezar á construir el plano se deben examinar detalladamente los datos del registro y cróquis, para convencerse del resultado tolerable de las comprobaciones y tomar la media de los de cada distancia y las condiciones de los pequeños detalles, como ancho de muros, zanjas y setos, etc., las condiciones de los vértices del polígono general y los interiores que se hayan dispuesto para determinar los detalles.

Esto hecho, se harán sobre el papel operaciones análogas á las practicadas sobre el terreno para construir el plano; así que si este fuera el representado en la figura 1.ª, sobre una línea indefinida y convenientemente situada en la hoja, lo cual se hará fácilmente con presencia del cróquis y datos del registro, haciendo coincidir con ella una regla graduada segun la escala elegida, se marcarán finamente todas las abscisas cuidando de señalar distintamente las de la izquierda y derecha; con dos escuadras se trazará una paralela al eje AD que pase por debajo de B, es decir á mayor distancia de aquel que la ordenada correspondiente á este y asegurando en ella una regla ó escuadra, con otra bien comprobada se trazan las ordenadas, se toma sobre cada una con la escala la longitud correspondiente, que consta en el registro, y se unen los puntos así determinados.

Utilizando para la parte de perímetro comprendido entre A y G como eje la A G, s
de del mismo modo para sus abscisas y ordenadas y se tienen así fijados todos los vért
polígono; el punto M se señala sobre la G F con la distancia G M y el ancho de la zanja
segun la indicación escrita en el cróquis ó registro, en que tambien se hallarán la direcc
las líneas de confinancia, los nombres de los dueños de los predios, etc.

Si se han medido los lados del polígono, se comprueba con la escala si concuerda la l
tud registrada de las abscisas, ordenadas y lados con las del plano y terminado el dibuja
los detalles se pasa de tinta, escribiendo todos los enunciados necesarios y entre ellos la e
expresada en fracción, $^1/_{600}$ p. e., y despues se limpia haciendo desaparecer todas las línea
construcción (1).

Este es el procedimiento generalmente utilizado; pero consideramos preferible el siguie
cuando la mayor parte de los vértices se han determinado con relación al eje principal.

Sobre el papel se trazan dos paralelas á la distancia conveniente para que entre ellas se pu
dan figurar todas las ordenadas inferiores y que permitan hacer fácilmente la suma y resta
cada una, en el caso de la figura 1.ª á 100 metros segun la escala: la línea superior servirá d
eje principal y la inferior para fijar una regla graduada de manera que la normal del punto A
origen de las abscisas, coincida con el cero de la regla ó mejor en dicho caso con la graduación
de 100; es decir que por este medio se traslada el orígen de las abscisas y ordenadas 100 metros
á la izquierda y debajo de A y del eje utilizado en el levantamiento: fija la regla á la línea infe-
rior se recorre con una escuadra de cateto graduado bien comprobada y colocándola en la gra-
duación 100 de la regla, en la suya análoga se señala con un lápiz bien afilado la situación del
punto A, que se rodea con un circulito y se escribe á su lado esta letra; se mueve la escuadra
sobre la regla y deteniéndola á los 135 metros de su graduación, que suponemos como la de la
escuadra arregladas á la escala del plano, se observa si los 100 metros de la segunda coinciden
con la línea superior, se marca el punto en ella por precaución, pues no es indispensable, y se
señala á la altura de la graduación 172'2 metros el punto G en la misma forma que se hizo con
el A; se corre la escuadra hasta los 148'2 de la regla y marcando sobre el eje un punto se señala
el B frente á la graduación 100 — 47'3 = 52'7 de la escuadra; córrese esta sobre la regla hasta la
graduación 166, se señala el punto sobre el eje, viendo por supuesto si coincide con el 100 me-
tros de la escuadra, y á los 162'5 se marca el punto F y así se continua señalando las abscisas y
marcando con las ordenadas mayores y menores de 100 en la escuadra los vértices del polígono
hasta llegar al D sobre el eje principal.

Los referidos al secundario A G se podrían determinar del mismo modo; pero para evitar
el trazado de líneas bastará aplicar á él la regla de manera que el cero de la escuadra coincida
con A G en todas las posiciones y que en la de A coincida su arista graduada con el cero de la
regla y corriendo aquella sobre esta se detiene en las graduaciones correspondientes á las absci-
sas contadas sobre A G y se marcan los puntos frente á las ordenadas correspondientes leídas
en la escuadra.

Antes de quitar la regla de cada una de las indicadas posiciones conviene comprobar la
abscisa y ordenada con que cada punto se marcó, porque una equivocación, que pasara desaper-
cibida, comprometería el éxito del trabajo; haciéndole dos personas que pueden alternar en la
comprobación, esto es leyendo en el registro y cróquis el que primero manejó la regla y escua-
dra, se evitarán toda clase de equivocaciones y se hará todo en menos tiempo.

En la construcción de los planos gráficos de los numéricos por coordenadas ortogonales, se
utiliza un procedimiento, aunque análogo al explicado, algo diferente, que tambien pudiera em-

(1) Como dirémos al hablar del dibujado de los planos, número 25, en nuestro concepto las que se utilizaron en el levantamiento del plano y las letras, con que se designaron los puntos, se deben pasar de tinta carmín débil, á fin de que, sin perjudicar la visualidad y fácil inteligencia de las condiciones geométricas del terreno, se pueda apreciar en todo tiempo las del procedimiento utilizado, á cuyo efecto se deben tambien conservar los cróquis y registros.

plearse en los levantados por perpendiculares con relación á un solo eje ó á dos perpendiculares entre sí: al ocuparnos de los trabajos de gabinete en los procedimientos modernos le daremos á conocer con todo detalle.

CONSTRUCCIÓN DE LOS PLANOS LEVANTADOS POR EL SISTEMA DE RECORRIMIENTO Ó POLIGONAL COMO PRINCIPAL

18 — Levantados con la plancheta.

Si fuera cierto que, como suponen sus encomiadores, con este aparato se consiguen directamente los planos con mas precisión que construídos en el gabinete, realmente para este no quedaría mas trabajo que pasar de tinta los puntos, líneas y nombres; pero desgraciadamente no sucede así, porque los errores de centración y orientación suelen producirlos notables en el cierre, muy especialmente si las distancias son cortas y se miden con la cinta de hilo ó la cadena una sola vez y solo se utilizan algunas intersecciones de comprobación, como antes se hacía ordinariamente y todavía hacen no pocos Topógrafos inconscientes.

Si las distancias se miden con cinta de acero ó reglones dos veces en sentido contrario y se utiliza el procedimiento recomendable descrito en el número 172 del volumen primero para terrenos de poca extensión en perímetros cerrados ó el descrito en el número 4.° para los perímetros abiertos, como ya se comprueban directamente las distancias y orientaciones corrigiendo los errores notables, los resultados son mas aceptables y poco trabajo quedará para el gabinete, si ha podido desarrollarse todo en una sola hoja; pero si se ha hecho en dos ó mas hay que reunir en una sola el resultado, que cada una de aquellas ofrece, utilizando los puntos comunes, que á lo menos han de ser tres y al hacerlo suelen ponerse en evidencia errores de cierre, que la división en hojas no permitió comprobar en el campo.

En el primer caso es imposible descubrir las verdaderas causas del error observado, porque como puede proceder del cometido en las distancias ó en los ángulos ó en ambas clases á la vez, no teniendo comprobaciones de cada elemento, no puede averiguarse la causa ó causas del error final, ni mucho menos repartirse de una manera racional.

Alguna idea pueden dar las intersecciones en puntos determinados; pero si indican la causa algunas veces, no la justifican y muchas otras la buena intersección aparente de tres visuales es debida á compensaciones fortuítas, que inducen á desechar visuales, que señalan con mas justicia la posición verdadera del punto, que se había elegido para comprobación.

En planos de tales condiciones, si el error de cierre excede de los límites de la tolerancia no queda otro recurso que repetir el levantamiento, si bien puede reducirse á la poligonal perimetral y trasversales principales, si se hubieren determinado ó en otro caso haciéndolas expresamente para que sirvan de comprobación y eligiendo al mismo efecto un número conveniente de puntos determinables por intersección.

De los detalles solo se determinarán aquellos en que la magnitud de los lados de las poligonales resulte muy diferente de la antes conseguida; pues los demas se pueden copiar mas cómodamente en casa del plano primero.

Con este segundo trabajo se comprueban las distancias y los ángulos; pero puede comprenderse la molestia y gasto que esto ocasiona y las pocas veces que así se hará, admitiéndose componendas impropias de un Topógrafo formal, porque si es muy sencillo aconsejar la repetición de un trabajo en el campo, es penosísimo realizarle.

Si se han dirigido muchas visuales de comprobación á puntos bien elegidos, su examen detenido puede ayudar bastante á descubrir los mayores errores y el mismo resultado se consigue mediante las poligonales trasversales; pero algunas veces tambien motivan juicios equivocados que inducen á modificar improcedentemente la situación de los vértices.

En la corrección de este, como de toda clase de graficismos, pueden utilizarse para la investigación de los errores los tres principios siguientes:

1.° *Todo error en la magnitud de un lado de una poligonal, que no se separe mucho de la dirección rectilínea, produce otro al final de ella en el mismo sentido y de la misma importancia.—Si el error se comete en un lado que se separa de la dirección determinada por los dos extremos de la poligonal, la* RECTA ERROR DE CIERRE *le será paralela y de igual longitud que el error cometido en aquel lado.*

La primera parte de este principio se comprende fácilmente sin mas explicación; la segunda la pone en evidencia la figura 21.

En efecto: si suponemos bien medidos y trasportados ó bien trazados con la plancheta todos los ángulos y exacta la magnitud de los lados á excepción del BC, en que en la medición ó

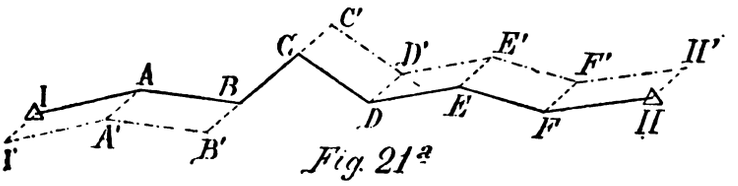


Fig. 21ª

trasportación se ha cometido el notable error CC', es notorio que la parte de poligonal C'D'E'F'II' resultará paralela á la verdadera CDEFII y la *recta error de cierre* II II' paralela al lado equivocado BC y de igual longitud al error CC'.

Si se repitiera la construcción empezándola por el vértice II, en el I se encontraría la *recta error de cierre* II' tambien paralela al lado BC é igual á CC'=BB'.

2.° *Todo error en un ángulo de una poligonal de la clase antedicha produce otro al final de ella equivalente al seno del error angular en el radio de la distancia del vértice, donde se cometió, al extremo de aquella y si se repite la construcción en sentido contrario á partir del punto final, las dos se interceptan en el vértice del ángulo erróneo.*

Este principio se pone en evidencia con la figura 22, en que se suponen bien medidos y trasportados ó trazados en la plancheta los lados y los ángulos excepto el ABC, que se ha convertido en ABC' llegando con la construcción al punto II' en lugar de hacerlo á II.

Repitiendo la construcción á partir de II se consigue la poligonal IIDCBA'I', que corta á la antes construída en el vértice B del ángulo erróneo.

3.° *Si el error de cierre dependiera del que se hubiera cometido en un ángulo y un lado, las dos construcciones de la poligonal no se cortarian en el vértice del ángulo equivocado, pero, generalmente, la recta que le uniera al extremo del lado secante indicaría el equivocado por serle paralelo é igual proximamente al error en él padecido, cuando el error fuera positivo y en caso contrario no se cortarían muchas veces.*

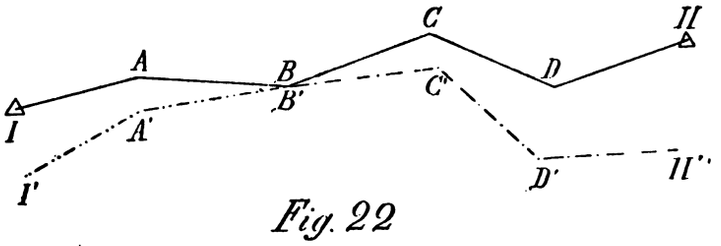


Fig. 22

Este tercer principio que, aunque corolario de los dos precedentes, no ofrece resultados tan seguros por las consecuencias de sus distintas combinaciones, se justificaría haciendo las construcciones con distintos supuestos; pero no lo consideramos necesario, porque su verdadero valor consiste en demostrar, que no es un solo dato el equivocado induciendo á la repetición del trabajo de campo en mayor ó menor número de estaciones.

Si los errores angulares ó en las distancias son varios ó si se trata de una poligonal en perímetro cerrado, aunque se pueden utilizar los mismos principios de investigación y las condiciones de las visuales de comprobación en las dos construcciones, lo que produce grandísima

confusión y mucho trabajo, rara vez dará buen resultado, porque á las compensaciones fortuítas y crasos errores del graficismo en el campo y de construcción de los polígonos con sus ángulos, se unen los propios del graficismo en el gabinete, que imposibilitan determinar con alguna confianza la verdadera situación de los vértices no obstante las muchas molestias y disgustos, que en el campo y en el gabinete motivan tantas construcciones, dudas y vacilaciones; por esto debe en absoluto desacharse tal manera de operar.

En el segundo caso, cuando se miden las distancias directa ó indirectamente dos veces y se utilizan los procedimientos aconsejados, los resultados son bien diferentes; pues las comprobaciones á que se prestan, especialmente el descrito para los perímetros cerrados en terrenos de no mucha extensión, ya permiten corregir sucesivamente en el campo hasta los errores propios de la orientación de los pequeños lados y el error de cierre resultante, que no será grande, se puede distribuir por *repartición paralela* y *proporcional al número de lados* de todo el perímetro, si la incertidumbre fuera igual para todos, ó de la parte de la poligonal en que el examen de los datos la indicara, si en el resto no la hubiera por quedar perfectamente justificada la posición de sus vértices con las comprobaciones realizadas.

A tal efecto se unirá el punto de llegada con el de partida en los perímetros cerrados ó al de posición conocida, en que debería terminar, en los perímetros abiertos y por todos los vértices modificables se trazarán paralelas á aquella recta tomando sobre ellas, en la dirección de la *recta error de cierre*, $\frac{e}{n}$; $2\,\frac{e}{n}$; $3\,\frac{e}{n}$ ... sucesivamente á partir del primer vértice modificable, con lo cual desaparecerá el error de cierre; pero, como con ello se cambía algo la posición de los vértices, se ha de examinar si las visuales de comprobación trazadas desde los nuevos vértices con la inclinación oportuna con los nuevos lados, pasan por los puntos elegidos para la comprobación por intersecciones.

Hemos supuesto que el error de cierre despues de anulado el efecto de las equivocaciones sea tolerable; esto es, inferior al que resulta de la fórmula

$$t = 0'00025\ N + 0'05\ \sqrt{D} \quad (1)$$

admitida por las Instrucciones italianas para la parcelación del nuevo Catastro, segun digimos oportunamente (número 10); pues si resultara intolerable, habría que repetir los trabajos de campo en todo ó en parte hasta conseguir la tolerancia empezando por los ángulos, que exigen menos trabajo.

Las indicaciones precedentes demuestran, que lejos de ser nulos los trabajos de gabinete, cuando los planos se levantan con la plancheta, son por el contrario enojosísimos ordinariamente y, lo que es peor, molestan en gran manera al operador con las muchas dudas y vacilaciones á que dan lugar.

---

(1) Con la escala de $^1/_{1000}$ en un polígano de 10 lados y 500 metros de perímetro resultará:

$$t = 0'25 + 0'05\ \sqrt{500} = 0'25^m + 1'115^m = 1'365\ m.$$

que en la escala referida estará representada por 1'36 mm. muy superior al error gráfico admisible señalado en la página 422 del volúmen segundo de la excelente Topografía de Prévot y Roux, recientemente publicada que le reducen á 0'5 mm. aun para polígonos de 20 lados y perímetro de igual longitud desarrollada.

Teniendo en cuenta los errores inevitables del graficismo en el campo y los consiguientes á la desorientación de la plancheta con tan pequeños lados, solo admitiendo compensaciones fortuítas se puede llegar á tales resultados y operando con mucha delicadeza al indicado por la tolerancia señalada en las Instrucciones italianas, siendo digno de tenerse en cuenta que estas no admiten el uso de la plancheta mas que en la determinación de los detalles ó parcelación con referencia á poligonaciones realizadas con excelentes taquímetros ó teodolitos midiendo dos veces las distancias y calculando las coordenadas de sus vértices; es por consiguiente ilusoria la tolerancia gráfica de 0'5 mm. con la plancheta en el caso indicado, como lo es tambien la allí fijada de 1 mm. para polígonos hasta de 15 lados y de un kilómetro de desarrollo para los demás graficismos, porque los errores de la trasportación de los ángulos y las distancias implica otros mayores á no ocurrir compensaciones fortuítas, que tanto enga-

19 — Levantados con la brújula.

Como la construcción de estos gráficos se realiza ordinariamente por rumbo y distancia, aunque ya en el número 66 del volumen primero, dimos á conocer algunos tipos de trasportadores para la ilustración necesaria á la mejor inteligencia de las explicaciones sucesivas, conviene que ahora indiquemos las condiciones generales y el manejo de los mas utilizados en esta clase de construcciones.

Se han utilizado y se utilizan todavía de metal sin alidada y de papel, llenos y huecos; pero los mas generalizados son de cuerno ó talco, semicirculares ó de círculo completo, de 10 á 24 centímetros de diámetro (1), divididos en grados y medios grados, generalmente sexagesimales como los limbos de las brújulas antiguas, con sus decenas numeradas, ya en el sentido de N. á E., S. y O. ó en el contrario para estar en consonancia con el sentido en que aumentan los rumbos determinados por aquellas, pues que unas los dan en un sentido y otras en el contrario.

Aunque algunos Autores consideran como dirección normal para el crecimiento de los rumbos la de N. á O., S. y E., persistimos en la idea contraria por las razones que dejamos indicadas (número 8, página 28 del volumen primero).

En los semicirculares, como en la figura 23, hay dos numeraciones, una de 0° á 180° y otra interior de 180° á 360°, cuyo objeto es, como enseguida verémos, poder con ellos trazar todos los rumbos sin fatigar la memoria.

Antes, los de esta clase, llamados *complementarios*, tenian ademas otras dos numeraciones

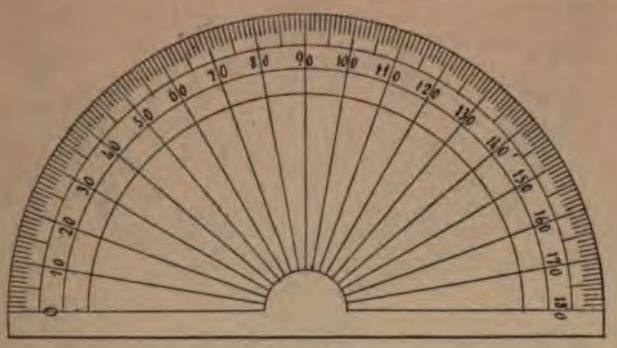


Fig. 23

interiores, que indicaban los arrumbamientos con la perpendicular, á lo cual algunos Autores suponían grande importancia, pero, como realmente no hacen mas que complicar el aparato inútilmente, há tiempo que no se usan.

En los de círculo completo hay tambien dos numeraciones, de 0° á 360°, que van en sentido contrario, para que se puedan utilizar con toda clase de brújulas, como se indica en la figura 24.

Sobre el *manejo* de estos trasportadores solo conviene consignar:

1.° Que para trasportar muchos rumbos con el de *círculo entero*, se debe sujetar con chinchetas centrándole con una meridiana y su perpendicular en punto del papel no distante mas de 40 centímetros de los en que hayan de encontrarse las estaciones de donde hayan de partir las rectas de tales rumbos y señalándose estos con la graduación correspondiente del trasportador con una pequeña raya delgada y la designación de la estación y del punto visado, por ejemplo C-r, despues de marcados todos los que convenga fijar en una posición del trasportador, que pueden ser hasta 40 ó 50, se levanta aquel y con las escuadras se traslada cada rumbo á su lugar oportuno, con cuyo procedimiento se evita la molestia y los errores de trazar en cada es-

(1) El precio de los semi-circulares es 1, 1'25, 1'50 y 2'50 pesetas los de diámetro respectivamente de 12, 15, 18 y 22 centímetros.

El de los de círculo entero de 5'50, 11 y 13'50 pesetas los de diámetro respectivamente de 16, 20 y 24 centímetros.

tación la meridiana y su perpendicular y tener que centrar en cada una el trasportador, que, como no se puede fijar y sí solo sujetar con la mano, muchas veces se mueve al buscar y marcar el rumbo produciendo errores que pasan inadvertidos; con tres ó cuatro posiciones bien distribuídas sobre el papel se trasportan fácilmente todos los rumbos de un plano regular.

Segun que la graduación del limbo de la brújula dé los rumbos en el sentido de N. á E. en el contrario, se utilizará una ú otra numeración del trasportador, *teniendo presente que en las* BRÚJULAS DE LIMBO FIJO *los rumbos aumentan en sentido contrario á la numeración de aquellos y el mismo sentido en las de limbo móvil.*

2.° Para medir el rumbo correspondiente á muchas líneas y direcciones entre puntos un plano, se trasladan paralelamente á sí mismas hasta la intersección de una meridiana y perpendicular trazadas préviamente en punto céntrico á todas aquellas y no distante de el

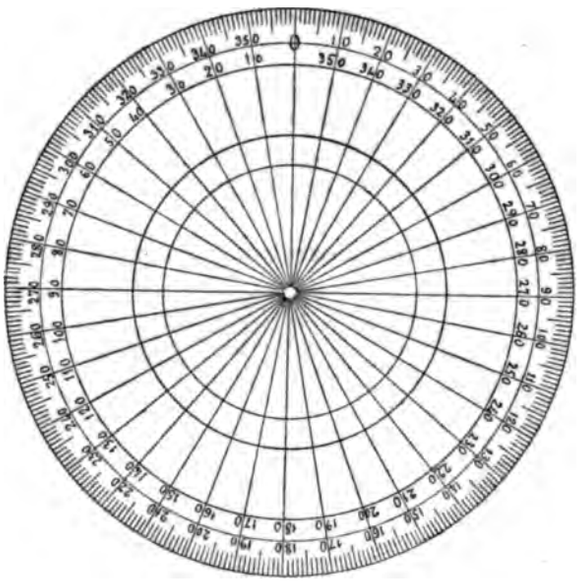


Fig. 24

mas de 30 á 40 centímetros, designándose las porciones de rectas que señalan tales direcciones en aquel punto, con la letra, número ó nombre de los puntos de cada recta ó dirección, se centra y asegura el trasportador con aquella meridiana y su perpendicular y se dicta para cada designación el rumbo marcado en la graduación del trasportador, á cuyo efecto aquellas porciones de rectas se han de trazar á tal distancia de la intersección de la meridiana y su perpendicular que comprendan claramente la magnitud del radio del trasportador, para que al fijar este se perciba la graduación correspondiente á cada una.

La apreciación de los rumbos en uno y otro caso no pasa de $^1/_4$ á $^1/_6$ de grado con error probable de 5′ en los trasportadores de 20 á 24 centímetros de diámetro operando con diligencia y buena vista, y como segun digimos en el número 66, página 175 del volumen primero, con los mas perfeccionados trasportadores de metal y alidada con nónius la verdadera apreciación gráfica no pasa de 5′, resulta que en caso de utilizarse trasportador en la construcción de los planos, lo que no debe hacerse en los de precisión (1), es inútil emplear los caros y de complicado manejo de metal con alidada y nónius de apreciación de 1′, porque con ellos apenas se consiguen mejores resultados que con los sencillos de cuerno ó cartulina ó á lo sumo se podrán utilizar los mas sencillos de aquellos, como el representado en la figura 25, que tiene diámetro

(1) La Instrucción IV, párrafo 4, dictada en Italia para la construcción de los planos del nuevo Catastro, prohibe el uso de los trasportadores, aunque esten provistos de nónius, para la de las poligonales, cuyos vértices se situan con el coordinatógrafo mediante sus coordenadas planimétricas, lo cual es mucho mas exacto.

de 24 centímetros, con alidada giratoria, en el interior provista de un sencillo nónius con apreciación verdadera de 5' ó de 10', segun se pida, y de una escala para fijar los puntos por el sistema de radiación, cuyo aparato se fija en la posición conveniente con contrapesos, todo lo que permite operar con rapidez y seguridad en toda clase de construcciones (1).

3.° Para trasportar ó medir un rumbo determinado se trazarán en la estación ó en un punto cualquiera de la recta que le fija, la meridiana y su perpendicular, se centrará con ellas el trasportador y se señalará con la graduación correspondiente la recta ó con aquella se medirá el rumbo de la que en el plano conste.

Con el *trasportador de semi-círculo* se procederá de una manera análoga; pero, como no comprende mas que la graduación de una semi-circunferencia, para los rumbos mayores de

Fig. 25

180° hay que tener en cuenta la prolongación de las rectas de los rumbos, que se quieran trazar ó medir, como ya se dijo, número 66 del volumen primero, para el de igual clase de cartulina centesimal, ó se ha de colocar á distinto lado de la meridiana invertido el diámetro 0°—180°, esto es, el 0° hácia el S. y contar la graduación de los rumbos con la numeración interior; y como todo esto produce molestias, que se evitan con el trasportador de círculo entero, es por esto preferible al semi-circular.

Con este, aunque tenga la numeración creciente en el sentido N. á E., se pueden trazar y medir los rumbos que aumenten en el de N. á O. con solo disponerle de manera que la meridiana señale la graduación del rumbo y se marque este con el 0°, con la parte del N. hasta 180° y con la parte de meridiana del S. desde 180° á 360°; en estos casos el trasportador toma las posiciones correspondientes del limbo de la brújula, con cuya graduación concuerda; pero procediendo así se ha de hacer girar el trasportador alrededor del centro y esto motiva errores y molestias, que se evitan con el trasportador fijo, por lo cual es preferible.

Expuestos estos preliminares necesarios pasemos á explicar la construcción de los planos levantados con la brújula, objeto especial de este número.

Hemos de suponer en primer lugar que en los trabajos de campo se hayan tomado las precauciones aconsejadas en el número 4 en los polígonos cerrados y en los perímetros abiertos relativamente á las observaciones angulares y que las distancias se hayan medido dos veces en sentido contrario al menos con la cinta de acero, como es indispensable para conseguir planos aceptables con alguna seguridad.

Tambien en ellos se habrá cuidado que la diferencia entre las dos medidas de cada lado no exceda de la tolerancia señalada para las poligonales en el número 10 ó al menos la de

$$t = 0'2 + 0'002\ d$$

dupla de la propuesta por Porro para los planos de precisión y que la correspondiente entre el rumbo directo y el inverso de cada lado no pase de 30' (lo que supone la apreciación del rum-

(1) Construído por Salmoiraghi se vende con estuche de madera y cuero en casa de Biosca y Compañía (en Barcelona) á 60 pesetas.

bo con error medio de 10' á lo mas) de conformidad con lo expuesto en los números 156 del volumen primero y 8 de este.

Como última comprobación de los trabajos de campo ó primera de los de gabinete se debe hacer separadamente la suma de todos los rumbos directos y la de los inversos, hallar su diferencia y dividirla por 180° observando si el resto que quedase excede ó no llega á $30' \sqrt{n}$, siendo n el número de lados de la polígonal cerrada ó abierta: en el primer caso habrá que buscar la causa del error no tolerable, que debe ser consiguiente á alguna equivocación, si las comprobaciones precedentes dieron buen resultado; en el segundo caso se podrá distribuir la diferencia por partes iguales entre todos los rumbos.

Esto, con menos molestia, equivale á calcular los ángulos interiores del polígono y comparar su suma con tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos, lo que podría hacerse tambien por el procedimiento explicado en el número 4.

Con los rumbos así corregidos y tomando para longitud de los lados la media de las dos mediciones, se construye el plano de la manera siguiente:

Si el polígono es cerrado y segun la magnitud de la escala se presume que no habrá dificultad en comprenderle en la hoja del papel, se traza en el centro de esta una recta de abajo á arriba paralela á sus márgenes laterales ó que forme con ellos un ángulo hacia el O., ó á la izquierda, igual al de la declinación de la aguja, cuando sea conocida y la brújula no estuviese ya declinada, al objeto de que muy aproximadamente pueda considerarse orientado geográficamente el plano, cuando el márgen lateral de la hoja se ponga en dirección N. S. en el segundo caso, y orientado con la meridiana magnética en el primero, aun que tambien lo quedaría con la geográfica, si, como es conveniente la brújula estuviere declinada.

En el centro de tal recta se traza con todo cuidado otra que la sea perpendicular y con ellas mediante buenas y grandes escuadras se trazan las meridianas y sus respectivas perpendiculares en los puntos convenientes para señalar los rumbos y desde allí correrlos á las estaciones de donde deben partir, á cuyo efecto se procede como queda dicho al principio de este número.

Esto hecho se elige el punto de partida de manera que todo el plano pueda caber en la hoja en buena posición; con el rumbo y la distancia se determina el primer lado designando el segundo vértice, del mismo modo se marca el segundo lado y cuidando de examinar las intersecciones y demás comprobaciones, se continúa hasta trazar el último lado, que debe naturalmente pasar por el primer vértice con una distancia igual á la que resulta de sus dos mediciones.

Con las comprobaciones aconsejadas en el número 4 relativamente al polígono cerrado representado en la figura 9.ª, es casi seguro que se conseguirá el cierre en buenas condiciones gráficas, porque las pequeñas diferencias que se observaren en las comprobaciones, con ellas se corregirían desde luego.

De todos modos, en caso necesario, se podría construir el polígono en sentido inverso y tener en cuenta en la investigación de los errores ó equivocaciones involuntarias las reglas establecidas en el número anterior y con seguridad se encontrarán pronto.

El error de cierre tolerable que al fin se hallare, se distribuirá por *repartición paralela* como se ha dicho relativamente á los planos levantados con la plancheta; pero no debe olvidarse que *en él influye un error sistemático en la medida de las distancias, ni tampoco el general de orientación en los polígonos cerrados,* equivaliendo el primero á una modificación de la escala, que, si no se advierte y tiene en cuenta, influirá en el cálculo de la superficie y el segundo á un giro mayor ó menor de todo el plano.

En las *poligonales abiertas* desarrolladas entre puntos préviamente determinados, tales errores ya influirán en el cierre como los accidentales de la misma clase: pero se anularán casi en su totalidad con la repartición proporcional á la longitud de los lados, mientras que no sucede lo mismo con los accidentales, que pueden compensarse engañando al operador con un cierre aparentemente de excelentes condiciones, que no se comprueban con las intersecciones y poligonales de segundo y tercer órden.

Si se tratara de construir una poligonal abierta, pero limitada entre puntos préviamente determinados, como la representada en la figura 10, (número 4) se empezaría por situar tales puntos con sus coordenadas, lo cual es sencillísimo, pues marcado el de partida, (A) se trazaría en él la meridiana geográfica y su perpendicular, sobre esta se tomaría con la escala una longitud igual á la diferencia de las abscisas (Δ x) y en la meridiana, que se trazara en este punto, se tomaría por encima ó por debajo, segun que fuera positiva ó negativa la diferencia de las ordenadas (Δ y), una magnitud igual á ella, con lo que quedaría determinado el punto término de la poligonal, (M), la que se construiría en la misma forma que el perímetro de la figura 9.ª, cuidando de observar el resultado de todas las comprobaciones recomendadas para los trabajos de campo en el número 4.

Si, como desgraciadamente se hace muchas veces, *las distancias se miden una sola vez con cadena ó cinta de hilo*, faltando su comprobación directa y siendo de temer mayores errores parciales, no es posible esperar que los de cierre se encuentren entre los límites de la tolerancia señalada y habrá que ensancharlos y utilizar las *reglas aconsejadas para la investigación en el número 18 teniendo, en este y en el caso anterior, presente que la segunda se ha de modificar de conformidad con lo dicho en el número 156, del volúmen primero, pues, en la construcción por los rumbos, el error cometido en uno de ellos se limita al seno del ángulo del error en el radio del lado correspondiente.*

Con tales condiciones es muy difícil la repartición racional de los errores, por otra parte mayores que en el caso anterior y hay necesidad de dar mas importancia á las comprobaciones por intersección admitiendo componendas impropias de un Topógrafo concienzudo; y como por otra parte, de medir dos veces las distancias con reglón ó con cinta de acero, resultan muy caros los trabajos de campo sin conseguir grande precisión, las brújulas no se admiten en los buenos trabajos catastrales.

Las modernas con buenos anteojos distanciómetros pueden sin embargo utilizarse en trabajos particulares de menos precisión.

Tambien pueden construirse tales planos con las coordenadas planimétricas de los vértices de las poligonales; pero, como es poco utilizado este medio con los antiguos procedimientos y aparatos y le explicarémos detalladamente al ocuparnos de los trabajos de gabinete correspondientes á los modernos, nada aquí dirémos de ello.

Terminada la construcción de la poligonal perimetral y las de primer órden se procede á realizar las de segundo con las mismas precauciones, porque debe tenerse presente, que si con ellas se consiguen nuevas comprobaciones tambien dudas y vacilaciones, si en el campo ó en su construcción en ellas se cometieren errores ó equivocaciones.

Finalmente: si los puntos de detalle se hubieran determinado por radiación desde las estaciones, se fijará su posición por rumbo y distancia en la misma forma que los lados de las poligonales, á cuyo efecto se trasportarán los rumbos al mismo tiempo que los de estas y si se hubieran determinado por perpendiculares á sus lados ó por medición, así tambien se hará su construcción gráfica uniéndose los puntos marcados con presencia de los cróquis.

20 — Levantados con la pantómetra ó el teodolito.

Para evitar los graves errores en la construcción de las poligonales cuando se utilizan los ángulos que entre sí forman los lados consecutivos, como ya digimos en el número 156 del volúmen primero, aunque se hayan medido en el terreno y no los rumbos de los lados conservando la orientación con el limbo, para evitar aquellos errores conviene de tales ángulos deducir los rumbos aplicando la regla explicada en el número 4 y mucho mas tener esto en cuenta en los trabajos de campo para obtener inmediata comprobación con los rumbos directos é inversos de la brújula, de que tales aparatos están casi siempre provistos y con mas precisión en los inversos de las visuales de comprobación, pues en ellas no intervienen las variaciones de la aguja imanada.

Procediendo así, esto es, llegando á conseguir los rumbos con seguridad y precisión, ya conviene medir directa ó indirectamente dos veces las distancias y calcular las coordenadas de los vértices construyendo el plano por su medio; pero no dirémos nada aquí de ello, aplazándolo para cuando en la *segunda parte* nos ocupémos de los trabajos de gabinete con los procedimientos modernos.

Si se construyera el plano por rumbo y distancia, se procedería enteramente como dejamos explicado para los levantados con la brújula sin otra diferencia que las comprobaciones serían mas precisas y seguras y mas fidedignos los resultados, especialmente si se utilizaran trasportadores del mayor diámetro, como el hueco que acompaña á nuestro Círculo logaritmico, en que sencillamente se aprecia todo lo que en el graficismo se puede utilizar, que, como ya digimos, no pasa de 5'.

CONSTRUCCIÓN EN LOS PLANOS LEVANTADOS POR EL MÉTODO DE INTERSECCIÓN COMO PRINCIPAL

21 — Como quiera que los métodos de medición y radiación solo se utilizan en la determinación de pequeños detalles cuando se miden las distancias directamente, porque de otra manera resultarían los planos onerosísimos y no de mayor precisión y aun cuando se utiliza la medición indirecta tienen análoga aplicación, si bien el segundo en grande escala, como verémos al ocuparnos de los procedimientos modernos, creemos oportuno prescindir aquí de ellos, porque solo podemos referirnos á lo principal de los trabajos de gabinete, siendo lo demas tan fácil de realizar, que no exige explicación alguna.

22 — Levantados con la plancheta.

Si al hacerlo se cumplen las condiciones indicadas en el número 5; figura 11, cuidando de orientar bien la plancheta en las seis estaciones allí supuestas, lo cual no es difícil de realizar con toda la precisión que permite el graficismo por la longitud de las líneas de las bases y de las visuales dirigidas desde la primera, para orientar en la segunda, de trazar con esmero las líneas de las visuales y de hacer las comprobaciones allí indicadas, es indudable que el plano trazado en la plancheta no exigirá mas que pequeñas correcciones al ser pasado de tinta, demostrando que, *dentro de los límites de precisión del graficismo en el campo*, la plancheta es apropiada al sistema de intersecciones.

Cuando, como allí tambien supusimos, no fuera posible medir la segunda base BF, ni hacer estación en sus extremos, ni en el punto intermedio O', pero que desde los D y E indeterminados se vieran los vértices C, B y F, podría resolverse la dificultad por intersección inversa, gráfica ó numéricamente.

Por el momento nos concretarémos á consignar la resolución gráfica del llamado problema de la *carta* aplazando para despues la explicación y manejo del *trasportador de dos alidadas* ó *Stations pointer*, que resuelve el mismo problema cuando se mide el valor de los ángulos y para la *parte tercera*, en que encontrará más oportuna aplicación la solución numérica ó de Pothenot.

Para la gráfica con la plancheta se procede de la manera siguiente:

Puesta horizontal en el punto D (figura 11) se coloca sobre su tablero un papel de calco bien estirado y asegurado; se clava el alfiler en el punto D, sobre la vertical de D y con la alidada á él aplicada se trazan las visuales D,C, D,B y D,F formando los ángulos C D, B y B D, F; se levanta la alidada y el papel de calco que se coloca sobre el plano de manera que al propio tiempo pasen las líneas D,C, D,B y D,F en aquel trazadas por los puntos C, B y F marcados en el plano y entonces se calca sobre él la posición del punto D, del papel de calco, con lo cual queda determinada la del vértice D; lo mismo se hace estacionando en E para fijar su posición en el plano.

Para determinar sobre este la posición de dichos puntos D y E por los *arcos capaces* se construiría sobre las rectas B C y B F respectivamente los arcos capaces de los ángulos C D B y

vez situados estos en el plano se construirán los detalles con la escala por los mismos procedimientos geométricos que entonces se utilizaron.

Con la magnitud de la base y los rumbos podría calcularse en cada triángulo la longitud de los lados y de las trazas de los planos visuales; con ellos y los rumbos las abscisas y ordenadas facilitando la comprobación numérica de la posición de cada punto y permitiendo construir el plano con mayor sencillez y seguridad; pero como la poca precisión con que los rumbos se miden inducirían á admitir amplias tolerancias y no quedarían compensados con los resultados el tiempo y las molestias, que tales trabajos exigirían, no se utiliza este procedimiento.

24 — Levantados con las pantómetras ó los teodolitos.

Como quiera que con el sistema de intersecciones no ofrecen los rumbos las ventajas demostradas (número 156 del volúmen primero) para el de recorrimiento ó poligonal, si bien es siempre conveniente orientar la base ó bases con relación á la meridiana, es generalmente mas útil medir los ángulos, que los diferentes planos visuales que pasan por cada punto de estación y los visados forman con la base, porque esto permite calcular directamente la magnitud de los lados de los triángulos formados en cada punto determinado por intersección y con ella y el rumbo, que se calcula fácilmente, hallar las coordenadas planimétricas con repetición comprobando la posición de cada uno de ellos y facilitando la construcción del plano.

En este caso ya es aceptable este procedimiento, porque los aparatos utilizados permiten medir los ángulos con 1′ ó 2′ de error y así se consigue el plano numérico mucho mas exacto que el simplemente gráfico y se puede tener el gráfico correspondiente á aquel con mas precisión y sencillez por las coordenadas que con el trasportador.

Rara vez se utilizaba este procedimiento con los antiguos, porque solo se aspiraba á conseguir la precisión propia del graficismo; pero como, desde que se han generalizado los planos numéricos exigiendo mayor precisión y comprobaciones, puede ser conveniente su aplicación, vamos á indicar cómo se haría para uno de los puntos de la figura 11.

En los trabajos de campo se han medido los tres ángulos del triángulo A B O y el lado A O; se pueden desde luego comprobar y corregir aquellos, cuya suma ha de ser igual á dos rectos, y calcular despues por la fórmula trigonométrica

$$\frac{\text{Sen. A}}{a} = \frac{\text{Sen. B}}{b} = \frac{\text{Sen. C}}{c}$$

del caso primero de los triángulos oblicuángulos (número 9 del volúmen primero) la magnitud de los lados A B y O B.

En el triángulo O H B con los datos análogos y la misma fórmula se calcula la longitud de los lados O B y H B obteniendo una excelente comprobación comparando los dos valores obtenidos para O B.

Utilizando los datos del triángulo A H B se podría conseguir el mismo resultado con los dos valores de A B y en caso de duda pueden utilizarse las dos comprobaciones si fuese necesario fijar la posición del punto B con mucha precisión.

Del rumbo de la base y del ángulo B A O se deduce directamente el rumbo de A B y con la longitud de este lado y el valor de aquel se calculan las coordenadas del punto B con relación al origen A por las fórmulas

$$x = D \text{ sen. } \theta \quad ; \quad y = D \cos. \theta$$

en que D es la distancia A B y θ el rumbo ó azimut de la misma recta.

Con las distancias A O y A H y el rumbo de la base se consiguen las coordenadas de O y H y deduciendo los rumbos de O B y H B, con las magnitudes de estas por las mismas fórmulas se deducen las coordenadas de B con relación á O y á H y por suma aljébrica respectivamente con

se encuentren á la distancia de o'5 á 1 milímetro para que se vea bien que la línea pasa exactamente por los puntos que determinan su posición.

Con referencia á las líneas así determinadas se fijan los puntos de detalle en la forma ordinaria.

DIBUJADO DE LOS PLANOS

25 — No ha de confundirse el que al Topógrafo corresponde con el mas artístico del dibujante y si bien el primero debe conocer las condiciones de este y aun tener aptitud para realizarle por sí, no es propio de este libro detallar las reglas y convenciones admitidas para conseguir la representación de los accidentes del terreno de una manera agradable á la vista, aunque sin separarse, en lo posible, de sus condiciones geométricas y sí solo indicar las necesarias para representar de una manera conveniente su proyección horizontal, que es lo que el Topógrafo se propone.

Por otra parte el órden establecido nos impide tratar ahora de cuanto al relieve del terreno se refiere y tambien hemos de prescindir de consignar los signos convencionales admitidos para los planos ó mapas de grandes extensiones, en los que no pudiendo figurar en sus dimensiones verdaderas, segun la escala, muchos objetos notables se han de indicar con signos especiales, porque sería improcedente que en los planos de grande escala, de que nos hemos ocupado, los utilizáramos, cuando se puede de tales objetos dar idea mas precisa con la proyección horizontal y por claros y breves enunciados expresar su clase en caso necesario.

Esto, que nos impide copiar los signos convencionales admitidos por el Instituto Geográfico y Estadístico y los ordenados por el Depósito de la Guerra, que en la Topografía del Teniente Coronel D. Lorenzo Gallego y Carranza (1887) constan acertadamente comparados, nos induce á consignar algunos preceptos y modelos de los prevenidos por la Instrucción IV de las dictadas en 15 de Abril de 1889 para la renovación del Catastro italiano, que se acomodan mejor á nuestro actual objeto, si bien nos ajustarémos en caso de discordancia á las condiciones señaladas por aquellos, en cuanto nos sea posible.

Antes empero debemos tratar de dos cuestiones previas:

1.ª *¿Se debe cuadricular el papel de los planos en limpio?*

2.ª *¿En ellos han de figurar las líneas de base y las letras ó números con que se designaron los puntos en el levantamiento y constan en los cróquis y registros?*

En cuanto á la *primera*, debemos hacer constar: que siendo siempre erróneas las cuadrículas mecánicas del papel de esta clase, que se encuentran en el comercio (1), á causa de los diferentes grados de humedad á que se les sujeta en su fabricación, no resultando esta clase de papel bastante resistente y siendo necesario poder conocer en cualquier época las variaciones que el plano experimenta por el grado de humedad á que ha estado ó está expuesto, es muy conveniente hacer en ellos una cuadrícula exacta con lados de un decímetro ó mejor de un número exacto de decenas ó centenas, segun la escala, utilizando líneas de o'1 milímetro y tinta negra ó carmín pálido; á fin de que cumplan su objeto sin perjudicar el dibujo y al mismo objeto se puede limitar la cuadrícula á los vértices de los cuadrados determinados por la intersección de líneas de dos centímetros, como ya se hace en los buenos planos catastrales.

Estas cuadrículas no solo sirven para comprobar en cualquier momento las variaciones que el papel experimenta y consiguientemente las verdaderas dimensiones del plano mejor que con las dos escalas aconsejadas por algunos Topógrafos, porque los medios de calcularlo se obtienen en el mismo punto del plano, si no que permiten determinar gráficamente las coordenadas planimétricas de sus puntos con relación á otro notable de ellos tomado por orígen, á cuyo

(1) El mejor que hemos utilizado en nuestra larga práctica fué uno de C. Chleicher y Schüll, de Düren, Prusia, en que la cuadrícula era perceptible con dificultad perjudicando no poco á la vista; pero ni aun así dejaba de presentar alguna diferencia en uno de los sentidos de las líneas.—Los ordinarios del comercio no solo tienen la cuadrícula muy defectuosa, si no que el papel es estoposo y varían las dimensiones de los cuadrados con la humedad del aire y se rompe con suma facilidad, por lo cual no debe utilizarse.

efecto conviene, al construir el plano, hacer que aquel punto se encuentre en un vértice cuadrícula y que los lados de estas sean paralelos á la meridiana, geográfica ó magnétic su perpendicular.

En cuanto á la *segunda cuestión*, la práctica la resuelve en sentido negativo; pues no h visto ningun plano en que consten las líneas de base ó al menos las letras ó números, con se designaron las estaciones y los puntos de detalle en los cróquis y registros, á excepción de vértices de las triangulaciones en que así se hace, ó se designan con los nombres locales; y embargo creemos que no se deberían omitir aquellas, para que los planos se puedan compro con presencia de los cróquis y registros, proyectar sobre ellos cualquiera obra y replantea con seguridad utilizando los puntos señalados en el terreno; si así se hiciera, no se vería con frecuencia que ahora ocurre dar por buenos planos muy bien dibujados, pero poco exactos muy y difíciles de comprobar, porque no se conoce el procedimiento seguido, ni ofrecen, en mu chos casos, puntos precisos de referencia.

Si en la designación de las estaciones y puntos característicos se siguiera el sistema que de jamos aconsejado (número 56 del volúmen primero) podrían fácilmente suprimirse las líneas de base y escribiendo las letras con tinta carmín pálido se conseguiría el objeto sin perjudicar el buen efecto del dibujo, con tal que al entregar el plano en limpio se acompañara, como debe hacerse, copia del registro de campo (1).

Cuando el plano se dibuja á la pluma ó con aguadas combinadas al objeto de dar una imagen del terreno agradable á la vista, es consiguiente que no deben figurar en él cuadrícula, líneas, ni letras de estaciones y puntos y sí solo los letreros indicadores del nombre de los ríos, vías de comunicación, sitios, etc.

26 — Medios de representación y signos convencionales.

PUNTOS

Los signos convencionales que se pueden utilizar para distinguir los puntos de diferentes clases que se comprendan en los planos, son los indicados en la figura 27.

▲ (a)	para los vértices geodésicos de 1.er orden;				
◬ (b)	id.	id.	id.	de 2.°	id.;
△ (c)	id.	id.	id.	de 3.er	id.;
▲ (d)	id.	id.	topográficos;		
◎ (e)	id.	id.	de poligonal;		
⊙ (f)	id.	puntos de comprobación por intersecciones;			
• (g)	id.	id.	de detalle señalado con hito;		
-- (h)	id.	id.	id.	id.	con estaca;
⊙ (j)	id.	id.	id.	no señalados.	

Fig. 27

(1) Esto y mas se hace en los servicios públicos catastrales y otros semejantes, pero no en algunos otros, que no dan á los buenos planos la importancia que tienen, ni en los trabajos particulares, en que solo se atiende al golpe de vista agradable, quedando muchas veces engañados los que pagan los trabajos como buenos.

LÍMITES

Los de edificios, paredes, zanjas, arroyos y otros semejantes se señalan con líneas de igual espesor en todas sus partes, no admitiéndose ya las gruesas de sombra; pero se emplea la tinta azul para todas las aguas y alguna vez el carmín para los edificios, aunque en estos es preferible utilizar la tinta de china con rayado en los cubiertos.

En los barrancos y desmontes y terraplenes de las vías de comunicación se indican los escarpes con pequeños trazos en forma de cuña y dirección de la máxima pendiente.

Los signos convencionales utilizados para indicar la clase de *límites* son los siguientes:

De estado. . . . . + + + + + + + + + +

De provincia. . . . + · · + · · + · · + · · +

De término municipal. . — · · — · · — · · — · · —

De predio. . . . . ———————

De parcela. . . . . ———————

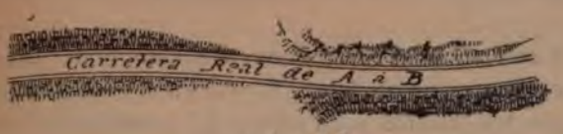


Fig. 28

Fig 29

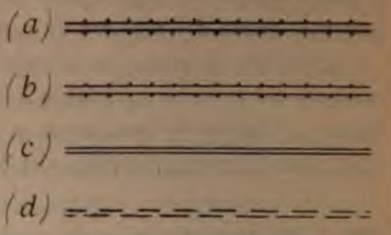


Fig. 30ª

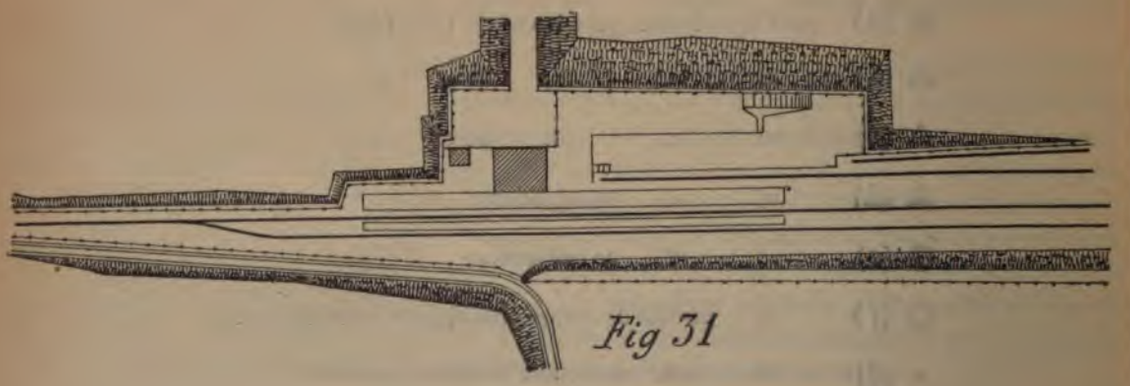


Fig 31

Fig. 32

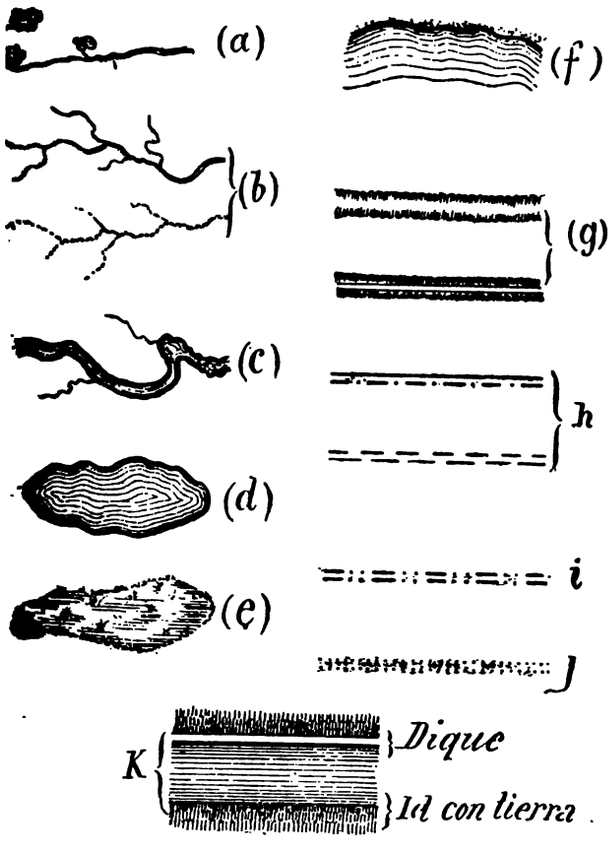


Fig 34

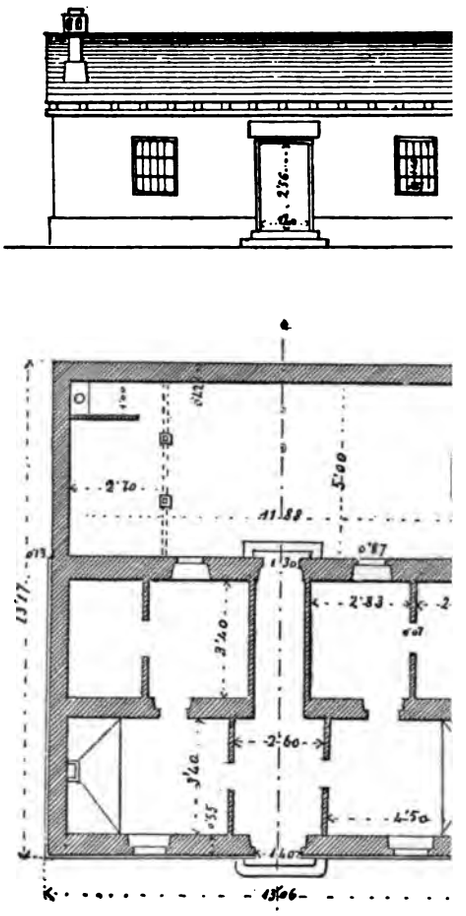


Fig. 36

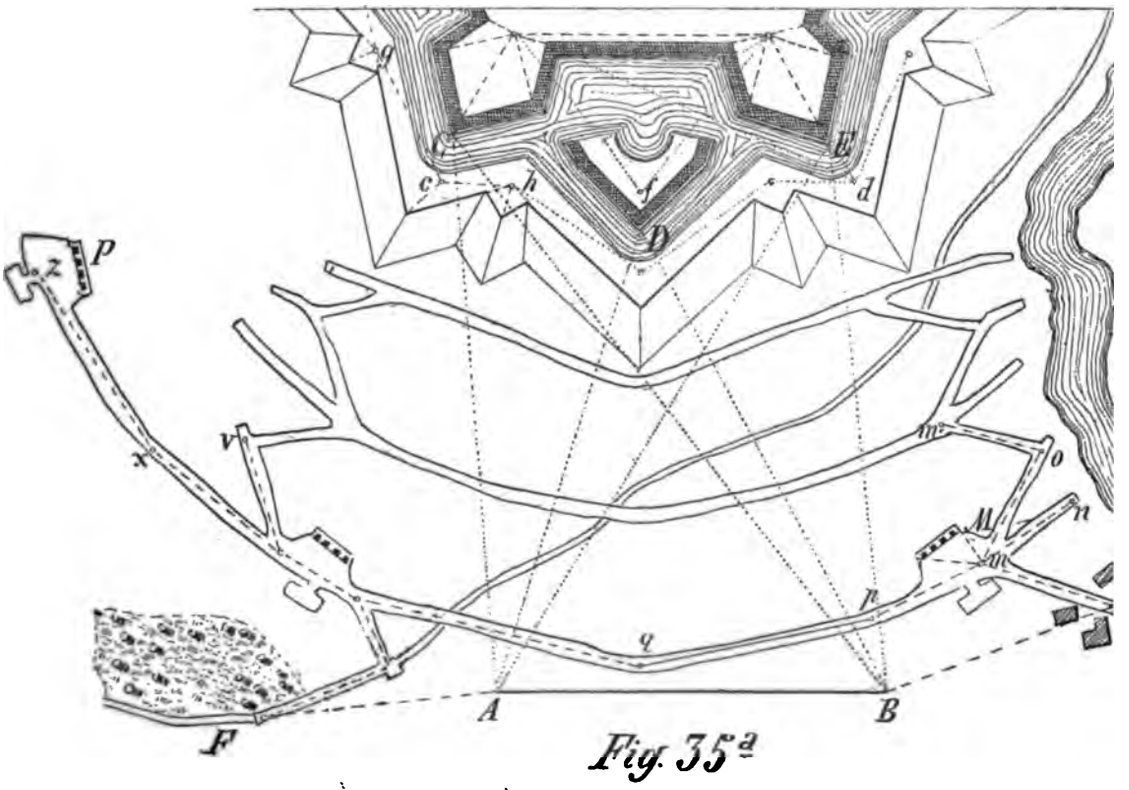


Fig. 35ª

»La altura de los caracteres en los nombres y la de las cifras para los números de las par- »celas no será nunca mayor de la fijada en la lámina quinta y por falta de espacio podrá redu- »cirse según la importancia del objeto hasta la altura mínima de un milímetro.

»Los nombres de los caminos y corrientes de agua se escribirán, en cuanto su anchura »gráfica lo consienta, sobre el eje del camino ó sobre la mediana del alveo; en caso contrario »se escribirán paralelamente á su dirección y á una distancia no mayor de un milímetro.

»Todos los nombres que no deban seguir una dirección determinada, como los de los ca- »minos, corrientes de agua, crestas, valles, etc., así como los números de las parcelas se escri- »birán, siempre que sea posible, en la dirección de O. á E.»

Los modelos de la lámina quinta son de las condiciones siguientes: (1)

Para el interior de los planos

4 mm. *A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V X Y Z*

2'5 mm. *a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v x y z*

Para el exterior de los planos

4 mm. A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V X Y Z

2'5 mm. a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v x y z

Para numerar las parcelas y cotas

1'5 mm. *1 2 3 4 5 6 7 8 9 0*

El letrero principal se coloca en el ángulo superior de la izquierda ó en el inferior de la derecha y utilizando los mismos caracteres precedentes se han de emplear dimensiones, que armonicen y hagan resaltar las palabras que se desée hacer mas notorias; conviene expresar en él, la provincia, partido judicial y término municipal y aun muchas veces la sección ó partida local, en que se halle el terreno representado, para determinar así su situación; tambien conviene expresar la relación de la escala y la época en que el plano se levantó; la firma del Topógrafo debe constar siempre en el ángulo inferior derecho del papel y la del delineante que le dibujó, si fueran distintos.

COPIA, REDUCCIÓN Y AMPLIFICACIÓN DE LOS PLANOS

27 — Copia de los planos.

Terminada la construcción de un plano es necesario copiarle generalmente sobre papel grueso y resistente, que permita dibujarle en negro ó de colores de una manera agradable á la vista y que sea duradero.

Estas copias se obtienen *por calco, por cuadrícula ó con ayuda del pantógrafo.*

(1) Las dimensiones de la caja han obligado á reducir á $^2/_3$ las del original, que, como se dice, tienen 4 y 2'5 mm. de altura respectivamente.

trucción y reproducción se consiguen con mas exactitud que por los procedimientos gráficos ordinarios, es indudable que implica un trabajo muy penoso y, cuando no se utiliza la intersección normal en la copia de los planos, se han de producir errores no despreciables por la indeterminación de las intersecciones agudas de las líneas del plano con las de la cuadrícula.

Para evitar estos inconvenientes se utiliza en la copia de los planos:

El pantógrafo. — Se han construído de muchas formas; nos concretarémos á explicar brevemente su principio fundamental y á representar el de forma primitiva perfeccionado por Kern y los suspendidos ahora mas utilizados:

El *pantógrafo primitivo* está constituído por cuatro reglas que forman un paralelógramo articulado A B C D (figura 38) con dos de sus lados, A B y A D prolongados; en el extremo P del segundo de estos hay un punzón destinado á recorrer la figura que se quiere copiar ó reducir y en la prolongación del primero un lápiz que puede cambiar de lugar, de manera que la recta que los une pase por el perno F de posición variable tambien, que se une á la regla B C y sirve de eje de rotación á todo el aparato, con cuyo movimiento y el consiguiente á la articulación de las cuatro reglas el punzon puede recorrer, dentro de ciertos límites, el perímetro de una figura obligando al lápiz á señalar otra omotética respecto al punto F y cuyos lados están con los homólogos de la recorrida por el punzón en la razón de $\frac{F\,L}{F\,P}$

En efecto: cuando el punzón se encuentra en el punto P y el lápiz en L, en el supuesto necesario de hallarse P, F y L en línea recta, los triángulos P A L y F B L son semejantes y por consiguiente $\frac{F\,L}{F\,P} = \frac{B\,L}{A\,B}$

Cuando el punto P se encuentra en P', el lápiz se hallará en L' y como aunque los ángulos A' y B' no sean los mismos de antes, serán iguales, pues que el paralelógramo subsiste y tambien en línea recta los puntos L', F y P', los triángulos P' A' L' y F B' L' serán tambien semejantes y se tendrá $\frac{F\,L'}{F\,P'} = \frac{B'\,L'}{A'\,B'}$ que es igual á la anterior, por ser invariables los términos de la segunda razón y como lo mismo que se ha demostrado para los extremos de los lados P P' y L L' se podría demostrar para todos los del polígono, que recorrieran respectivamente el punzón y

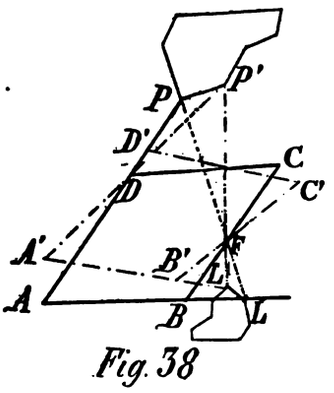


Fig. 38

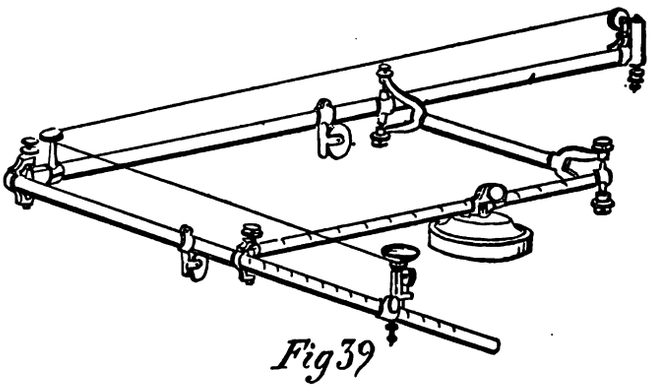


Fig 39

el lápiz, resultan omotéticas las figuras relativamente al perno F y por consiguiente semejantes y sus lados en la relación antedicha.

Variando la posición del perno y la del lápiz, pero de manera que siempre estén en línea recta con el punzón, se puede cambiar la razón de las dos figuras y tambien se puede invertir poniendo el lápiz donde estaba el punzón y este en el lugar de aquel.

En la figura 39 se representa el pantógrafo de forma primitiva construido por Kern, que en lugar de reglas de madera ó de metal, utiliza tubos metálicos, articulaciones con puntas de tornillo y solo dos ruedecillas, todo lo que hace que sea ligero y de fácil manejo.

El lado del paralelógramo á que se ajusta el perno y la prolongación del otro, en que se coloca el lápiz, se hallan graduados de manera que se consigan las relaciones $^1/_{15}$, $^1/_{10}$, $^1/_6$, $^1/_5$, $^1/_4$, $^1/_3$, $^2/_5$, $^1/_2$... y para tener las inversas basta poner el lápiz donde está el punzón y este donde aquel.

El llamado *pantógrafo milanés* consiste tambien en un paralelógramo articulado *A B C D* (figura 40), en cuyos lados paralelos *A D* y *B C* se articula otra regla *E F* paralelamente á los lados *A B* y *D C* constituyendo dos paralelógramos unidos articulados; el punzón y el lápiz se colocan en dos vértices opuestos, *A* y *C*, y el perno en la intersección *G* de la diagonal *A C* con la regla intermedia *E F*, siendo la razón de los lados homólogos de las figuras semejantes recorridas por el punzón y el lápiz respectivamente la de $\frac{AG}{GC}$, que puede variarse cambiando la posición de la quinta regla *E F* y el perno en ella, á cuyo efecto está graduada esta y las dos opuestas *A D* y *B C*.

Con este pantógrafo de muy sencilla construcción y manejo se consigue mas fácilmente que con las de otras formas la verdadera copia de los planos.

Pantógrafos suspendidos. — Para los trabajos de precisión se utilizan al presente los repre-

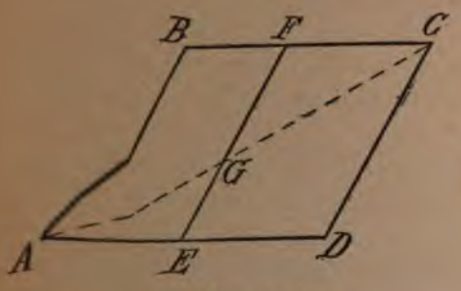


Fig 40

Fig. 41

sentados en las figuras 41 y 42, que solo tienen un punto de apoyo sobre el papel ademas de los del punzón y el lápiz y por consiguiente los movimientos son mas fáciles y regulares.

El de la primera forma puede tener las reglas de madera ó de metal; de esta materia de 60 centímetros de largo con sólidas clavijas para colocarse en los agujeros de los brazos que corresponden á las razones de $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^3/_5$, $^1/_2$, $^2/_5$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, etc., cuestan 165 francos y de la segunda forma con brazos de bronce hueco, graduación en milímetros, articulaciones movi-

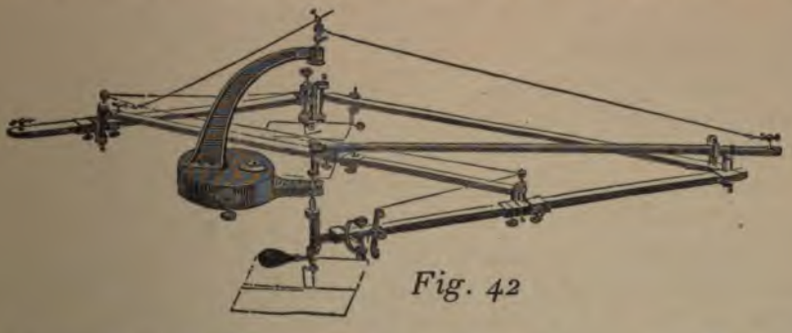


Fig. 42

bles con nónius hasta de $^1/_{10}$ de mm. y sostén de hierro fundido, cuestan 350 francos los de 60 centímetros habiéndolos hasta de 95 centímetros, que cuestan 460 francos y 65 mas el brazo adicional para sostener el aparato, cuando se emplea en las razones de $^1/_5$ y $^1/_4$ con las ruedecillas para facilitar el movimiento. (1)

(1) Construídos estos pantógrafos por Salmoiraghi se hallan de venta en esta ciudad en casa de Biosca y Compañía á los precios indicados.

Para utilizar con provecho esta clase de aparatos se necesita adquirir destreza en su manejo, á fin de que el lápiz corra suavemente sobre el papel, á cuyo efecto se le sobreponen diferentes rodajas de plomo, que le comprimen, cuidando de levantarle por medio de los hilos metálicos de suspensión cuando lo hicieren con exceso ó se quiera hacerle pasar de uno á otro punto sin marcar el camino que recorre.

Las condiciones necesarias para el buen funcionamiento de todos los pantógrafos son:

1.ª Que colocado el aparato sobre un tablero horizontal, todos los puntos de apoyo, inclusos el punzón y el lápiz, se hallen con él en contacto y en los movimientos que se le impriman corran suavemente sobre aquel, á fin de que el lápiz marque las líneas con delicadeza y sin saltos.

2.ª Que el punzón, el lápiz y el eje del perno sean perpendiculares al tablero y se encuentren en línea recta.

La perpendicularidad de los dos primeros se comprueba haciéndoles girar sobre sí mismos y viendo si trazan un solo punto ó un círculo; esto ocurrirá mas ordinariamente con el lápiz, que se corregirá haciéndole nuevamente la punta; si el punzón estuviese encorvado se enderezará y si el perno fuera defectuoso habrá que rechazar el aparato en la compra ó en otro caso hacerle corregir por instrumentista ó á falta de este por un cerrajero inteligente.

La situación en línea recta de los tres puntos antedichos se comprobará, despues de colocar el perno y el lápiz en la misma graduación de las reglas correspondientes, viendo si sus extremos coinciden con el canto de una regla ó con un hilo bien estirado; es algo difícil hacer con toda precisión esta comprobación.

3.ª Que las graduaciones que regulan la situación del perno y del lápiz indiquen con exactitud la razón de los lados homólogos de las figuras que señalan el punzón y la punta del lápiz.

Despues de colocados este y el perno sucesivamente en iguales graduaciones, se hace correr el punzón una ó varias rectas de longitud definida, cuatro ó cinco decímetros p. e. y midiéndolas se vé si su relación es la deseada.

Mejor aun será hacer recorrer al punzón un cuadrado ó rectángulo de 30 á 40 centímetros de lado y examinar si la figura trazada por el lápiz es de la misma forma y si sus lados homólogos están en la razón señalada; pues de esta manera se comprueban todas las condiciones del aparato. Los defectos que resultaren indicarán las causas que los produjeron y generalmente no será difícil de corregirlos, debiéndose tomar nota precisa cuando fueren debidos á la inexactitud de las graduaciones de las reglas y no pudiera devolverse el aparato; en este caso convendrá tambien señalar con un lápiz bien afilado ó con tiralíneas la posición conveniente de las abrazaderas, que llevan el perno y el lápiz, para evitar despues nuevas comprobaciones ó lo que sería peor, los errores consiguientes.

No creemos necesario detallar el manejo de estos aparatos concretándonos á consignar que para fijar la situación del plano borrador y el papel del limpio, que se desea conseguir, conviene trazar en el primero un rectángulo que le comprenda y otro igual en el segundo, que servirán para la buena colocación de ambos y del aparato sobre el tablero, á fin de evitar que las ruedas ó diferentes puntos de apoyo se salgan de él y que el plano en limpio no ocupe en el papel la posición mas conveniente; esto no es difícil cuando se trata de copiar planos pequeños, pero lo es mas si pasan de 50 centímetros de lado y en el caso de ser muy grandes es necesario subdividirlos en cuadrados de lados de esta longitud y arrollar el papel á medida que se va copiando cada uno, lo cual dificulta grandemente el manejo del aparato.

El lápiz de este no marca las líneas con completa regularidad, ni delicadeza, por lo que al pasarlas de tinta hay siempre que corregirlas mas ó menos y para evitar errores conviene fijar con cuidado los puntos característicos; de manera que tratándose especialmente de la copia de planos algo extensos no se consiguen con los pantógrafos resultados tan completos como algunos creen, si bien siempre mas fácilmente que por los medios antes indicados.

Cuando no fuere indispensable hacer las copias de los planos en papel fuerte, como hasta aho-

Cuando son necesarias muchas copias se apela á la *autografía*, que exige hacer la primera copia sobre tela ó papel lúcido con tinta especial, á la *velocigrafía*, á la *zincografía* ó á la *fotolitografía;* pero con mayor motivo que en los dos procedimientos antes indicados conviene en estos casos acudir á los gabinetes ó establecimientos especiales.

Finalmente en el ensayo del Catastro de *Neuilly-Plaisance* el ilustrado Ingeniero Mr. Lallemand, encargado de dirigirle, apeló al medio de construir los planos directamente sobre plancha de zinc en las condiciones del grabado, consiguiendo tener así invariable la matriz y producir copias, que solo costaban algunos céntimos mas que el precio del papel; pero este y el sistema análogo empleado en el nuevo Catastro italiano solo es aplicable en tales casos.

28 — Reducción y amplificación de los planos.

Como en las amplificaciones puramente gráficas se hacen mas notorios los errores cometidos en el levantamiento y los propios del graficismo en la construcción, rara vez se amplifican los planos y en todo caso se repite la construcción en la escala deseada con los datos recogidos en el campo; sin embargo, las comprendemos en este número, porque los procedimientos de *reducción* son enteramente aplicables á la *amplificación*, ya que basta cambiar la escala en un y en el pantógrafo la situación del punzón y el lápiz.

Despues de lo que dejamos consignado sobre los procedimientos de las copias, fácilmente se comprende que para conseguir la *reducción* en los tres casos generales considerados son solo aplicables los de *cuadrícula, el pantógrafo y la fotografía y sus derivados.*

Con el primero naturalmente la cuadrícula del plano reducido debe tener su lado en la misma razón con el de la del plano original que lo han de estar las dos escalas, utilizando en la trasportación de las distancias medidas con las del original sobre este la del plano reducido en él, ya se emplee el sistema de coordenadas ó normales á los lados de los cuadrados, ya la distancia de cada punto á sus vértices, ya la intersección de las rectas del plano con aquellos ú otro medio geométrico cualquiera; lo cual no es dificil, aunque si penoso, con las escalas lineales que ahora se encuentran en el comercio.

Antes, á falta de estas, se utilizaba *el compás de reducción*, que, aunque todavía se incluye en los estuches, rara vez se utiliza y por eso y por la facilidad con que se comprenden sus condiciones y manejo nos concretamos á representarle abierto en la figura 43; pues es evidente que moviendo el eje de rotación de las dos piezas de que consta, variará la relación de las magnitudes A B y D E comprendidas entre cada dos puntas y que esta razón será constante cuando la situación del eje permanezca invariable, sea cualquiera la abertura de las piezas y por eso en ella estan señaladas las razones principales y las intermedias se pueden utilizar determinando por sencillos tanteos la posición conveniente del eje de rotación que es el vértice de los ángulos opuestos de los triángulos semejantes que en cada abertura se forman con la distancia entre las puntas del mismo lado.

Fig 43

El manejo del *pantógrafo* en la reducción de los planos es enteramente igual que en las copias, pues basta colocar el perno ó eje de giros y el lápiz en la graduación correspondiente á la razón de las dos escalas para conseguir el plano reducido y esta es indudablemente la aplicación mas frecuente y ventajosa de este aparato, porque, como lo mismo sirve para situar la posición de puntos aislados, que para trazar rectas y curvas de todas clases, economiza mucho trabajo y bien manejado reproduce las figuras con bastante exactitud siendo fácil corregir las irregularidades, que por los granos del papel ó defectos del lápiz algunas veces producen.

Finalmente la *reducción por la fotografía* es mas precisa y rápida realizada por los artistas especiales y por eso á ella y sus derivados se acude cuando se quiere conseguir mucha precisión y gran número de ejemplares.

29 — Clasificación de los procedimientos utilizados.

Con el plano de un terreno no solo se aspira á conocer la situación relativa de los puntos y líneas, que determinan sus accidentes característicos, sino tambien la superficie que ocupa cada uno.

Esta se puede determinar *numéricamente* cuando de las distintas figuras geométricas, que integran aquellos, se conocen las dimensiones medidas en el terreno necesarias para determinar su área mediante sencillos cálculos; *gráficamente* cuando es necesario medirlas sobre el plano construído y *mecánicamente* cuando en este segundo caso, se dispone de los aparatos llamados planímetros, que mediante el recorrimiento del perímetro de las figuras dan directamente el área por ellas ocupada en el papel, permitiendo por una sencilla multiplicación determinar la superficie del terreno y muchas veces esta sin aquella.

El primer medio da naturalmente resultados mas exactos, porque en ellos no influyen los errores del graficismo; el tercero los da mas que el segundo, porque, si bien no los libra de aquellos, no los aumenta con los propios de la apreciación gráfica de las dimensiones necesarias para el cálculo y por otra parte disminuye considerablemente el trabajo mejorando la apreciación con la repetición; el segundo, puramente geométrico, es el mas molesto y erróneo, porque á los errores del graficismo en la construcción del plano se añaden los propios del suplementario indispensable y expone á frecuentes equivocaciones, por todo lo que solo debe aplicarse cuando no pudieran serlo los otros dos.

30 — Medición numérica de la superficie del terreno.

En el artículo 3.° de la Parte siguiente explicarémos la manera de calcularlos cuando levantándose los planos por los modernos procedimientos son conocidas las coordenadas polares ú ortogonales de todos los puntos característicos y si bien serían aplicables á algunos casos de los que dejamos expuestos, especialmente al de perpendiculares á un solo eje, prescindiendo de aquellos nos concretarémos ahora á los que de antiguo se han utilizado.

Con el sistema de perpendiculares cada polígono queda dividido en triángulos rectángulos y trapecios, cuyas bases y alturas se miden sobre el terreno y por consiguiente por su medio se calcula fácilmente la superficie de cada uno y con su suma se tiene la del polígono sin utilizar á tal objeto ninguna dimensión del plano.

Lo propio sucede con las áreas limitadas por rectas y curvas ó curvas solamente, pues que para determinar estas se levantan al eje, principal ó secundario, normales suficientes para que la curva comprendida entre los extremos de dos normales consecutivas pueda considerarse como recta; pero si sus condiciones permiten levantar las normales á distancias iguales se pueden simplificar los cálculos, porque repitiéndose, excepto las extremas, en la semi-suma de las bases de los trapecios, la superficie comprendida entre el eje, dos normales y la curva se obtiene multiplicando la suma de las normales interiores y la semi-suma de las extremas por la longitud del eje entre estas comprendido.

Todo esto es tan sencillo que no merece mas explicación y solo sí advertir, que, para evitar equivocaciones y facilitar el trabajo, conviene ordenar los datos y resultados en un estado, en que consten: en la primera casilla el número de órden de la figura; en la segunda su designación; en la tercera los datos y cálculos indicados; en la cuarta los resultados parciales y su suma y en la quinta las observaciones; de manera que aplicando estas indicaciones á la determinación de la superficie de la figura 1.ª, que para mayor comodidad repetimos, formarémos el estado siguiente:

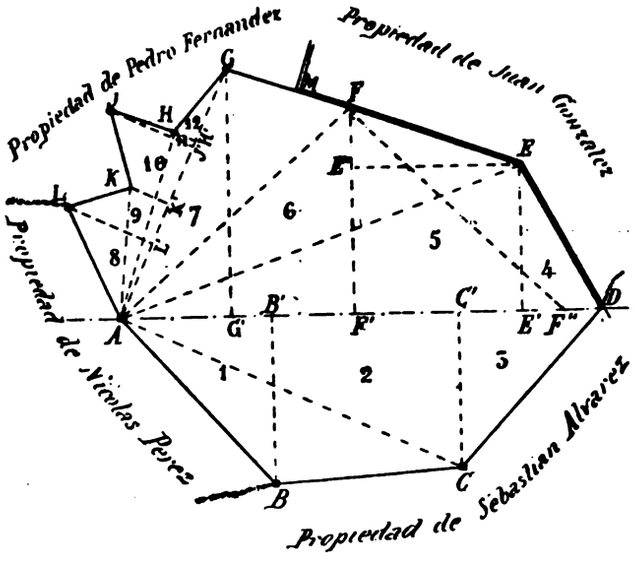


Fig. 1ª

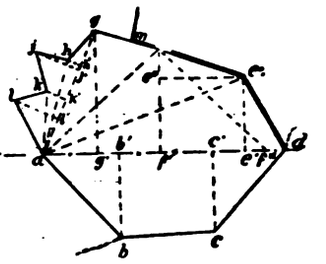


Fig. 2ª

ESTADO COMPRENSIVO DE LAS ÁREAS DE LAS FIGURAS INTEGRANTES DEL POLÍGONO ABCDEFGHJKL

N.º de orden	CLASE DE LAS FIGURAS	INDICACIÓN DE LOS CÁLCULOS	RESULTADOS PARCIALES Y TOTAL	OBSERVACIONES
			Metros ²	
1	Triáng. AB'B	$\frac{48 \times 47'2}{2}$	1.132'8	
2	Trap. BB'C'C	$\frac{47'2 + 44'6}{2} \times 52$	2.386'8	
3	Triáng. CC'D	$\frac{36 \times 44'6}{2}$	802'8	
4	Triáng. DE'E	$\frac{19'8 \times 39'8}{2}$	394'0	
5	Trap. E'EFF'	$\frac{39'8 + 62'5}{2} \times 50'2$	2.567'7	
6	Trap. FF'G'G	$\frac{62'5 + 72'2}{2} \times 31$	2.087'8	
7	Triáng. AG'G	$\frac{35 \times 72'2}{2}$	1.263'5	
8	Triáng. AL'L	$\frac{24 \times 23}{2}$	276'0	
9	Trap. LL'K'K	$\frac{23 + 4'3}{2} \times 14$	191'1	
10	Trap. KK'J'J	$\frac{4'3 + 21}{2} \times 14$	177'1	
11	Trap. JJ'H'H	$\frac{21 + 6}{2} \times 5$	67'5	
12	Triáng. HH'G	$\frac{24 \times 6}{2}$	72'0	
		TOTAL.	11.419'1	

Estado comprensivo del área de los triángulos integrantes del polígono A B C D E F G H determinados por la fórmula $S = {}^1/_2\, b^2 \frac{\text{Sen. A. Sen. C.}}{\text{Sen. B.}}$

NÚM.	DESIGNACIÓN	LOGARITMOS +	LOGARITMOS —	LOGARITMOS COCIENTE	SUPERFICIES PARCIALES
					Metros ²
		2 Log. AB = 3'7026		»	»
1.°	ABX	Log. Sen. A = 9'8469	Log. 2 = 0'3010	»	»
		Log. Sen. B = 9'9998	Log. Sen. X = 9'8378	»	»
	Sumas.	+ 3'5493	— 0'1388	3'4105	2573'4

Cuando desde los vértices del polígono se hubieren dirigido visuales á dos ó mas puntos interiores, se podrá determinar la superficie de unos triángulos por este procedimiento y la de los restantes por el gráfico al objeto de apreciar mejor la superficie total; pero si por la disposición de los puntos elegidos para comprobación y las condiciones de situación de los vértices las visuales se cruzaran habrá que apelar á una nueva división sobre el plano midiendo la superficie gráficamente.

31 — Medición gráfica de las superficies.

Puede hacerse subdiviendo el polígono en otros sencillos, como triángulos, rectángulos, trapecios, y cuadriláteros cualesquiera ó bien por medio de cuadrículas de determinadas condiciones. La subdivisión, en cuanto sea posible, debe hacerse por perpendiculares, que facilitan los cálculos y al mismo efecto, cuando una parte del perímetro sea una curva ó se componga de muchos pequeños lados, conviene sustituirle por otro recto dispuesto de manera que las áreas que se aumentan queden compensadas por las que se sustraen ó dejan fuera del polígono que se mide y para trazar estas *rectas de compensación* se ha de utilizar una regla ó escuadra de cristal, que permite ver las porciones que deben compensarse para apreciar su equivalencia, lo cual no es difícil á un ojo práctico.

Por los mismos medios se convierte sencilla y muy aproximadamente un polígono de grande número de lados ó de perímetro curvilíneo en otro rectilíneo de un corto número de aquellos, que despues se subdivide en triángulos rectángulos, en trapecios, rectángulos y cuadrados, cuyas bases y alturas se miden con la escala, el compás ó el cristal cuadriculado ó simplemente con paralelas equidistantes, que hacen las veces de coordinatógrafo y que algunos ilustrados Topógrafos utilizan considerándole de bastante provecho.

Aunque en nuestro concepto no tiene ventajas sobre las buenas escalas de marfil ó ebonita, porque con estas bien manejadas tambien se evita en los cuadriláteros trazar las perpendiculares de los dos triángulos, en que quedan divididos por una diagonal, y sí los inconvenientes de no dar las verdaderas dimensiones, cuando los puntos se miran con oblicuidad á causa de la refracción y de romperse fácilmente, vamos á dar á conocer el utilizado por el ilustrado Ingeniero M. Lallemand en el nuevo Catastro de Neuilly-Plaisance en la medida de las pequeñas áreas. Como se indica en la figura 45 consiste en un rectángulo de cristal, en que se han trazado paralelas á la equidistancia de 1 mm. con la mediana graduada tambien en mm. con sus decenas numeradas á partir de una normal y tambien aquellas á partir de la inferior.

Aplicando la mediana graduada á la diagonal *a c* de un cuadrilátero de manera que el vértice *a* coincida con su cero, se tendrá en *c* la magnitud en mm. (metros en la escala $^1/_{1000}$) de la diagonal y la suma de las alturas en la diferencia de las apreciadas por medio de las paralelas reales ó imaginarias que pasan por los puntos *b* y *d* y multiplicando estas dos magnitudes se tiene el duplo de la superficie del cuadrilátero en mm.² (met.² en la escala de $^1/_{1000}$).

Para hallar la superficie del triángulo *a b c* se multiplicaría la mitad de la base *a c* por la altura obtenida con la diferencia de las graduaciones de las paralelas, que pasan por *a* y *b*.

Para evitar los efectos de la refracción se ha de mirar á los puntos perpendicularmente á la superficie del cristal y si la numeración de las paralelas partiera de la mediana en ambos sentidos se tendría en todos los casos el valor de las alturas directamente, lo que sería preferible.

Para calcular el área de un polígono puede utilizarse tambien una *cuadrícula milimétrica*, en que los centímetros y medios decímetros cuadrados se distinguen fácilmente por el mayor grueso de las líneas que los forman.

De tres maneras se puede hacer uso de la cuadrícula: construyendo el plano sobre papel cuadriculado ó haciendo con todo cuidado una cuadrícula sobre papel traslúcido ó sobre un cristal de caras planas.

El mejor papel cuadriculado que hemos utilizado es el de Schleicher y Schull de líneas poco marcadas, pero tiene el inconveniente de fatigar bastante la vista; otras clases de la misma fábrica, en que aquellas lo están mas, se venden tambien en rollos (1) con cuadrículas al mm., á los dos y á los 5 mm., presentando el primero los cuadrados al centímetro y cinco centímetros perfectamente distintos, el segundo los centímetros y el tercero los 25 mm., de manera que se puede utilizar el que mejor se acomode á la escala del plano.

Si suponemos construido este sobre papel de la primera clase, como se indica en la figura 46, para hallar la superficie en mm. ocupada sobre el papel por el polígono A B C D E F G empezaríamos por contar y cruzar los cuadrados de centímetro completos, que serían centenas; despues contaríamos y marcaríamos con un punto los cuadrados enteros de milímetro, que serán unidades y finalmente las fracciones de estas comprendidas dentro del polígono y se con-

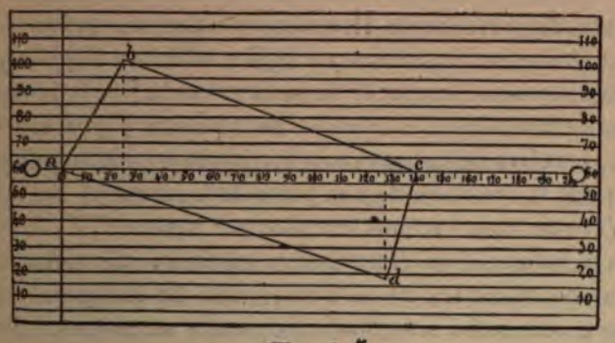


Fig. 45

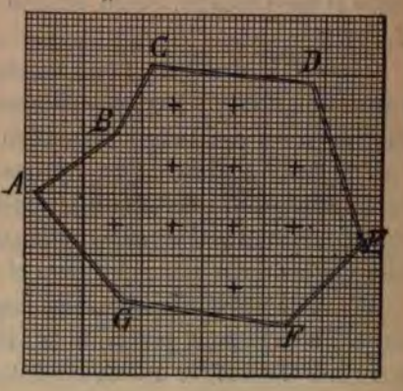


Fig. 46

tarían y marcarían compensándolas para formar unidades enteras ó mejor aun apreciando en cada uno las décimas de mm.², que pueda valer, la suma de todas estas cantidades sería el número de mm.² comprendidos por el polígono y multiplicándolos por el área que, según la escala corresponda en el terreno al mm.² del plano (en la de $^1/_{1000}$, 1 m.²; en la de $^1/_{2000}$, 4 m.²; en la de $^1/_{5000}$ 25 m.², en la de $^1/_{500}$ $^1/_4$ m.²...) se tendrá la superficie buscada.

De una manera análoga se haría la contada y apreciación de las fracciones de los menores cuadrados, si se utilizan las otras clases de cuadrícula, pero teniendo en cuenta el número de mm.² que vale cada uno de los menores cuadrados.

Creen algunos Topógrafos inexpertos que de esta manera se consigue con grande precisión la superficie; pero, como ya hemos indicado, no sucede así, porque á los errores del graficismo en la construcción del plano hay que añadir los propios de la cuadrícula, que nunca es exacta, como se comprueba midiendo en dos direcciones perpendiculares sus líneas de división y los de apreciación de las fracciones, por cuyo motivo ya los Topógrafos concienzudos rara vez utilizan este sistema de medición de la superficie de los planos.

(1) Los rollos de 75 centímetros de ancho por 10 metros de largo cuestan 12'75 francos en los almacenes de Recarte hijo, Madrid, Carrera de San Jerónimo 15.

La cuadrícula hecha sobre papel traslúcido tiene ademas el inconveniente de que se corre sobre el plano produciendo mayores errores y molestias y con la construída sobre cristal se añade á todo esto los consiguientes á la refracción de la visual; de manera que, cuando se haya de utilizar cuadrícula, lo mejor es construir el plano con delicadeza sobre buen papel cuadriculado mecánicamente comprobando las dimensiones de los cuadrados antes de la construcción para en caso necesario tener en cuenta la diferencia resultante.

No es fácil señalar límites á la precisión con que la superficie del terreno se consigue midiéndola sobre el plano, porque los errores parciales, que en ella influyen, son esencialmente variables y dependen en gran manera de la aptitud del operador.

MEDICIÓN MECÁNICA DE LAS SUPERFICIES

32 — Clasificación.

Aunque la idea de construir un aparato, que permitiera medir mecánicamente la superficie de los planos, ya se tuvo á fines del siglo XVIII, no se establecieron al efecto los fundamentos técnicos fácilmente realizables hasta 1814, en que los fijó Hermann, geómetra del Catastro de Baviera, que sin embargo no consiguió su objeto, ni su invención fué conocida hasta que el Profesor Bauerfeind en una nota de 1851 reclamó para él la prioridad del invento en vista de que en el mundo científico se atribuía al profesor Tito Gonnella, toscano, que en 1824 había hecho conocer su *máquina cuadradora* á varios de sus comprofesores y mas tarde al Rey Leopoldo II de Toscana, quien ordenó se construyera un ejemplar para su rico gabinete de Mecánica.

Como Gonnella no tenía conocimiento del invento de Hermann y sobre sus principios realizaron sucesivos perfeccionamientos Opikofer en 1827, Ernst en 1836 y Wetli en 1849, cuyo *planímetro* ha prestado y presta tan buenos servicios, no puede darse la prioridad de la invención de tan ingenioso como útil aparato exclusivamente á ninguno de aquellos y por eso el ilustre Ingeniero Salmoiraghi, que discute (1) claramente esta cuestión, llama á estos planímetros de Hermann-Gonnella, demostrando con la inserción de una parte de la memoria del último que en nada esencial difiere el de Wetli de los principios sentados por aquel.

En todos los indicados, así como en el recientísimo *Integrómetro cartesiano de valuación tangencial* inventado por el ilustre Profesor de Mecánica de la Universidad de Zaragoza don José Ruiz Castizo, se utiliza un sistema de coordenadas ortogonales exigiendo mecanismos algo voluminosos, complicados y relativamente costosos, por todo lo que se han generalizado poco entre los Topógrafos.

No ha sucedido lo mismo al *polar* inventado por el profesor Amsler Laffon en 1854, pues no obstante el poco tiempo transcurrido, es ya de uso general, siquiera haya sufrido bastantes modificaciones por el mismo Amsler y otros para perfeccionarle.

Nos habíamos propuesto, como lo hicieron los mas modernos Autores de Topografía, concretarnos á la descripción del modelo de esta última clase mas generalizado; pero para que, llegado el caso, no se tenga dificultad ninguna en el manejo de los de Wetli, que en algunos centros oficiales se encuentra y en el del *curvímetro*, que es útil en algunas ocasiones, creemos oportuno ocuparnos de este, de los *planímetros cartesianos* utilizando la descripción que de ellos hace el ilustre Salmoiraghi en su tan repetido libro y para los *polares de Amsler* una nota expresamente escrita al efecto á nuestro ruego por el ilustrado cuanto modesto Ingeniero don Eugenio Guallart muy competente en la materia. (2)

---

(1) Istrumenti é metodi... página 802-807.

(2) Recomendamos muy eficazmente la lectura de las publicaciones siguientes de este ilustrado Ingeniero: Pantógrafo-planimétrico de su invención. — 1895.
Aplicaciones del cálculo gráfico. — Evaluación de superficies planas y problemas de poligonometría.— 1897.
Monografía del Planímetro de contador y principalmente de los modelos Amsler y sus derivados.— 1898.

33 — Curvímetro ó ruleta de Dupuit.

Como quiera que este sencillo aparato se utilizó en otros tiempos para medir las superficies y sirvió de base al planímetro de Beuvière, le comprendemos en este lugar, aun que no le damos otra aplicación oportuna que á la medición de la longitud de las curvas irregulares, muy difícil de apreciar por otros medios, ya que la de las rectas se consigue mas fácil y exactamente con las escalas ahora utilizadas y las curvas regulares por sencillos cálculos.

El curvímetro se compone (figura 47) de dos ruedas *r* y *R* que giran mediante los ejes *m* y *n* sostenidos por una armadura metálica unida á un mango *A*.

La llanta de la rueda *r* está rayada para que no resbale sobre el papel, sino que gire cuando sobre él se mueve con moderada presión y velocidad, y es consiguiente á esto que si poniendo el aparato normalmente al papel se recorre una línea cualquiera, la longitud de esta será igual al arco de la circunferencia de la rueda comprendido entre los dos puntos de tangencia inicial y final, señalados por la aguja indicadora *t*, fija como la *S* á la armadura *p*.

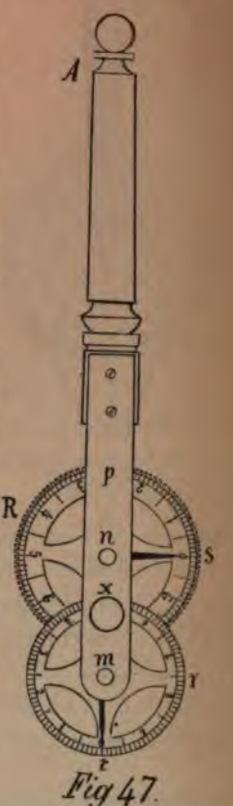


Fig 47.

La circunferencia de la rueda *r* tiene de desarrollo un decímetro, está dividida en diez partes, ó centímetros, numeradas y subdivididas en veinte partes correspondiendo cada una á o'5 mm., diferenciándose por su longitud las líneas que las señalan de las correspondientes á los centímetros y medios centímetros para facilitar las lecturas, exactamente lo mismo que se observa en la graduación de los limbos.

Al eje *m* va unido por la parte posterior un piñón con 10 dientes equidistantes, que engranan con 100 de la circunferencia de la rueda *R* y por consiguiente esta hace un giro completo por cada 10 de la menor y para que indique el número de giros de esta ó los decímetros recorridos, está dividida en diez partes numeradas y cada una subdividida en otras 10, que corresponden á las décimas de aquella ó centímetros recorridos, que por su medio se pueden comprobar, aunque siempre es más exacta la indicación de la rueda menor.

Las agujas indicadoras están dispuestas de manera que cuando la *t* coincida con el *cero* de la rueda menor, la *S* señale una de las cifras ó decenas de la mayor y para regularizar su movimiento, por medio de un tornillo *x* se aprieta ó afloja un resorte, que acciona sobre la rueda *r*.

Cuanto mayor sea el diámetro de esta, mas difícil ha de ser hacer coincidir el índice *t* con los puntos inicial y final de la curva, que se quiere medir, por ser mayor la parte del arco, que coincide con el plano del papel y para evitar los errores consiguientes ahora se construyen los curvímetros con la rueda *r* muy pequeña (1) y se debe tambien procurar no apretar demasiado el papel con el aparato, conservar este perfectamente normal durante todo el movimiento y evitar deslizamientos, que no producirían giro alguno en la rueda *r*.

Para comprobar el curvímetro y adquirir destreza en su sencillo manejo, lo mejor es trazar

---

(1) En el excelente *curvímetro hectométrico* representado en escala natural en la figura 48 destinado á medir la longitud de las curvas en los mapas de $^1/_{200\,000}$ $^1/_{100\,000}$ $^1/_{80\,000}$ $^1/_{320\,000}$ $^1/_{300\,000}$ $^1/_{250\,000}$··· á cuyo efecto lleva en una cara tres graduaciones apropiadas á las tres primeras escalas y en la opuesta otras correspondientes á las tres últimas tomando por unidad el hectómetro, la pequeña rueda solo tiene la circunferencia de un centímetro, sus medios giros se registran en las unidades de la graduación exterior apreciándose claramente el milímetro recorrido y los decímetros aparecen indicados por números, que encuadran en una ventana circular; de manera que puede utilizarse lo mismo que la ruleta de Dupuit con ventaja sobre ella por el pequeño diámetro de la rueda, por su perfecta construcción y por hallarse todo el mecanismo encerrado en un estuche metálico niquelado, que se conserva perfectamente en la caja de cartón con que se vende y en que se encuentra una breve, pero suficiente descripción.

Al precio de 10 pesetas se vende en esta ciudad, casa de Biosca y Compañía.

una recta de 50 centímetros y una circunferencia de 15 de radio; en la primera despue
cer coincidir t y S con el cero de su respectiva rueda colocando el punto t sobre el ex
la derecha y siguiendo el canto de una regla con movimiento y presión moderados, s
hasta el extremo de la izquierda observando si en él el índice t coincide con el cero y
el número 5, tomando nota de la diferencia resultante si así no s
se repite la operación en sentido contrario y si bien se ha operado,
rato no es defectuoso, al llegar al extremo de la derecha volverá
cidir con los ceros.

Fig. 48

Si la diferencia fuera sólo de 2 ó 3 milímetros, podría depend
el punto de tangencia, que debe coincidir con el extremo de la re
el cero de la rueda r, no lo hiciere ó de que no se hubiera seguid
mente la línea y para comprobarlo se debe repetir observando c
do tal coincidencia y la normalidad del aparato.

Si la diferencia fuera mayor, será debida á defectos de este ó
zamientos inadvertidos, fáciles de producirse á los principiantes
repetir la operación con cuidado hasta comprobarlo moderand
necesario el movimiento de la rueda con el tornillo x; pero si se
que ni obrando así se conseguía que la rueda girase con movimi
forme y suave, se lubrificará el eje y el piñón con una gotita
puro de oliva, dando algunas vueltas á la rueda para que aquel se
por toda la superficie del eje y del piñón.

Con algunos ejercicios de este género se adquirirá la destr
saria para manejar el curvímetro y se verá si marcha ó no con reg
en cuyo caso se repetirán otros análogos sobre la circunferencia tr
que el movimiento del aparato es más difícil, no sólo porque n
seguir exactamente la curva, sino porque son más probables los
mientos á causa de las posiciones molestas de la mano y de los gi
zontales que hay que dar al aparato para que siempre se mueva en la dirección de la c
todo lo cual no es de esperar que en estas se consiga ordinariamente la aproximació
de $^1/_{500}$ con tres mediciones, aunque variará mucho con la forma de las curvas, siend
la precisión cuanto menor sea el radio; pero como en las irregulares se han de come
res mayores por otros medios, creemos que será conveniente utilizar los curvímet
medición de su longitud desarrollada sin poder expresar el grado de precisión con qu
seguirá, porque es esencialmente variable.

34 — Planímetros cartesianos.

Los principios fundamentales de estos ingeniosos aparatos los demostró Gonnel
términos siguientes:

«Supongamos que dos puntas móviles P y Q estén de tal manera dispuestas y liga
»sí que mientras la una, P, recorre el perímetro de una figura, la otra, Q, por el mo
»que la P la comunique, describa un rectángulo equivalente á la superficie de la mism
»Sea además para mayor sencillez determinada y constante la base $Q\,S = C$ de este re
»(figura 49, II), de manera que la punta Q recorra simplemente la altura variable $Q\,T$
»de hacerlo de todo el perímetro del mismo rectángulo. Sea cualquiera el sistema de
»que deban relacionar las puntas P y Q, para obtener el efecto indicado será necesario
»den satisfechas algunas condiciones, que en primer lugar determinarémos, limitán
»embargo en esta investigación á algunas maneras de considerar los aumentos ó varia
»la superficie.»

«Varios son los modos que se pueden considerar productores de las superficies pl
»embargo el que más nos conviene ahora es el que se utiliza ordinariamente en el Cá

»tegral, en que conocidas las coordenadas ortogonales, considerando como integral definida la »superficie comprendida entre los límites dados x = a y x = b, bastan para determinar tal su- »perficie ó segmento los dichos valores contados solamente sobre el eje de x, porque está admi- »tido que está aquella comprendida entre tal eje, las dos ordenadas correspondientes á las abs- »cisas a y b y el arco de la curva dada comprendida entre dichas ordenadas. Así que el seg- »mento no puede aumentar ó disminuir, conservada la misma curva, sino variando los límites »en el sentido de las x. Subordinarémos á esta manera especial de considerar las superficies y

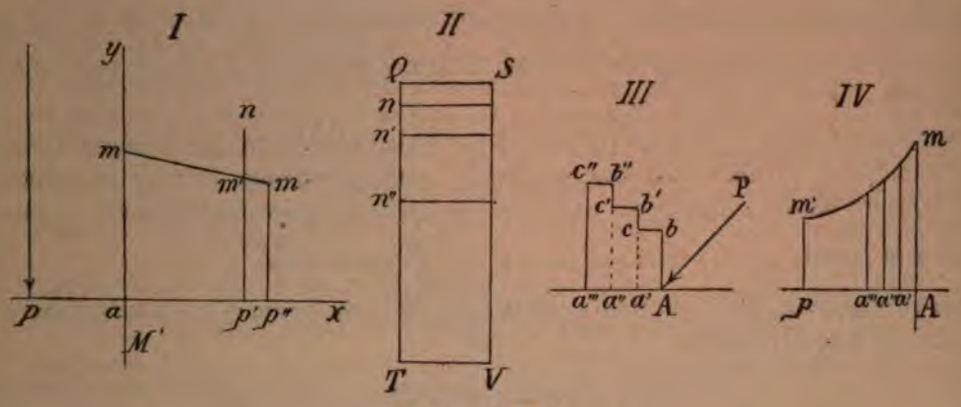


Fig. 49

»sus variaciones la investigación de las condiciones generales para el sistema de piezas inter- »medias entre los puntos *P* y *Q*, fijando que, referida la superficie dada á los ejes ortogonales, »la punta *Q* no se mueva sino cuando la *P* lo haga en el sentido de las x, esto es, en el de au- »mento ó disminución de las superficies, escepto el caso en que *P* recorra porciones del perí- »metro del segmento dado, que se confundan con el eje mismo de las x, porque siendo en estos »trazos y = o, es nula la superficie del segmento y la punta *Q* no debe indicar ningún aumento »ó variación de superficie, aunque *P* se mueva en el sentido de los límites de la integral».

«Supongamos, por ejemplo, que según tales principios, la punta *P* (figura 49 - I) haya de »recorrer el perímetro del trapecio *a m m' p'*, cuyos lados *a p'* y *a m* son los ejes mismos de las x y de las y, y que la punta *Q* recorriendo el lado *Q T* (figura 49 - II) señale la cuadratura.

»De lo antes dicho se deduce, que la punta *Q* debe permanecer inmóvil cuando la punta *P* »recorre:

»1.° *El eje P X* de las *X*; en efecto; en tal caso, si bien en el sentido de las x tienen lugar los »aumentos ó decrecimientos de la superficie, el de esta ó de la integral no recibe variación, »porque, como se ha dicho antes, se tiene y = o para toda la línea *P X*.

»2.° *El eje M' y* de las y, porque entonces la integral no se extiende en el sentido de las x »por ser los límites x = o para la ordenada *M' m*.

»3.° *Una ordenada cualquiera* ó sea una *paralela cualquiera p' n al eje de las y*, porque »tambien en este caso la integral no recibe aumento con motivo de los límites iguales x = o y »x = p para la ordenada *p' n*.

»Ademas de las tres líneas *a m*, *a p'* y *p' m'* del perímetro *m a m' p'*, en cuyo recorrido debe »permanecer inmóvil la punta *Q*, hay la cuarta *m m'*, que se extiende en el sentido de los límí- »tes de la integral sin que respecto á ella sea y = o y que por esto, sea paralela ó inclinada al »eje *a p'* de las x, debe producir movimiento en la punta *Q* y dar la cuadratura de toda el área »*a m m' p'*.

»Para ver con que ley debe esto suceder, supongamos que en lugar del precedente trapecio »deba determinarse la superficie de la (figura 49-III) *A b b' b'' c'' a'''* compuesta de tres rectángulos »de igual base *A a'* = *a' a''* = *a'' a'''* = h y de las alturas *A b* = y, *a' b'* = y', *a'' b''* = y'', porque

907221

»de este sencillo caso de cuadratura de los rectángulos depende en general la de cualqui
»figura.

»Las respectivas superficies de estos rectángulos serán h y, h y′, h y″ y la de toda la figu
»h (y + y′ + y″).

»Recuérdese que en el rectángulo $A\,b\,c\,a'$ los tres lados $A\,a'$, $A\,b$ y $a'\,c$ no producen movi
»mientos en Q y solo le motiva $c\,b$. De la misma manera en los otros dos rectángulos los único
»lados que al recorrerlos la punta P hacen mover la Q son $c'\,b'$ y $c''\,b''$.

»Cuando la punta recorra la línea $A\,b$, la punta Q debe permanecer inmóvil.

»Cuando hallándose la punta P en b, al recorrer una línea $Q\,n$ (figura 49-II) tal que se
»el rectángulo $Q\,S \times Q\,n = A\,b\,c\,a' =$, h y ó sea la altura $Q\,n = \frac{h\,y}{C}$, en que C es igual á la base
»constante $Q\,S$.

»Del mismo modo cuando al recorrer el perímetro $c\,b'\,c'\,b''$ etc. con la punta P las líneas
»$b'\,c'$, $b''\,c''$, la punta Q (inmóvil en los casos dichos, esto es, cuando se lleva la punta P por
»$c'\,b'$, $c'\,b''$, $c''\,a'''$) deberá adquirir dos sucesivos movimientos y señalar primero la línea $n\,n'$ y
»despues $n'\,n''$ (figura 49-II) tales que sea $n\,n' = \frac{h\,y'}{C}$ y $n'\,n'' = \frac{h\,y''}{C}$

»Por consiguiente. multiplicando la línea $Q\,n''$ por la constante $Q\,S = C$ se obtendrá la su-
»perficie de la figura II; porque

$$Q\,n'' = Q\,n + n\,n' + n'\,n'' = \frac{h}{C}\,(y + y' + y'')$$

y $\qquad Q\,n'' \times C = h\,(y + y' + y'')$.

»Resulta de este ejemplo que: *sea cualquiera el número de los rectángulos de la figura III,*
»*con tal que se supongan siempre constantes las porciones* $A\,a' = h$, $a'\,a'' = h$, *etc., en que está di-*
»*vidido el eje de las x, deberá la punta Q, en tanto que la P recorra la base* $b''\,c''$ *de uno cualquie-*
»*ra de los rectángulos* $b''\,a'''$, *señalar ó recorrer una línea* $n'\,n''$ *proporcional á la altura del mismo*
»*ó á la ordenada cualquiera* $y'' = a'''\,c''$, *correspondiente á* $b''\,c''$.

»En efecto: las líneas $Q\,n = \frac{h\,y}{C}$; $n\,n' = \frac{h\,y'}{C}$, $n'\,n'' = \frac{h\,y''}{C}$... $n''\,T = \frac{h\,y^{(m)}}{C}$ son todas res-
»pectivamente proporcionales á las ordenadas y, y′... $y^{(m)}$, porque C y h se han supuesto
»constantes y esto se puede expresar mas concisamente, diciendo, *que la velocidad de la punta*
»*Q al recorrer Q T debe variar proporcionalmente á la ordenada.*

»Reuniendo las cuatro condiciones fundamentales antes enunciadas podrá establecerse
»que: es necesario y suficiente para que el instrumento compuesto de las dos puntas P y Q
»cuadre ó mida la superficie de una figura compuesta de un número cualquiera de rectángulos
»de base constante: *que la punta Q permanezca inmóvil mientras se recorre con la punta P:*

»1.° *El eje de las x.*

»2.° *El eje de las y.*

»3.° *Cualquiera paralela del eje de las y, con tal que la velocidad de la punta Q aumente en*
»*proporción de las ordenadas* $A\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$ *etc., cuando la punta P recorre respectivamente las*
»*bases iguales* $b\,c$, $b'\,c'$, $b''\,c''$... *de los rectángulos parciales.*

»Relativamente á esta última condición debe observarse que es necesario que mientras
»tiene lugar un aumento en la ordenada, cuando recorre una porción $A\,b$ ó $c\,b'$ ó $c'\,b''$..., este
»movimiento, inútil á la punta Q, que entonces permanece quieta, no sea inútil por el meca-
»nismo que relaciona las dos puntas, sino que disponga las piezas de manera que se obtenga el
»aumento antes indicado en la velocidad de Q, cuando recorre $b\,c$, $b'\,c'$, $b''\,c''$ etc.

»Consideremos ahora el caso mas general de la cuadratura de una curva plana cualquiera
»$m\,m'$ (figura 49-IV), es decir, del segmento comprendido entre el arco $m\,m'$, el eje de las ab-
»cisas y las ordenadas $A\,m$ y $p\,m'$ y veamos si las condiciones precedentes son suficientes para
»dar la superficie aun en este caso.

»A tal objeto obsérvese que las anunciadas condiciones, que deben realizarse por la correlación de los movimientos de las dos puntas P y Q para conseguir la cuadratura en el caso de los rectángulos de la figura 49-III, son en efecto independientes de la magnitud de las porciones constantes $A\,a' = a'\,a'' \ldots = h$, en que está dividido el eje $A\,a'''$ de las abscisas y que por lo tanto subsistirán para cualesquiera valores de h por pequeños que sean. De esta indeterminada y arbitraria pequeñez de h y de no motivar variaciones en las condiciones establecidas en lo que consiste el caracter de la cantidad infinitisimal, podrá deducirse, como es sabido, con todo rigor, mediante la teoría de los límites ó por otros medios de demostración empleados en el cálculo diferencial é integral, que si la máquina satisface exactamente á las mismas condiciones no solo para valores finitos de h sino para los menores que cualesquiera cantidad dada por pequeña que sea, cuadrará rigurosamente el segmento (figura 59-IV) limitado por una curva contínua cualquiera $mm.'$; porque se supone aquel dividido en una infinidad de rectángulos de base pequeñísima y constante, $A\,a' \ldots = dx$ y de altura igual á las respectivas normales $y, y' \ldots y^{(m)}$. Verémos como esto tiene lugar en la máquina que vamos á describir ya que obra con movimiento contínuo y satisface en cada instante á las condiciones establecidas.»

Como esto mismo sucede con el ingenioso y mas generalizado planímetro de Wetli describirémos este siguiendo lo dicho sobre él (1) por el ilustre Salmoiragui.

35 — Descripción del planímetro ortogonal de Wetli.

En la figura 50 se representa claramente este aparato, que se compone:

1.° De un tablero ó de un marco $A\,A$, con dos lados opuestos en parte paralelos y en parte concurrentes y de una barra intermedia, en que, como en aquellos, están abiertas unas ranuras ó guías $y\,y$, paralelas entre sí.

2.° Por estas guías, mediante tres ruedas b, b, b', corre suavemente un armazón, á que está sujeto perpendicularmente al plano inferior, ó sea el del tablero, el eje de un disco de cristal D, generalmente cubierto de papel de grano ó simplemente esmerilado y una regla B, que mediante cuatro ruedas horizontales $a\,a$ puede moverse perpendicularmente á la dirección de las guías y, y.

3.° En el extremo de la derecha de esta regla hállase el estilete P destinado á recorrer el perímetro de la figura, cuya superficie se quiere medir, el que mediante un hilo metálico bien estirado y con una vuelta arrollado al tambor t fijo al eje del disco D, hace girar á este cuando se mueve en el sentido de la longitud de la regla B.

4.° Fijo á uno de los lados del marco $A\,A$ y perpendicularmente al plano de la base, se encuentra el círculo graduado Z, que mediante las puntas de dos tornillos $\alpha\alpha'$ sostiene otro marco metálico T, que á su vez lo hace á un disco de cristal d, que se apoya tangencial y normalmente sobre el disco D y cuando de este recibe movimiento giratorio, por su eje, el piñón dentado que le está unido y la rueda que con él engrana, por medio de las agujas Q y q señala en el círculo graduado los giros completos y partes de ellos, que hace el mismo disco d, determinando el area de la figura, cuyo perímetro ha recorrido el punzón P.

Para que el hilo metálico tenga la tensión conveniente, en sus extremos se disponen tornillos ó tuercas apropiadas y para que el eje $\alpha\alpha'$ permita al marco T suaves movimientos y una pequeña corrección en el sentido horizontal, tambien se pueden apretar más ó menos los tornillos que le forman y es consiguiente que levantando un poco el marco T no girará el disco d ni consiguientemente las agujas Q y q, sea cualquiera el movimiento que se imprima al estilete P.

Suponiendo que las ranuras-guías, y, y, y', señalen la dirección del eje de las ordenadas, y, y la regla B la del de las abscisas x, se comprende fácilmente que este aparato satisface todas

(1) Istrumenti e metodi moderni... página 807-812.

las condiciones fijadas por Gonnela; porque la punta *Q* permanece inmóvil, aunque se mue la regla *B*:

1.° Cuando haciéndolo en la dirección de su longitud el disco *d* se encuentre sobre centro del disco *D*, en cuya disposición el punzón *P* recorrería el eje instrumental de las *x*.

2.° Cuando el armazón ó carro *C* se mueve en el sentido del eje de las ordenadas, esto es corre por las ranuras *yy'*, en cuyo caso la regla *B* lo hace paralelamente al eje de las *x* y el es— tilete señala líneas paralelas al de las *y*, y el mismo eje de estas cuando la aguja *Q* señala cero.

3.° Finalmente la velocidad de esta debe necesariamente aumentar proporcionalmente á la ordenada, *y*, porque siendo consiguiente su movimiento al que adquiere el disco *d* y este proporcional á la distancia de su punto de contacto con el disco *D* á su centro, cuando este dis- —

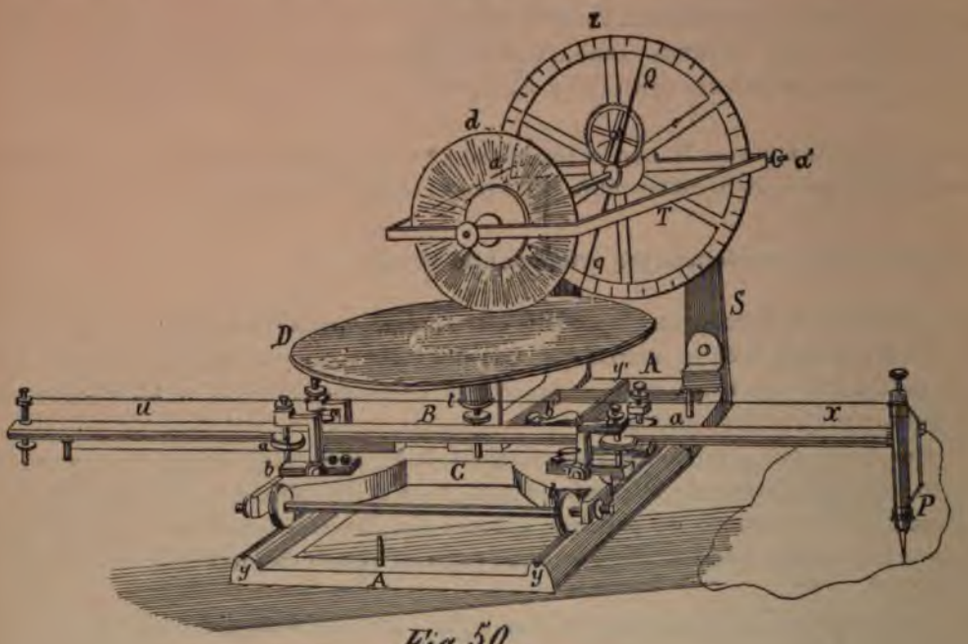


Fig. 50

co gira, es consiguiente aquel aumento de velocidad, esto es, de recorrido de la punta *Q*, que sucesivamente va marcando sobre el círculo graduado un número proporcional al producto de las coordenadas, *x y*.

En efecto: la longitud del hilo que con el movimiento de la regla *B* en sus guías se desarrolla en el tambor *t*, es igual á la distancia recorrida por el estilete *P* en el sentido del eje de las *x y* como hace girar al disco *D*, los distintos puntos de este trazarán arcos proporcionales á su distancia al centro y como el disco *d* girará en una cantidad igual al arco correspondiente á su punto de contacto, si con el movimiento del armazón en el sentido del eje de las ordenadas aquel ocupa la posición correspondiente á la magnitud de *y* y con el movimiento en el sentido de las abscisas en una cantidad *x*, llamando *r* el radio del tambor *t*, el arco de giro del disco *d* recorrido por el punto primero de contacto será igual á $x\frac{y}{r}$ y la aguja marcará en su limbo arcos proporcionales al producto *x y* ó sea el área del rectángulo que tiene por base *x* y por altura *y*.

Para que el estilete, *P*, pueda recorrer cualquiera recta ó curva, el constructor hace que sean suavísimos los dos movimientos ortogonales, á que aquel se debe sujetar, y por este medio se consigue el objeto, pues en cada momento sigue en porciones pequeñísimas aquellas direcciones en la parte necesaria para producir la conveniente que haya de recorrer.

Para generalizar la demostración, supongamos que tratando de medir la superficie del polígono $A\,B\,C\,D\,E\,F$ (figura 51), $X\,X$ é $Y\,Y$ sean los ejes coordenados y que colocado el estilete P del aparato en el punto D' señale cero la aguja indicadora, haciéndole recorrer la línea quebrada $D'\,A'\,A$ continuará señalando cero aquella, porque no adquiere movimiento cuando aquel recorre los ejes de las x y de las y; pero al hacerlo por la linea poligonal $A\,B\,C\,D$ describirá un arco proporcional á la superficie comprendida entre la poligonal, las ordenadas $D\,D'$ y $A\,A'$ y la abscisa $D'\,A'$ y como al recorrer la poligonal inferior $D\,E\,F\,A$ describe otro en sentido con-

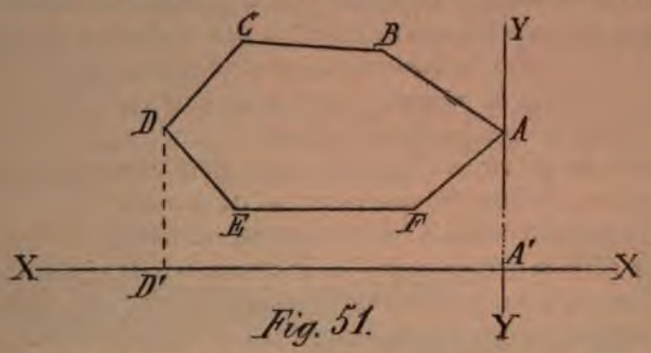


Fig. 51.

trario y proporcional á la superficie comprendida entre esta segunda poligonal y las mismas ordenadas y abscisa, es consiguiente que el arco que la aguja señalará, cuando el estilete vuelva al punto A, será proporcional á la superficie de la diferencia de las dos figuras ó sea la del polígono, cuyo perímetro ha recorrido el estilete P y basta que el constructor divida el círculo Z en partes que representen los centímetros y milímetros cuadrados para que por medio del aparato se consiga directamente la superficie de los polígonos (1).

VERIFICACIONES Y CORRECCIONES

Fácilmente se comprende, en vista de lo antes consignado, que, para que el aparato descrito cumpla su objeto, es condición precisa: que *los ejes de los dos discos y el del tambor se encuentren en un plano perpendicular al del tablero ó marco A A y al del círculo Z en todas las posiciones que pueda tomar el disco D y el estilete P y así tambien que la graduación del círculo Z esté de tal manera combinada que directamente exprese el número en centímetros y milímetros cuadrados del área ocupada por el perímetro recorrido por el estilete* y será por lo tanto necesario:

1.° *Que el hilo se halle arrollado en el tambor y en un estado de tensión tal que su desarrollo se verifique según la sección recta de aquel*, lo cual en caso necesario, se consigue mediante el tornillo de uno de sus extremos observando si durante los giros del tambor la parte arrollada á él y la que no estándolo se encuentra á uno y otro lado aparecen formando una sola recta y subiendo ó bajando la parte arrollada hasta que se verifique; pues, en otro caso, los giros ó partes de giro del tambor y por consiguiente del disco D no se corresponden con la distancia recorrida por el estilete.

2.° *Que en el movimiento de traslación del disco D pase su centro exactamente por el punto de su contacto con el disco d.* Para comprobarlo se produce tal movimiento por las ranuras $y\,y'$ hasta que á la vista aparezca la coincidencia de los dos puntos indicados y se justificará haciendo girar el disco moviendo la regla B en sus guías; pues, si aquella coincidencia es cierta, con el giro del disco D permanecerán inmóviles las agujas Q y q.

Si estas se mueven, indicarán que no hay la coincidencia deseada y se continuarán los tanteos hasta conseguirla y en último extremo se corregirá el defecto por los tornillos $\alpha\,\alpha'$, que

(1) En nuestro vehemente deseo de hacernos entender de los menos doctos utilizamos este razonamiento mucho menos elegante que el utilizado por Salmoiraghi y otros ilustres Ingenieros; pero le consideramos suficiente á quien atentamente haya leido los principios fundamentales establecidos por Gonnella.

en algunos aparatos de esta clase permiten dar un pequeño movimiento al marco *T;* pero como el defecto observado puede depender de que no se haya hecho el movimiento de traslación conveniente del disco *D*, no se debe acudir á la corrección, si no cuando por muchos tanteos se demuestre su necesidad.

3.° *Que el eje de rotación del disco D se halle en todas las posiciones que adquiere por su movimiento de traslación en el plano determinado por el eje del disco d y por aquel en la posición correspondiente á la corrección anterior.* Cuya condición se verifica cuando moviendo el disco *D* por el armazón *C* en las ranuras *yy'* las agujas *Q* y *q* permanecen inmóviles. Tambien para corregir el defecto que se observare en este concepto tienen algunos aparatos de esta clase tornillos, que permiten variar algo la posición del armazón con relación al plano de las ruedas, que sirven para el movimiento de traslación; pero es tan expuesto á causar mayores errores que se deben utilizar estos medios con mucha prudencia.

4.° *Que la graduación del círculo Z sea fidedigna.* Para comprobar esta condición, en la que al mismo tiempo van comprendidas todas las de construcción del aparato, se traza con mucho cuidado un rectángulo de dos ó tres decímetros cuadrados y apoyando el estilete en una regla, de manera que permita ver en todos los momentos la exacta coincidencia de la punta del estilete con las líneas que los determinan, se recorre su perímetro con movimiento moderado y suave, tomando nota del resultado acusado por las agujas, y repitiendo la operación tres ó cuatro ó mas veces, se compara cada uno con el área calculada considerando el aparato de buenas condiciones si las diferencias halladas no exceden del $^1/_{1000}$ del área medida.

Si todas las diferencias fueran en mas ó en menos, indicaría esto que el radio del tambor no es el que se tuvo en cuenta al hacer la graduación; si su error fuera pequeño, de manera que tambien lo fueran aquellas diferencias, podría subsanarse cambiando el hilo por otro mas delgado en el primer caso y mas grueso en el segundo.

Si las diferencias fueran notables, ó sino pudieran hacerse cumplidamente las correcciones segunda y tercera, lo mejor es remitir el aparato á la fábrica para su enmienda.

Para adiestrarse en el manejo de este aparato se deben hacer repetidos ejercicios sobre rectángulos de distintas y bien conocidas dimensiones y despues en círculos de radio determinado, porque para hacer recorrer al estilete perímetros curvos se han de realizar esfuerzos que sino son moderados y contínuos pueden motivar errores de alguna consideración, que se evitan con algunos ejercicios cuidadosos y repitiendo el recorrimiento del perímetro dos ó tres veces, siempre que se utilice el aparato, con el término medio de los resultados se pueden conseguir las superficies con menos error de $^1/_{1000}$ en las mayores de 10 centímetros cuadrados y no en las menores, porque siendo absoluto el error instrumental el relativo ha de ser inversamente proporcional á la superficie medida.

36 — Planímetro polar de Amsler.

Muchos son ya los modelos distintos que de este ingenioso aparato se han construído; pero como todos se fundan en el mismo principio de la descomposición de las figuras en sectores circulares de base infinitamente pequeña y en la teoría que estableció Amsler, sin perjuicio de hacer despues algunas indicaciones sobre los modelos principales mas modernos, creemos oportuno, para hacer mas fácilmente comprensible aquella, empezar por describir uno de los primeros mas sencillos y mas generalizados.

En la figura 52 se representa claramente en perspectiva y escala próximamente de $^1/_3$.

Compónese de dos varillas metálicas, una *C E* llamada *varilla polar* y la otra *A F*, *varilla del estilete*, unidas por un eje *C* mediante la pieza *H*, en cuyo hueco corre á suave rozamiento la segunda cuando se afloja el tornillo *N* y con movimiento lento en otro caso mediante la tuerca *M*, al objeto de graduar la distancia *C F* con arreglo á las divisiones practicadas en la regla *A F* mediante un índice señalado en el extremo del estuche *H* ó según convenga en vista de los resultados de las pruebas experimentales, que con el planímetro se hagan.

Paralelamente al eje de la varilla del estilete, *A F*, está convenientemente colocado el d de la rodaja *D*, cuya llanta forma pestaña con un tambor de metal blanco pulimentado mar fil artificial á ella unido y dividido en 100 partes con sus decenas numeradas permiti apreciar las décimas de cada una de aquellas un nonius situado en la prolongación superficie del tambor, y sujeto á la pieza *H*, por un tornillo, que permite corregir su posic

El eje de la rodaja, fileteado helizoidalmente, en parte hace de tornillo sin fin, que por dio de un piñón del eje vertical del platillo *G* produce el giro y de tal manera dispuestos por cada uno completo de estos corresponden 10 giros de la rodaja.

Los giros y partes de giro de este platillo se miden con un índice marcado en el resalto la pieza *H*, que atraviesa el eje de la rodaja.

Este, en algunos modelos, se fija mediante tornillos que permiten corregir su falta de p ralel ismo con el de la *varilla del estilete*, condición indispensable, y ademas sirven para qu siendo suavísimo el movimiento de la rodaja no cabecée.

Fig. 52

En el extremo de la varilla *A* se encuentra el estilete *F* de punta afilada, pero roma, á fin de que permita recorrer con exactitud el perímetro de las figuras sin arañar el papel y su eje debe ser perpendicular al de la varilla quedando fijo á ella para que sea constante la distancia de su extremo á la proyección sobre el mismo plano del eje, *C*, de giro de las dos varillas.

Al extremo de la otra *E* se halla un estuche porta-aguja, que se clava en punto conveniente durante cada operación y sirve de *polo* ó centro alrededor del cual gira durante ella todo el aparato; para evitar que en tales movimientos se desclave la punta de aguja se coloca sobre el estuche un peso *P*.

La aguja polar, el estilete y el punto de apoyo de la pestaña de la rodaja dan suficiente estabilidad al aparato, cuando la abertura de las varillas no es excesivamente grande, ni pequeña, y el estilete y el polo se disponen de manera que con el punto de contacto de la rodaja con el papel ó tablero determinen un plano paralelo al de los ejes de las varillas y de la rodaja.

El eje C de giro de las dos varillas no permite que formen un ángulo cualquiera sino solo de unos 170° próximamente en el sentido en que en la figura aparece, y de unos 30° en el contrario, lo cual ahorra precauciones, porque es condición teórica indispensable que la posición de las varillas sea la misma al principio que al fin de la operación y de no estar de aquella manera dispuestas, podrían tomar posición simétrica, no idéntica, lo cual conduciría á resultados erróneos.

Estando el disco *G* dividido en 10 partes numeradas, el tambor *D* en 100, numeradas sus decenas y el nónius dividido en 10 partes con los números indicadores 0-5 y 10, tomando por *unidad* cada una de estas, las del tambor no numeradas serán decenas, las numeradas centenas y las del disco *G*, millares, escribiéndose sucesivamente los resultados de cada observación á partir de estos, como luego se dirá.

Como quiera que el valor de la *unidad instrumental* depende directamente de la distancia del eje de giro de las dos varillas, *C*, á la punta del estilete *F* y en el aparato que se describe puede variar á voluntad mediante los tornillos de presión y coincidencia *N* y *M*, en la cara vertical de la varilla *A* llevan marcadas algunas distancias con las indicaciones siguientes:

10 □ m 1 : 1000 0'4 □ m 1 : 200	2 □ m 1 : 500 0'5 □ m 1 : 250	1 □ m 1 : 400	5 □ m 1 : 1000	1 □ m 1 : 500

que significan; que cuando la línea próxima está en coincidencia con el índice del extre
la pieza *H*, la unidad en el primer caso es de 10 m.² en los planos de escala de $^1/_{1000}$, de 0'4
la de $^1/_{500}$; en el segundo es de 2 m.² en la escala de $^1/_{500}$ y 0'5 m.² en la de $^1/_{250}$ y así de las d
estas relaciones las determina el constructor; el Topógrafo debe comprobarlas y en caso
sario corregirlas moviendo la varilla dentro de la vaina *H* con el tornillo *M*, pues la dife
será pequeña.

Cuando, como verémos despues, el polo se encuentra dentro del polígono, cuya sup
se quiere determinar, es necesario añadir á la deducida por la diferencia de las indicacior
disco, tambor y nónius el área del círculo que tiene por radio la distancia del polo al e
en determinadas condiciones *constante instrumental* y que naturalmente difiere en cada po
de las indicadas para la varilla *A* y tambien para cada aparato, y á este efecto las graba el
tructor en la cara superior de dicha varilla; en el aparato que tenemos á la vista, encima
primera señal hay 20791.

Es corriente que, como se deduce de la primera indicación anterior, para la mayor
tud de la varilla *A* la apreciación máxima del nónius corresponde á 10 mm.² del área ab
ocupada por la figura que se mide.

Como *observación general* debemos hacer constar que el recuento de las divisiones d
graduación debe hacerse tan solo de las *pasadas* por delante del índice respectivo en el s
creciente de la graduación, sopena de equivocarse; y relativamente al platillo *G*, que por
cer de perfecto ajuste el tornillo sinfin y el piñón, aunque las divisiones se presenten a
temente delante del índice, no deben contarse sino cuando el cero del tambor adelante y
nónius, sin cuya precaución se cometería el gravísimo error de contar improcedentement
unidades de mas y para evitarlo en lo posible debe corregirse el movimiento de maner
coincida cada cero con su índice y colocarlos en esta posición al empezar la medición.

Finalmente, debe tenerse presente que son datos teóricos esenciales, la longitud de l
cunferencia de la pestaña de la rodaja, que debe conservarse perfectamente limpia, la dis
de su plano medio al paralelo que pasa por el eje de giro *C* de las dos varillas y la de este
mo al extremo del estilete, por lo cual este se ha de conservar siempre fijo á la varilla y
pendicular á su plano superior, y es preciso ademas que el plano que pasa por el extrem
estilete y el eje de giro *C* sea perpendicular al mediano de la pestaña.

TEORÍA DEL PLANÍMETRO DE AMSLER (1)

Para comprenderla fácilmente débese observar en primer lugar, que ademas del mov
to general del aparato alrededor del polo en cada caso elegido, la rodaja tiene otro esp
exclusivo dependiente del primero y variable según que se presente normalmente ó inc
en uno ú otro sentido á la dirección del movimiento del estilete.

Aquel movimiento de la rodaja es producido por el rozamiento que origina el pe
aparato al moverse éste apoyándose en ella sobre el plano del dibujo y aunque sus razo
particularidades son del dominio de la Mecánica, fácilmente se comprende y experim
mente se puede comprobar:

1.° Que cuando el eje de la rodaja es paralelo á la dirección del camino que recorre
tilete (figura 53 - I), el rozamiento no origina rotación alguna en aquella, que se desliza
el papel, sino que tan solo produce una presión de las espigas del eje en las ranuras.

2.° Que si el eje de la rodaja es perpendicular á la dirección del movimiento del e

---

(1) Esta teoría y muchas de las nociones que sobre la medición mecánica de las áreas dejamos consi
se las debemos al distinguido Ingeniero de montes Don Eugenio Guallart, competentísimo en la materia,
solo nos ha proporcionado su interesante *Monografía del planímetro contador*... y la descripción de su *Pa
fo-planímetro* sino que en comunicación especial nos dió explicaciones sencillas y muy demostrativas, con
hemos podido poner la de esta teoría al alcance de los menos doctos; y creemos un deber de conciencia
narlo aquí para que no se nos atribuya un mérito, que por completo corresponde á tan inteligente como la
Ingeniero.

(figura 53 - II) el arco rodado por la pestaña de aquella es igual al camino recorrido por el estilete.

3.° Que si el referido eje forma un ángulo *C* (figura 53 - III) por la *parte inferior* del camino que recorre, con la dirección de este, la rodaja gira en el sentido del movimiento de las agujas del reloj en una cantidad tal que el arco rodado por la pestaña es igual al camino total multiplicado por el seno del ángulo *C*, pues el trasporte desde *r* hasta *q* puede considerarse realizado por *r p q*, y según lo expresado en los casos 1.° y 2.°, el camino rodado es el *p q*, que como cateto de un triángulo rectángulo, guarda con la hipotenusa la antedicha relación y

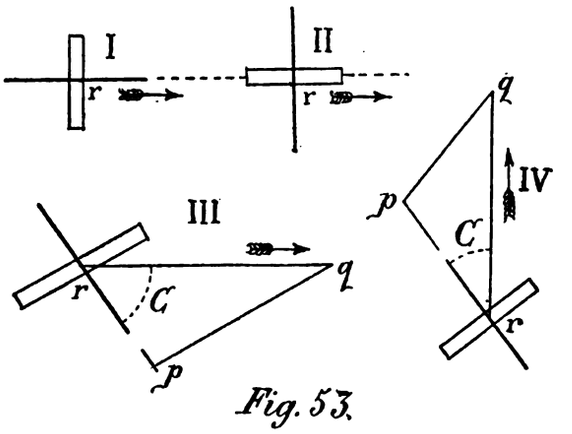


Fig. 53.

4.° Finalmente, que si la misma región del eje, la que está del lado del movimiento, forma un ángulo *C* (figura 53 - IV) *por encima del camino recorrido,* el arco rodado por la rodaja es tambien igual al producto de este por el seno de *C,* pero la rotación tiene lugar en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

Fácil es, despues de esto, darse cuenta exacta del funcionamiento del aparato y la posibilidad de que cumpla las condiciones fundamentales; esto es: que permitiendo medir sectores circulares cualesquiera, su área venga acusada por el contador y que automáticamente realice el aparato la suma ó diferencia de los sectores elementales; pues se demuestra sencillamente que la relación entre lo que indica el contador y el área del *sector anular,* que directamente puede recorrerse con el estilete del aparato, es siempre constante é independiente de su conformación.

Para comprobarlo utilizarémos la figura 54 esquemática del aparato y en la que:

P es el polo;
E el estilete;
R el plano medio de la rodaja,
C el eje de giro de las dos varillas;
P C la polar y C E la del estilete;

indicando con las mismas letras y el sub-índice, iguales partes del aparato en una primera posición, que define su *constante instrumental,* es decir el área de un círculo de radio constante P E, dependiente de las dimensiones del aparato y *cuya circunferencia es la base comun de todos los sectores anulares que con él se miden;* radio constante P E determinado por la condición de que el plano de la rodaja pase por el polo P (1) y vamos á demostrar á la vez *que basta recorrer con el estilete el arco* E F *para poder determinar inmediatamente el área del sector anular* E F K H.

En efecto; llamando α al ángulo del sector y S al área buscada, tendrémos, recordando nociones elementales de Geometría:

---

(1) La longitud de este radio constante se deduce en función de las dimensiones del instrumento por medio de los dos triángulos rectángulos P R, E, y P R, C, de la manera siguiente:

$$\left.\begin{aligned} P E_1 &= \sqrt{\overline{P R_1}^2 + \overline{R_1 E_1}^2} \\ \overline{P R}^2 &= \overline{P C_1}^2 - \overline{R_1 C_1}^2 \end{aligned}\right\} P E_1 = \sqrt{\overline{P C_1}^2 - \overline{R_1 C_1}^2 + \overline{R_1 E_1}^2} = \sqrt{\overline{P C_1}^2 - \overline{R_1 C_1}^2 + (R_1 C_1 + C_1 E_1)^2}$$

$$= \sqrt{\overline{P C_1}^2 - \overline{R_1 C_1}^2 + \overline{R_1 C_1}^2 + 2\, R_1 C_1 \times C_1 E_1 + \overline{C_1 E_1}^2} =$$

$$\sqrt{\overline{P C_1}^2 + 2\, R_1 C_1 \times C_1 E_1 + \overline{C_1 E_1}^2}$$

expresión de valor constante para cada aparato y distancia C, E, del eje de las varillas á la punta del estilete y que conviene conocer para comprender su dependencia de las dimensiones instrumentales y especialmente la R, C, que es dificilísima de apreciar con exactitud.

Area $EPF = {}^1/_2$ arc. $EF \times EP = {}^1/_2$ ang. $\alpha \times \overline{EP}^2$ (1.ª)

Area $HPK = {}^1/_2$ arc. $HK \times HP = {}^1/_2$ ang. $\alpha \times \overline{E,P}^2$ (2.ª)

luego $S = {}^1/_2\, \alpha\, (\overline{EP}^2 - \overline{E,P}^2)$: (3.ª)

pero en el triángulo PCE se tiene:

$\overline{EP}^2 = PC^2 + CE^2 + 2\, PC \times CE \times \cos.\, PCE = PC^2 + \overline{CE}^2 + 2\, PC \times CE \times \cos.\, RCP =$

y en el triángulo R,E,P según lo demostrado en la nota anterior (1):

$\overline{E,P}^2 = PC,^2 + 2\, R,C, \times C,E, + C,E,^2 = PC^2 + 2\, RC \times CE + CE^2$

y por lo tanto

$\overline{EP}^2 - \overline{E,P}^2 = 2\, CE\, (PC \cos.\, RCP - RC)$ (4.ª) sustituyendo en (3.ª)

y $S = \alpha \times CE\, (PC.\, \cos.\, RCP - RC)$ (5.ª)

Como el ángulo descrito por el movimiento del aparato es α y no hay en el caso supuesto deformación en la disposición de las varillas, el punto de apoyo de la rodaja, R, se moverá sobre la circunferencia de un sector de ángulo α y de radio RP y como el ángulo del eje de la rodaja es constante con la dirección del camino recorrido, que es en cada instante la tangente RT á la circunferencia de radio RP y este ángulo por la perpendicularidad del radio y de la tangente es complementario del MRP, resultará que el *camino rodado por la pestaña*, acusado por la graduación del contador será:

camino $= RP \times \alpha \times \cos.\, MRP = \alpha \times RP \times \cos.\, MRP$;

pero RP cos. MRP es igual á la proyección MR y esta á su vez lo es á MC—RC ó lo que es lo mismo á PC cos. RCP—RC y así tendremos que

camino $= \alpha\, (PC \cos.\, RCP - RC)$ (6.ª) y dividendo (5.ª) por (6.ª).

$\frac{S}{camino} = CE$ y $S = CE \times$ *camino* ó bien

$\frac{S}{camino} =$ *constante* y $S =$ *lectura* + *constante* (7.ª)

lo que justifica las dos proposiciones establecidas.

Tomando unidades concordantes, el mm.² para las áreas y el mm. para el arco rodado y para la longitud de la varilla del estilete, se comprenderá el porqué de la determinación de las áreas y el fundamento de la graduación del aparato.

Es conveniente é instructivo interpretar estas igualdades en el sentido de que el área del segmento anular es equivalente á la de un rectángulo que tiene por dimensiones la longitud de la varilla del estilete y la del camino rodado por la pestaña de la rodaja.

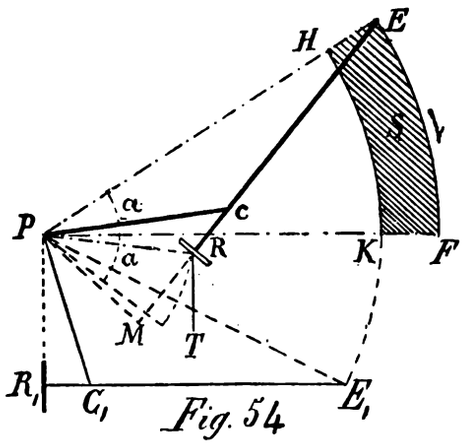


Fig. 54

Esta misma propiedad subsiste cuando el ángulo del sector es pequeñísimo y como al recorrer con el estilete el contorno de la figura la rodaja rueda ya en un sentido ya en el opuesto se comprende fácilmente que así se puedan sumar ó restar las áreas de las superficies elementales apareciendo el resultado final en el contador.

Sin embargo es conveniente y aun necesario hacer algunas aclaraciones para que no queden dudas sobre la manera de operar.

Si el contorno de la figura *envuelve* por completo á la circunferencia de radio constante, el eje de la rodaja formará con el camino recorrido por el punto de apoyo un ángulo C variable, pero *siempre por la parte inferior*, por lo que todos los giros elementales, suponiendo que ni el estilete, ni el aparato en junto retrocedan nunca, tendrán siempre lugar en el mismo sentido y,

de sujección del eje de la rodaja y otros, por lo cual *es poco recomendable esta manera de operar con el polo interior.*

Es preferible, cuando la superficie que se ha de medir no es muy grande, y cuando lo es subdividiéndola, colocar el polo *exteriormente* á ella; pues entonces la diferencia de lecturas, que si el recorrido se hace en el sentido cíclico directo *es siempre positiva*, da directamente la superficie sin necesidad de tener en cuenta la *constante instrumental.*

Las adjuntas figuras (56 - I, II, III) justifican esta conclusión considerando que, aunque el estilete recorra el contorno en el sentido cíclico directo correspondiente al aparato, el general de este y por consiguiente el del contador es unas veces de avance y otras de retroceso.

Asi en la I, se comprende después de lo dicho, que durante el recorrido A B C medirémos el área positiva K A B C K' y al regresar por C D A la negativa K'C D A K (negativa por ser ex-

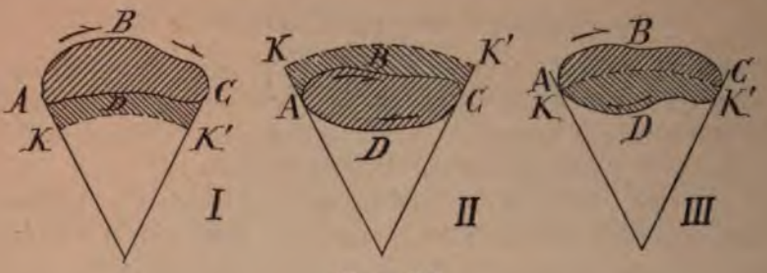


Fig. 56.

terior al círculo constante K K'... y porque el movimiento del estilete es de retroceso ó indirecto) y por lo tanto su diferencia ó la de las lecturas, que respectivamente les corresponde, da la de la superficie A B C D A.

En la II durante el recorrido A B C medirémos la superficie negativa A B C K'K (negativa por ser interior al círculo constante K K'... y hacerse el recorrido en el sentido cíclico directo) y al regresar por C D A la positiva K'C D A K (positiva por ser interior y hacerse el recorrido en el sentido cíclico indirecto) y por consiguiente la diferencia de las lecturas, que respectivamente las representan, dará tambien la superficie de la figura.

En la III, dibujada expresamente para un caso particularísimo, al recorrer la porción K A B C K' medirémos un área positiva (la exterior á la circunferencia constante K K'...) y al regresar por K'D K otra tambien positiva (por ser interior al círculo constante y el movimiento cíclico indirecto) y por lo tanto se sumarán las graduaciones, dando la superficie total de la figura.

VERIFICACIONES Y CORRECCIONES

Cuando un planímetro no satisface á las condiciones geométricas antes indicadas, es muchas veces muy difícil de corregir, por cuyo motivo solo deben adquirirse de las fábricas mas acreditadas; pero otras veces sus defectos se pueden subsanar fácilmente y por eso deben desde luego sujetarse á comprobaciones experimentales.

Débese en primer lugar asegurarse de que el aparato se encuentra en buen estado y al efecto observar:

1.° Si la rodaja D se mueve fácilmente sin tocar al nónius y sin cabecear; cuyo defecto podrá algunas veces corregirse por medio de los tornillos de que hemos antes hablado.

2.° El eje C debe permitir los giros de las varillas suave y fácilmente sin balanceo, que en caso de existir no será fácil de corregir.

3.° Las varillas deben conservarse rectas y la del estilete deslizarse suavemente en la vaina H, cuando está flojo el tornillo N y cuando apretado moverse mediante la tuerca M.

4.° El estilete debe estar bien seguro y perpendicular al eje de su varilla y su punta, la del estuche del polo, cuando la aguja está clavada y el punto de apoyo de la pestaña de la rodaja

deben determinar un plano paralelo al de los ejes de las varillas y conservarse perfectamente limpia la pestaña de la rodaja.

5.° Finalmente; la varilla del estilete debe tener la longitud conveniente á la relación de áreas que se deseare utilizar; á este efecto, si por ejemplo, se quisiera utilizar la de 10 m.² en la escala de $^1/_{1000}$ ó sea la que corresponde á 10 mm.² del área absoluta del plano por unidad del nónius, se empezará por hacer coincidir la línea correspondiente de la varilla con el índice puesto al extremo de la vaina H mediante los tornillos de presión y coincidencia N y M y para comprobar su exactitud y el buen funcionamiento del aparato se construirá en el papel del dibujo un rectángulo de 2 decímetros cuadrados, que valen 20.000 mm.² ; se fija el polo fuera de su perímetro de manera que colocando el estilete en el centro próximamente, el plano de la rodaja pase por aquel como esquemáticamente aparece en la figura 57, se lleva despues el estilete á uno de los vértices, mediante el giro de la rodaja (1) se ponen en coincidencia los ceros del disco, tambor y nónius con sus índices correspondientes y apoyando el estilete sobre el canto de una regla se recorre con movimiento regular exactamente el perímetro del rectángulo en el sentido *directo del aparato*, cuidando de observar los giros completos del disco G y contando estos (cada uno vale 10 giros completos de la rodaja), las partes de giro del disco, (cada una correspondiente á un giro completo de la rodaja ó 10.000 mm.²), las divisiones numeradas y no numeradas del tambor, que no hayan pasado del cero del nónius (que serán las centenas y decenas de 10 mm.²) y las partes de este que se hayan de tomar (que son las unidades de 10 mm.²) se verá si corresponde el área dada por el aparato con la conocida del rectángulo; en el caso supuesto el disco marcaría 2 y el cero del tambor y nónius deberán coincidir, si el aparato es de buenas condiciones, y está bien corregido.

Rara vez se consigue tanta exactitud, aunque el aparato se halle corregido, porque es de todo punto imposible llevar la punta del estilete por la finísima línea, con que se debe construir el rectángulo de prueba; pero con un poco de práctica y cuidado al repetir la operación dos, tres ó cuatro veces, como siempre debe hacerse, las diferencias no suelen exceder de dos ó tres unidades del nónius.

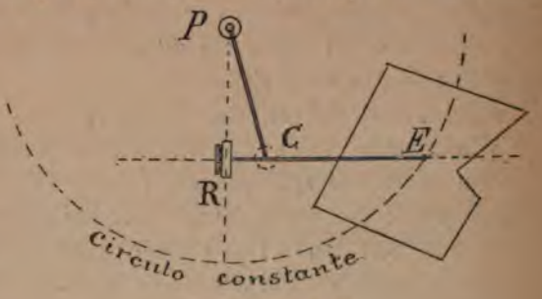


Fig. 57.

Si estas diferencias son ya en un sentido ya en otro, se puede considerar el aparato corregido, cuidar de repetir todas las mediciones dos ó tres veces y tomar el término medio; pero, si tales diferencias ú otras algo mayores son siempre positivas ó negativas, indicarán ordinariamente que la varilla del estilete es demasiado corta ó demasiado larga y fácilmente se corregirá el defecto por tanteo mediante la tuerca M.

Si las diferencias fueran notables y no se consiguiera corregirlas con la rectificación de la varilla del estilete, indicará esto otros defectos del aparato, que el Topógrafo no puede corregir y debe devolverse á la casa constructora; pero rara vez esto sucederá, cuando procedan de talleres acreditados.

Para evitar los inconvenientes, no graves en verdad, que ofrece la exacta construcción del rectángulo y de su recorrido, se utiliza por algunos una plancha de metal, en que por medio de finas ranuras se marca tal figura por el constructor y cuyo perímetro se recorre mas fácilmente, porque entra en aquella la punta del estilete evitando desvíos del perímetro que produzcan errores que, siendo propios del manejo del aparato, se atribuyen á este, y muchas veces al mismo efecto se utilizan unas planchas alargadas tambien de metal, que en un extremo llevan un eje y á distancias bien determinadas puntos, en que se apoya el estilete, de manera que haciendo

(1) Para que se conserven perfectamente limpios la pestaña y el tambor, el dedo con que se produzcan estos giros se debe envolver con un trapo limpio y seco, con un guante, etc., etc.

girar á aquella, se obliga á este á recorrer una circunferencia de radio conocido y comparando la superficie del círculo con la indicada por el aparato se comprueba su estado y condiciones; mejores son estos medios, pero no indispensables para la comprobación de los aparatos y el primero tiene la ventaja de servir al propio tiempo de ejercicio y para hacer ver la precisión, que se puede conseguir en la práctica corriente.

Comprobado y corregido el aparato, para medir el área de una figura se procederá de la manera siguiente:

1.° Si es de regular extensión, se pondrá el polo del aparato fuera de ella en la forma antes indicada, se clavará ligeramente el estilete en uno de sus vértices y despues de hacer la coincidencia de los ceros con sus índices respectivos, se recorrerá con movimiento regular y contínuo exactamente el perímetro en el sentido directo del aparato (en el que tenemos á la vista de derecha á izquierda ó de N. á O., S. y E. ó contrario al movimiento de las agujas del reloj) hasta llegar al punto de partida; se verá las partes del disco, tambor y nónius que hayan pasado de sus índices, y, teniendo en cuenta lo antes dicho sobre las primeras, se escribirán sucesivamente; se repetirá la operación y anotación, viendo si la diferencia con la anterior es próximamente igual á ella, y repitiendo el recorrido nuevamente se hará la misma observación, y si no acusaran errores mas ó menos de 2 ó 3 unidades del nónius, se tomará el tercio de la última lectura, que se utilizará para la determinación del área.

Si al recorrer el perímetro, ó porque se vaya la mano ó por equivocación, se pasa de un vértice ó se separa de aquel, se vuelve á atrás por el mismo camino y no hay necesidad por esto de anular la operación, porque por este medio lo queda el error.

Procediendo de la manera expuesta no hay mas que multiplicar el número resultante con las partes del disco, tambor y nónius, por el número de milímetros correspondientes á la unidad del último, según la longitud de la varilla del estilete, para tener los ocupados por la figura y multiplicando el producto por el de metros que, según la escala, corresponda en el terreno á cada milímetro del plano se tendrá la superficie buscada; es decir, que si en el disco ha pasado del índice una de sus divisiones

en el tambor del cero del nónius 75

y la línea del nónius en coincidencia es la 8.ª

el número será 1758 que, en el supuesto de estar en coincidencia con el índice de la vaina H la línea de la varilla del estilete designada por 10 metros $\square$ $^1/_{1000}$ multiplicarémos por 10 milímetros^2 resultando 17580 milímetros^2 y si el plano está construido en la escala de $^1/_{1000}$ nos dirá que la superficie del terreno es de 17580 metros^2.

Algunos Autores aconsejan que despues de colocado el aparato en las condiciones indicadas para empezar el recorrido del perímetro se lea y anote el número de partes del disco, tambor y nónius, tomando este número como inicial que despues se resta del que acuse el aparato despues del recorrido del perímetro para tener el correspondiente al área de la figura; ninguna ventaja ofrece este procedimiento sobre el antes aconsejado y sí el inconveniente de que dé lugar á equivocaciones si el disco por hallarse no muy lejos de su cero termina el giro y no se tiene esto en cuenta.

Mas expuesto á ellas es todavía el no tener en cuenta al mover el estilete el *movimiento directo* que al aparato corresponde, pues si bien estando advertido se puede utilizar restando del número inicial el final, muchas veces complica la operación, muy especialmente si se repite para comprobar y aumentar la apreciación.

El procedimiento aconsejado es el mas sencillo y menos expuesto á equivocaciones.

2.° Si la extensión de la figura es bastante grande, para que no pueda determinarse su área colocando el polo del aparato fuera de su perímetro, para conseguirlo se la dividirá en varias partes sumando después sus áreas ó se colocará el polo dentro del perímetro para hacerlo de una vez: en este caso después de tomar las precauciones antes dichas y de recorrer el perímetro con todo cuidado, al número acusado por el aparato, número que en algunos casos puede ser negativo y en esto se ha de fijar mucho la atención para no incurrir en errores perniciosos, se

En el representado en la figura 59 además de las ventajas anteriores se consigue mayor regularidad en el movimiento giratorio de la rodaja, evitando los errores consiguientes á la excesiva granulación ó satinado del papel, porque siempre tiene lugar sobre la superficie del disco superpuesto á la rodaja; pero ademas de dificultar el examen del contador aumenta considerablemente el precio, que llega en la casa referida á 215 francos.

El *planímetro-pantógrafo* del mismo Amsler, representado en la figura 60, sirve para medir

Fig. 59

las áreas de figuras muy pequeñas y de las de mediana extensión; pues siguiendo el perímetro de las primeras con el estilete *f* se cuenta en el contador el área correspondiente á la de otra semejante recorrida por el *F* y como hay que dividir el resultado por la relación entre las dos figuras, el error absoluto lo quedará también ganándose algo en precisión y también en comodidad, pues con alguna práctica se puede dirigir el estilete *f* manejando el *F*.

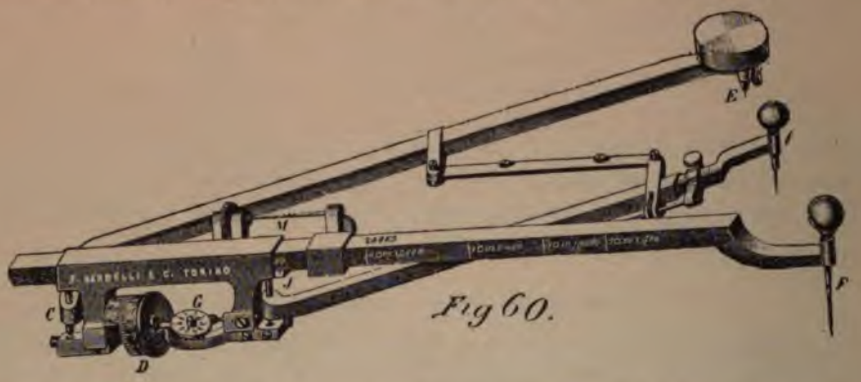


Fig 60.

Finalmente en la figura 61 se representa el *planímetro polar de precisión con disco rotativo de Coradi*, en que, se dice, puede apreciarse de 0'5 milímetros² á 2 milímetros², que es bastante mas de lo que se puede conseguir con el ordinario y mas generalmente utilizado, por lo que Mr. Lallemand le ha empleado en la medición de las áreas de los predios y parcelas construídas

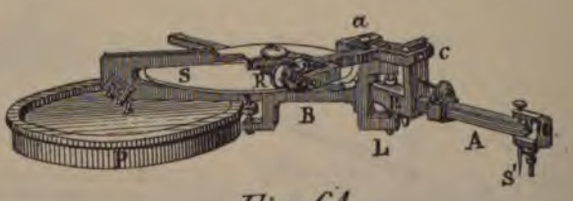


Fig. 61.

sobre la plancha matriz de zinc del nuevo Catastro de *Neuilly-plaisance;* pero como reservó su uso para las grandes parcelas (1) empleando en las pequeñas un cristal rayado de las condiciones expresadas en la figura 45 y declara que «*el error probable de las superficies es de cerca de* $^1/_{900}$ *en las superiores á una hectárea y de* $^1/_{300}$ *en las pequeñas parcelas de menos de 10 áreas*» se deduce que aquella grande precisión es mas supuesta que real y como ademas el mismo Mr. Lallemand ya dice que su manejo es delicado, parécenos que sus ventajas sobre el ordinario no

(1) Memoria de Mr. Lallemand, pág. 17, sobre los trabajos del nuevo Catastro de Neuilly-plaisance.

plano en un pequeño número de polígonos, que abracen completamente otros antes considerados y puedan medirse de una una vez con el polo exterior á su perímetro y se procederá á hacer análoga comprobación y distribución de las diferencias tolerables, y despues de tomar el término medio de las diferencias, se deducirá de mayor á menor el área correspondiente á cada sección, predio y parcela.

Para evitar equivocaciones y sobre todo componendas, conviene seguir la regla establecida en los trabajos catastrales y otros semejantes, es á saber: que las áreas se determinen separadamente por dos operadores distintos, y á ser posible, por dos procedimientos diferentes, comparando los resultados y tomando el término medio, cuando ambos fuesen aceptables; pero si uno de los procedimientos fuera el numérico y otro el mecánico, debe el resultado de este servir de comprobación admitiéndose el del primero por ser mas exacto.

Si al medir el área de un plano se observare que por el tiempo trascurrido desde su construcción, ó por otra causa cualquiera, se habían alterado las dimensiones que el papel tenía al construir aquel, lo cual se comprobará fácilmente cuando al hacerlo se construyó una cuadrícula decimétrica exacta, como conviene hacerlo siempre á este y otros efectos, midiendo varios de estos cuadrados se determinará la alteración superficial ocurrida calculando el coeficiente por el que habrían de multiplicarse las áreas actuales para convertirlas en las correspondientes al tiempo de la construcción del plano, procediendo de la manera siguiente.

Supongamos que el primitivo decímetro cuadrado resulta tener en el momento de la medición de las áreas:

las bases de 103 milímetros
y las alturas de 101, »

su área será de 10.403 milímetros² en lugar de 10.000, ó sea, 403 milímetros² de mas y por con-

---

se cuando una de ellas se hace por el procedimiento numérico, porque en otro caso habría de expresarse en milímetros² teniendo en cuenta la escala del plano.

Suponiendo que esta sea la de $^1/_{2000}$ aceptada como normal de aquel Catastro, y las áreas gráficas las admitidas por Lorber para sus experiencias, resultaría:

Para las áreas gráficas de	Superficie del terreno correspondiente	Error temible experimental	Tolerancia según la 1.ª fórmula
10 ctm.²	4.000 m.²	53 m.² ó 1'3 por 100	48 m.² ó 1'2 por 100
20 »	8.000 »	53 » 0'6 »	70 » 0'87 »
50 »	20.000 »	57 » 0'28 »	119 » 0'59 »
100 »	40.000 »	57 » 0'14 »	180 » 0'45 »
200 »	80.000 »	61 » 0'08 »	278 » 0'35 »

Estos resultados son dignos de fijar la atención, porque ponen en evidencia no solo la procedencia de las precedentes observaciones, si no tambien, que si en la medicion de las superficies gráficas con los planímetros sin variar de una manera apreciable el error absoluto ha de disminuir el relativo con su extensión, en las tolerancias no sucede enteramente lo mismo, pues disminuyendo los segundos aumentan los primeros, siendo ambos mayores, como corresponde á la tolerancia con referencia á la precisión.

A análogas consecuencias se llega haciendo la comparación de los errores experimentales hallados por Lorber con el planímetro de Amsler, con los resultados de la fórmula de la tolerancia prevenida en el nuevo Catastro de Alsacia-Lorena, reputado por uno de los mas perfectos; esta fórmula se aplica á los planos construídos en la escala de $^1/_{1000}$ y es como sigue:

$$t = 0'006 \sqrt{A + 0'01\ A^2};$$

en que t y A representan hectáreas, pues se tiene:

Para	10 centímetros²	A = 0'1;	t = 0'0019	ó 1'9	por 100
»	20 »	A = 0'2;	t = 0'0027	ó 1'3	»
»	50 »	A = 0'5;	t = 0'0043	ó 0'86	»
»	100 »	A = 1'0;	t = 0'0060	ó 0'60	»
»	200 »	A = 2'0;	t = 0'0090	ó 0'45	»

Comparando estos resultados con los de la aplicación de la fórmula del Catastro italiano, se observa que aun que el tanto por 100 es algo mayor para las mismas áreas gráficas, el error absoluto es menor consiguientemente á la mayor escala utilizada en el Catastro de Alsacia-Lorena, lo que permite mayor apreciación.

siguiente para reducir las áreas gráficas actuales á las correspondientes al tiempo de la construcción del plano habrá que multiplicar cada una de las halladas por $\frac{10.000}{10.403} = 0'961$ despreciando las fracciones de milímetros²; estas multiplicaciones se realizan de una vez sencillamente con nuestro Círculo logarítmico ó con la regla logarítmica, pues como es constante el factor 0'961 todos los productos se leen enfrente del otro factor en una sola posición del disco del primero ó de la reglilla de la segunda, y no hay que hacer la reducción hasta tener las áreas definitivas, pues, en las comprobaciones y compensaciones, es lo mismo operar con las medidas segun las dimensiones actuales del papel que con las correspondientes al tiempo de la construcción.

38 — Comprobación de los planos.

Es tan importante y necesaria la completa comprobación ó verificación de los planos, que por no hacerse en debida forma en muchos servicios públicos y en todos los particulares, ni los proyectos que sobre ellos se hacen reunen las condiciones técnicas y económicas que debieran, ni los replanteos son fáciles y precisos, ni se generalizan los excelentes aparatos y procedimientos topográficos modernos; porque no haciéndose diferencia entre los buenos y malos planos, no se pagan los primeros lo que valen y cuestan y no hay estímulo para realizarlos ni para conocer los medios mejores de conseguirlos, y de aquí resulta que la Topografía no es apreciada en su verdadero valor ni ha progresado si no en los países en que se han realizado buenos Catastros parcelarios ó prediales, que exigen como condición sine-quanon, la completa comprobación de los planos y su máxima precisión, especialmente si aquellos tienen el carácter de jurídicos.

En la *Parte siguiente*, al ocuparnos de la verificación de los planos numéricos, darémos á conocer un procedimiento sencillísimo y muy exacto, que puede tambien aplicarse á la comprobación de los planos gráficos de que hasta ahora nos hemos ocupado; pero en este lugar solo lo harémos de los que generalmente se aplican por ser aquel hasta ahora poco conocido.

Lo primero que debe hacerse para una completa comprobación es examinar detenidamente los registros y cróquis, que sirvieron en el levantamiento, viendo si los aparatos y procedimientos en cada parte utilizados fueron los convenientes y necesarios y si las diferencias entre las dobles mediciones de las distancias y los ángulos están comprendidas en los límites de la tolerancia para cada uno señalada, (1) el resultado de las comprobaciones directas y el de los cierres mecánicos y gráficos y la forma en que se hizo la construcción y resultado que se consiguió, á cuyo efecto y para evitar arreglos y componendas se ha de examinar el plano borrador y, cuando fuera posible, tomar las disposiciones oportunas para que no se modifiquen los datos verdaderos, que en el trabajo de campo se anotaron en aquellos y resultados de los cálculos que en el campo ó en el gabinete se realizaron, como así se dispone en las Instrucciones de los centros catastrales y otros análogos.

Hecha esta verificación preliminar en el gabinete, que ya puede dar idea bastante de las condiciones del trabajo, con los cróquis, registros y plano borrador, ó un calco de él, se procede á hacer un detenido reconocimiento de las líneas características del terreno comparando á la vista su forma con la en que aparece en el plano, midiendo, en caso necesario, algunas distancias parciales y ángulos por el sistema de las cuerdas ó con un goniómetro, aunque esto rara vez será necesario, pues basta el procedimiento de las cuerdas para comprobar los ángulos de las parcelas y predios pequeños, que deben ser objetivo preferente en este reconocimiento.

En él se buscarán los puntos notables determinados en el plano, que puedan servir de base para alineaciones rectas ó quebradas generales ó parciales en diferentes sentidos, que corten el mayor número de líneas características de los accidentes del terreno y trazándolas en el plano

(1) Véanse los señalados en los números 8 á 11.

borrador se medirán con todo cuidado sobre él las porciones comprendidas sucesivamen
re tales intersecciones, sus distancias á los vértices de las parcelas intersecadas haciendo
lo sobre el terreno con cinta de acero comprobada ó por otros medios seguros, se comp
los resultados viendo si las diferencias están en los límites señalados para las distancias
el diastímetro utilizado en el levantamiento; pero cuidando de aumentarlos el error cons
te á la medición gráfica sobre el plano, que al menos ha de ser o'0003 N, siendo N el d
nador de la escala del plano, pues no debe olvidarse que en la medición gráfica hay qu
dos apreciaciones y es difícil de no cometer en cada una el error de o'2 mm.

Si se eligen con buen criterio las indicadas alineaciones y midiéndolas con la may
cisión es aceptable el resultado de la comparación de la magnitud de sus partes y las
distancias indicadas (1) con las correspondientes medidas sobre el plano, se puede estar
de las buenas condiciones de este, porque en aquella comprobación va englobada la de l
ras y por consiguiente la de las distancias y de los ángulos medidos sobre el terreno y s
plano y nada mas sería necesario; pero para mayor seguridad se puede levantar con apa
precisión bien comprobado y el procedimiento mas conveniente el plano de algunos de
lígonos utilizados para la comprobación y compensación de las áreas gráficas, haciendo
lados sean líneas de compensación para evitar detalles y aun el de algunos predios
para hacer la comparación de las áreas reales con las gráficas medidas sobre el plano.

En la Instrucción III de Abril $^{15}/_{89}$ dictada para la renovación del Catastro italiano
viene (§ 41) que la verificación ha de comprender el 20 por % de la extensión del pla
diéndose reducir al 10 por % cuando los resultados del examen prévio hagan suponer
trabajo se ha hecho bien y se considerará como *excelente* cuando en las comparaci
comprobación las diferencias encontradas sean inferiores á la mitad de la tolerancia estab
regular y *aceptable* si generalmente se aproximan al límite de la torelancia y desechabl
pasan.

Con el objeto de utilizar en lo posible los planos de los antiguos Catastros, en la I
ción V para la renovación de tales planos, se establece (§ 15) como tolerancia de las dife
entre las distancias medidas directamente sobre el terreno y sobre tales planos, las sigu

$$t = o'00025\ N + o'1\ \sqrt{D} + o'01\ D \text{ en llanura;}$$

$$t' = o'00025\ N + o'2\ \sqrt{D} + o'01\ D \text{ en colina;}$$

$$t'' = o'00025\ N + o'3\ \sqrt{D} + o'01\ D \text{ en montaña;}$$

que se reconoce serían excesivas en los planos nuevos y en efecto lo son, pues para 100
rían tolerables

en la escala de $^1/_{1000}$ 2'25, 3'25 y 4'25 m. respectivamente.
» » » $^1/_{2000}$ 2'50, 3'50 y 4'50 » »
» » » $^1/_{2500}$ 2'625, 3'625 y 4'625 » »
» » » $^1/_{5000}$ 3'25, 4'25 y 5'25 » »

que, si en las tres primeras escalas, se hacen notables, no tanto en la última utilizada en
trabajos públicos y particulares, pues gráficamente tales diferencias estarían representad
pectivamente por

o'65, o'85 y 1'05 mm.

(1) Se debe tomar nota de las distancias que comparadas con sus homólogas del plano dan una di
menor que el 25, 50, 75 y 100 por 100 de la tolerancia para deducir del número y magnitud de cada
grado de precisión conseguida.

CAPÍTULO II

TEORÍA Y APLICACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS ALTIMÉTRICOS

ARTÍCULO PRIMERO

TEORÍA DE LOS PROCEDIMIENTOS ALTIMÉTRICOS

39 — Su clasificación.

Aplazando para el Capítulo II de la *Parte tercera* el ocuparnos de la falta de paralelismo entre las grandes superficies de nivel y del consiguiente sistema de *cotas dinámicas*, lo harémos ahora de las *ortométricas* ó *geométricas* propias de las nivelaciones ordinarias topográficas en el aceptable y generalmente admitido supuesto de ser esférica la Tierra y de esta forma la superficie general de comparación (número 45 del volumen I), á ella paralelas todas las demás que se puedan necesitar y como *elementos* propios de cada una los pequeños planos horizontales determinados en cada estación por la visual horizontal de los aparatos, en lo cual no hay dificultad, porque, no excediendo ó debiendo exceder generalmente su radio de acción de 150 metros (1) por diferentes causas, el error que se comete por la diferencia del nivel aparente sobre el verdadero y por la refracción del aire no llega, como ya digimos en el número 50 del volúmen primero, á 1'5 m.m.; el que además puede anularse por los medios sencillos, que en el número 113, dimos á conocer y por la *observación recíproca*, de que luego hablarémos.

La última condición nos permite simplificar los trabajos de la nivelación, pues se reducen á comparar entre sí la distancia vertical de cada punto de los vistos desde una misma estación al plano horizontal en ella determinado por el aparato, sin que esto implique dificultad alguna para referir sus alturas relativas, determinantes del relieve del terreno, á la superficie general de comparación consiguiéndose fácilmente las de todos los puntos característicos del terreno, *objeto especial de la Nivelación* y complemento necesario de la *Planimetría*, para que quede bien definida la situación relativa de aquellos, cual corresponde á los planos completos ó topográficos, como ya digimos en los números 52 y 55 del volúmen I.

Para desarrollar ordenadamente los distintos procedimientos utilizados nos ocuparémos sucesivamente en este artículo y los siguientes:

1.° De la nivelación simple ó determinación de las alturas relativas de los puntos vistos desde una estación.

2.° De las de los vistos desde dos ó más, relacionadas entre sí.

3.° De los perfiles longitudinales y trasversales.

4.° De los planos acotados y

5.° De los planos con curvas de nivel.

---

(1) Esta es la distancia máxima admisible y admitida cuando se desea conseguir la diferencia de alturas con suficiente precisión y es consiguiente que si la necesidad obliga á admitir otras mayores habrá que contentarse con apreciaciones de uno ó más centímetros en las alturas de mira, corregir las resultantes de los precitados errores por los medios indicados, por la nivelación recíproca ó con los valores calculados conforme á los comprendidos en la Tabla inserta en la página 131 del vol. I, especialmente si se trata de vértices de triangulación ó poligonación, porque tales errores influyen en las alturas sucesivas de las de estos dependientes; pero no es aquello necesario cuando son puntos de detalle, porque no tiene importancia en el relieve del terreno que aparezcan algunos milímetros más altos ó más bajos de su altura verdadera y por consiguiente es inútil ocuparse en tales correcciones.

en A . . . . 2'251 metros
B . . . . 0'640 »
C . . . . 2'574 »
D . . . . 1'432 »

de las que resulta

A — B = 2'251 — 0'640 = 1'611, esto es lo que B está sobre A
B — C = 0'640 — 2'574 = 1'934, » » B está sobre C
C — D = 2'574 — 1'432 = 1'142, » » D está sobre C

Si en lugar de buscar las diferencias parciales suponemos conocida la altura de uno de los puntos sobre la superficie general de comparación ó sea *su altitud*, 560 metros para A, v. gr., y la aumentamos la altura de mira correspondiente, 2'251 metros, tendremos para la altitud del plano horizontal visual 562'251 metros y restando de ella las demás alturas de mira conseguirémos la altitud de cada punto observado, que nos permitirá darnos clara idea de las alturas absolutas y relativas de los puntos considerados: así tendrémos para

A la altitud de 560'000 metros
B » 561'611 »
C » 559'677 »
D » 560'919 »

Cuando no se conociere la altitud verdadera de ninguno de los puntos, se dá á uno de ellos una arbitraria, que esté por debajo de todos los puntos que se hayan de nivelar y así se consigue el mismo objeto y con más sencillez si se elige al efecto la menor posible y múltipla de 10.

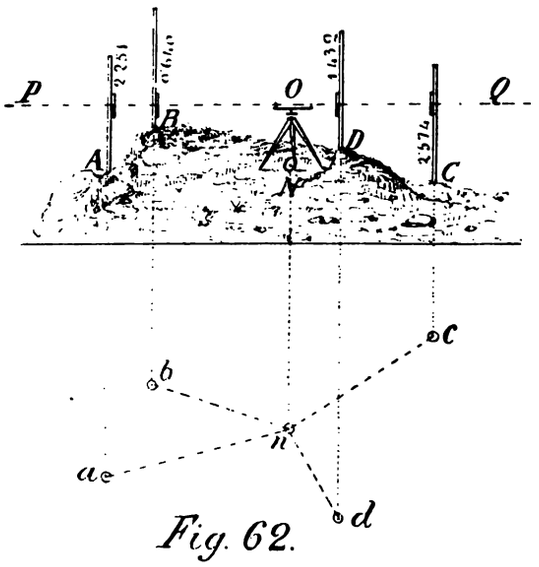


Fig. 62.

La longitud de la nivelada ó golpe de nivel y la precisión, con que se mide la diferencia de alturas, depende de las condiciones del aparato, de las de la mira y manera de colocarla y de la vista del observador, y habrá que tenerlas en cuenta, las especiales del tiempo en que se haya de operar y el grado de precisión que se quiera conseguir, para elegir la magnitud de las niveladas, lo cual no será difícil en vista de lo que dejamos consignado sobre las condiciones de cada clase de aparatos y de miras y no olvidando que *la mayor diferencia de alturas apreciable desde cada estación es igual á la de la mira*, lo que naturalmente reduce mucho las distancias en los terrenos de relieve pronunciado.

Es por consiguiente imposible fijar límites concretos y generales, pues mientras con el *nivel de agua* en días despejados y utilizando miras de plancha en corredera se podrán utilizar niveladas hasta de 60 metros, según digimos en el número 107 del vol. I, y solo de 30 en opinión de otros Autores, consiguiendo la altura de mira con error probable de ± 20 milímetros, y por lo tanto la diferencia de los dos puntos distantes entre sí 90 metros por término medio, con el de

$$e = \sqrt{20^2 + 20^2} = \pm 28'2 \text{ mm.}$$

y repitiendo la observación invirtiendo la posición de los frascos para comprobar, con el de

$$e = \frac{28'2 \text{ mm.}}{\sqrt{2}} = \frac{28'2}{1'414} = \pm 20 \text{ mm. próximamente,}$$

con los *niveles de anteojo* de buenas, (1) pero no de excepcionales condiciones, se puede conseguir la diferencia de alturas de dos puntos distantes entre sí 200 metros con el error probable (fórmula 5.ª del número 10 del vol. I) de

$$E = \pm 2'6 \text{ mm.} \qquad (2)$$

ó sea para una distancia mas que dupla un error inferior al 15 por ciento del probable con el nivel de agua, á cuyos errores habría que añadir la parte correspondiente al consiguiente por inclinación de la mira, si esta no se colocara vertical, y al de apreciación de su altura; pero como puede hacerse fácilmente que aquella sea menor de 20′, según digimos en el número 84, del vol. I, suponiendo que la visual horizontal la encuentre á 3 metros de altura implicaría un error menor que 0'3 milímetros en cuanto al 1.° y 1 milímetro el 2.°, podemos por el momento prescindir de ellos.

Comprobaciones

La única posible en el caso de que se trata consiste en *la doble observación* de la altura de mira en cada punto, lo cual se consigue con el nivel de agua y los de pínulas invirtiendo la visual y en los de anteojo giratorio alrededor de su eje de figura haciendo la observación en dos posiciones diametrales ó las cuatro del sistema de Egault, aunque es poco recomendable, como ya digimos, sacar el anteojo de sus collares por los peligros á que expone, por cuyos medios se comprueba cada altura de mira y se aumenta la precisión aceptando la media de los dos resultados, cuando son poco diferentes; pero si se desea mayor seguridad y precisión será necesario repetir las observaciones desde otra estación próxima á la primera y eligiendo como punto de partida el anteriormente admitido, calcular nuevamente la altitud de los demas y aceptar como definitivas los correspondientes á la media de los resultados obtenidos, cuando las diferencias sean tolerables, repitiendo las observaciones en el caso contrario.

41 — Con los eclímetros ó goniómetros con limbo vertical.

Aunque al determinar las fórmulas utilizadas con la estadia de Porro ya digimos (número 82 del vol. I) la manera de hallar la diferencia de altura entre dos puntos y la distancia horizontal que los separa, mas adelante (número 85) la precisión que por tal medio se consigue y al ocuparnos de los usos á que se pueden destinar los goniómetros de limbo vertical y especialmente al hacerlo de la brújula nivelante (número 157) consignamos análogas consideraciones y las ventajas é inconvenientes que en su comparación con los niveles ofrecen bajo los conceptos de la precisión y rapidez, se nos permitirá que nuevamente lo hagamos en términos generales para que mas fácilmente pueda compararse este procedimiento con el de visuales horizontales característico de los niveles y los otros de que luego nos hemos de ocupar.

Cierto es que, si el anteojo de los eclímetros se asegurase de tal manera que cuando el eje general del aparato sea vertical resulte horizontal el de colimación del anteojo, no se distinguirán esencialmente tales aparatos de los niveles y á este efecto es muy general que sobre el anteojo lleven un buen nivel de burbuja, que sería mejor fuera movible, aunque á él asegurable por medios sencillos, como ya sucede en algunos aparatos, para facilitar las comprobaciones y correcciones instrumentales; pero no es en este concepto en el que debemos ahora considerar el uso de estos aparatos, sino en el de medidores de los ángulos de inclinación de las visuales

(1) Con amplificación de 20 á 25 diámetros y radio de curvatura del tubo del nivel de 25 metros, apreciando 1 mm. en la de centración de la burbuja.

(2) M. Prévot en su recientísima é interesante Topografía le reduce á 1'3 mm., pero nos parece exagerado en las condiciones supuestas.

sobre ó debajo del plano horizontal correspondiente al eje de giro del anteojo mismo ó de los zenitales, pues con estos y la distancia horizontal, que separa el punto de estación del visto, se calcula sencillamente la diferencia de altura entre ellos por lo que á este procedimiento se llama con justicia *nivelación trigonométrica.*

En efecto: segun en el número 82 demostramos, la diferencia de nivel entre dos puntos se determina con los eclímetros ó goniómetros completos por la fórmula

$$z = D \cot. \varphi + i - m$$

que, cuando en lugar del ángulo zenital, φ, se mide el de inclinación sobre ó debajo de la horizontal, v, se convierte naturalmente en esta otra

$$z = D \text{ tang. } v + i - m$$

por ser φ y v complementarios.

Esto implica la necesidad de que la distancia, D, entre los dos puntos sea conocida y por lo tanto este procedimiento ofrecía muchas dificultades con los antiguos aparatos; pero como ahora casi todos los que se utilizan son distanciómetros se evitan fácilmente aquellas.

Queda sin embargo un inconveniente que es que la distancia entre los puntos se ha de limitar á la admitida para la nivelada al objeto de leer con facilidad la mira y de reducir en lo posible los errores del nivel aparente y de la refracción del aire y aun los instrumentales relativamente á los puntos en que no pueda utilizarse la observación recíproca, que es el caso de que ahora nos ocupamos, pues esta exige hacer estación en los dos puntos, mientras que con los niveles aquella distancia se puede duplicar, como dejamos consignado.

La *nivelación radiante ó por radiación* es de mas sencilla y general aplicación con los eclímetros que con los niveles, porque se puede extender á los puntos que rodean la estación sea cualquiera la inclinación de la visual y como permiten medir al mismo tiempo que esta el ángulo azimutal y el número generador de la distancia haciendo fácil la determinación de la proyección horizontal de cada punto, de aquí que en los modernos procedimientos se aplique en combinación con la *nivelación poligonal* como sistema general.

COMPROBACIONES Y PRECISIÓN

Como el ángulo vertical se comprueba mediante los dos nónius de que están provistos casi todos los aparatos y tambien se hace del número generador de la distancia, dentro de los límites de la posible apreciación se consigue la diferencia de alturas con bastante seguridad; pero con los aparatos ordinarios, como la brújula nivelante, con el error probable de 32 mm. á 100 metros de distancia en las inclinaciones de 10^c, que es el calculado en el número 157 para los de talles á que se puede comparar el caso de que tratamos; *con otros bastante menores con los buenos teodolitos y taquímetros;* parece por consiguiente á primera vista que estas nivelaciones han de ser mas inexactas que las conseguidas con el nivel de agua y los medianos de anteojo respectivamente; sin embargo, no sucede asi, como ya tambien entonces digimos.

En efecto: la diferencia de altura entre dos puntos distantes 100 metros y en que la visual tenga la inclinación de 10^c es de 14'23 metros y como esta no puede hallarse con los niveles sin hacer al menos 5 ó 6 estaciones, no solo se aumentará considerablemente el trabajo sino tambien el error, porque siendo el probable en cada una de 20 mm. con el de agua, en las cinco se elevará ó podrá elevarse á (1)

$$e_s = \pm \sqrt{5 \times 20^2} = 45 \text{ mm. próximamente, mayor que}$$

el presumible en aquella operación única.

---

(1) Esto depende de la longitud que á las niveladas parciales permita dar el terreno, pues segun sus condiciones así serán mayores ó menores los zis-zas que aquellas formen.

42 — Con los clisímetros y los barómetros.

Basta recordar lo que dejamos expuesto en el número 146 del volúmen I, sobre la manera de determinar con los *clisímetros* la pendiente ó rampa entre dos puntos y la equivalencia en grados centesimales de las por ellos determinadas, que no pasan de los múltiplos del milímetro por metro de distancia horizontal, para comprender que la diferencia de alturas se puede conseguir fácilmente multiplicando la pendiente por el número de metros de la distancia y asimismo que la *precisión* ha de ser mucho menor que la conseguida con la generalidad de los goniómetros, pues midiéndose con muchos de estos los ángulos de inclinación ó zenitales con menos error de un centígrado, en aquellos no se aprecia mas que el milímetro de pendiente equivalente á 6'5" de aquellos.

Despues de lo que dejamos consignado en los números 133 á 141 sobre descripción y uso de los *barómetros* nada esencial nos queda tampoco por decir aquí para que se comprenda, que si bien pueden aplicarse á la medición de la altura relativa entre dos ó mas puntos, con la ventaja indudable de no exigir el conocimiento de la distancia que los separa, aunque con el inconveniente de tener que hacer estación en cada punto con determinadas condiciones, es indudable que, aunque los *holostéricos* se hayan aplicado alguna vez en los estudios de vías férreas, no debe hacerse sino para fijar *altitudes* iniciales ó para determinar aproximadamente la diferencia de altura entre dos puntos muy distantes entre sí horizontal y verticalmente, lo que por otros medios sería muy costoso determinar, porque su *precisión*, y sobre todo la seguridad de sus resultados, no puede ser mucha estando, como están realmente, expuestos á diferentes é indeterminadas influencias extrañas, por lo que, según ya digimos en la *observación final* del número 141, no deben destinarse á las nivelaciones topográficas sino como auxiliares de los demas aparatos.

NIVELACIÓN RECÍPROCA Y COMPUESTA Ó DETERMINACIÓN DE LAS ALTURAS RELATIVAS DE DOS PUNTOS MEDIANTE DOS Ó MAS ESTACIONES RELACIONADAS ENTRE SÍ

43 — Con los niveles.

Cuando los dos puntos, cuya diferencia de altura se quiera determinar, sin estar muy distantes entre sí, no se pueden observar desde una estación de ellos equidistante por impedirlo un barranco, v. gr., para anular los errores instrumentales y los consiguientes á la esfericidad de la Tierra y á la refracción del aire se utiliza la *nivelación recíproca* consistente en hacer estación en cada uno de ellos sucesivamente, dirigir la visual horizontal á la mira en el otro colocada y restando la altura del instrumento medida directamente de la leída en la mira en cada caso tomar la media de las dos diferencias.

Este procedimiento es el que se utiliza con los goniómetros-eclímetros, porque debiendo colocarse en los puntos mismos para determinar desde ellos la situación planimétrica de los característicos del terreno, permite conseguir al propio tiempo y sin trabajo sus alturas; pero con los niveles es preferible utilizar el procedimiento de dos miras de Porro simplificado por Salmoiraghi, de que dimos cuenta detallada en el número 113 del volúmen I.

Cuando por hallarse los dos puntos muy distantes entre sí, ó ser su diferencia de alturas mayor de la que permita medir la mira ó no se puedan ver uno de otro, ni los dos desde uno intermedio, como sucede entre otros casos, cuando están situados en distinta ladera de una montaña, no siendo posible hallar su diferencia de alturas desde una sola estación es indispensable utilizar dos ó mas relacionándolas entre sí y á esto se llama *nivelación compuesta, poligonal ó por recorrimiento*, aunque estas dos últimas denominaciones se aplican mas especialmente al caso en que se determinan las alturas, no solo de los puntos extremos, sino tambien de otros intermedios constituyendo una poligonal.

Si, por ejemplo, queremos hallar la diferencia de nivel entre dos puntos A y E (figura 63) distantes entre sí mas de 700 metros é invisibles uno desde el otro, supondrémos dividido el

perfil general, en cuanto la forma del terreno lo permita, en secciones menores de 200 metros AB, BC, CD y DE, de manera que se pueda medir la diferencia de alturas entre sus extremos desde una estación intermedia; pues conociendo las que existen entre A y B, B y C, C y D, D y E, es consiguiente que deducirémos fácilmente la que haya entre A y E ó entre dos cualesquiera de aquellos.

En efecto: si colocando sucesivamente el nivel en los puntos N^1, N^2, N^3 y N^4 leemos en la mira la distancia vertical de los puntos extremos de cada sección al plano horizontal determinado en cada una por el aparato, tendrémos para diferencia de nivel entre

$$A \text{ y } B;\ d_n = a - d$$
$$B \text{ y } C;\ d'_n = a' - d'$$
$$C \text{ y } D;\ d''_n = a'' - d''$$
$$D \text{ y } E;\ d'''_n = a''' - d'''$$

y por consiguiente el desnivel entre A y E será

$$d_n \begin{cases} A \\ E \end{cases} = a - d + a' - d' + a'' - d'' + a''' - d''' = (a + a' + a'' + a''') - (d + d' + d'' + d''')$$

pero, a, a', a'' y a''' son las alturas de mira leídas dirigiendo la visual al punto de *atrás*; esto es al que hemos pasado al llegar á cada estación y d, d', d'' y d''' son las leídas en la mira colocada en el punto que está *delante* en cada una y por esto se llaman *alturas de mira de atrás y de delante* respectivamente, luego *para determinar la diferencia de nivel entre dos puntos referidos con una nivelación compuesta, basta hallar la diferencia entre las sumas de la altura de mira de atrás y la de las de delante.*

Las primeras se suponen *positivas y negativas* las segundas para indicar desde luego con el signo resultante de la resta si el punto término, que en cada caso se considera, está mas alto ó

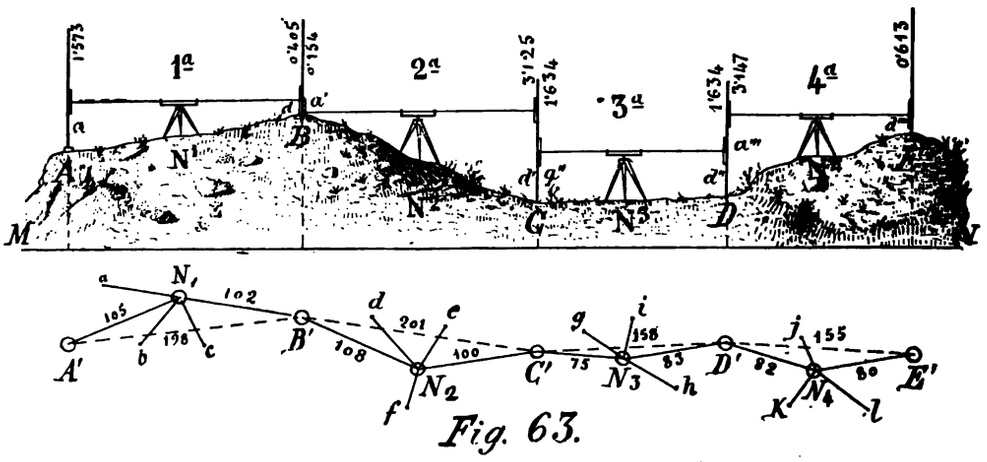


Fig. 63.

mas bajo que el de partida, porque es evidente que, si la suma de las segundas fuera mayor que la de las primeras, la diferencia resultará negativa, como procede, pues el punto término estará en tal caso mas bajo que el de partida, ya que distará verticalmente mas que este de la *superficie de nivel formada por el conjunto de los planos horizontales determinados por el aparato en las distintas estaciones referidas al de la primera* y por consiguiente menos de su paralela la general de comparación ó lo que es lo mismo será menor su altitud.

MODELO DE REGISTRO GENERAL PARA LAS NIVELACIONES

PUNTOS DE		ALTURAS DE MIRA DE			ALTITUDES		DIFERENCIA DE ALTURAS		OBSERVACIONES
Estación	Observados	ATRÁS	DELANTE Principales	DELANTE Secundarios	de los planos de mira	de cada punto	en +	en −	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	
	A	1'573	»	»	101'573	100'000	»	»	
	a	»	»	1'324	»	100'249	0'249	»	
N_1	b	»	»	1'156	»	100'417	0'168	»	
	c	»	»	1'434	»	100'139	»	0'278	
	B	»	0'405	»	»	101'168	1'029	»	
	B	0'154	»	»	101'322	»	»	»	
	d	»	»	0'612	»	100'710	»	0'458	
N_2	e	»	»	1'345	»	99'977	»	0'733	
	f	»	»	1'613	»	99'709	»	0'268	
	C	»	3'125	»	»	98'197	»	1'512	
	C	1'634	»	»	99'831	»	»	»	
	g	»	»	1'623	»	98'208	0'011	»	
N_3	h	»	»	1'534	»	98'297	0'089	»	
	i	»	»	1'576	»	98'255	»	0'042	
	D	»	1'634	»	»	98'197	»	0'058	
	D	3'147	»	»	101'344	»	»	»	
	j	»	»	1'672	»	99'672	1'475	»	
N_4	k	»	»	2'704	»	98'640	»	1'032	
	l	»	»	1'125	»	100'219	1'579	»	
	E	»	0'613	»	»	100'731	0'512	»	
		6'508	5'777		de A	100'000	5'112	4'381	
		5'777					4'381	»	
		0'731				0'731	0'731	»	

Para poner en consonancia este registro con la figura 63, hemos admitido como puntos de enlace de la nivelación de cada dos estaciones consecutivas del nivel las supuestas estaciones planimétricas B, C, D; podríamos haber tomado á tal efecto, otro cualquiera de los puntos vistos; pero en este caso debiera tomarse la altura de mira del mismo punto desde la estación siguiente; es decir que, si á tal efecto se eligiera el punto *c* á este y no al B debería dirigirse la primera visual desde la estación N° anotando su altura de mira en la casilla (3), puesto que es de *atrás* y de ella deducir despues la altitud de mira.

No es indiferente para la mayor claridad de las anotaciones utilizar uno ú otro modo de designación, según ya digimos; para el caso de que nos ocupamos creemos lo mejor utilizar la inicial *N* para todas las estaciones del nivel distinguiéndolas con números esponenciales sucesivos, con letras mayúsculas los puntos principales de la poligonal á las estaciones de la planimétrica prévia ó simultáneamente determinada y con letras minúsculas los puntos de detalle ó característicos, cuidando de que sean las mismas utilizadas en el levantamiento planimétrico, si este se hubiera antes realizado, porque utilizar números para la designación de los puntos, como muchos Topógrafos hacen, es siempre mas confuso y expuesto á equivocaciones.

Separamos las alturas de mira de *atrás* de las de *delante* y subdividimos estas en *principales* y *secundarias* para evitar equivocaciones y facilitar la comprobación de los cálculos; porque en efecto, así se vé claramente que para tener la altura del plano de mira, basta añadir á la altitud del punto visto *atrás* la altura de mira correspondiente y las comprobaciones de los cálculos se consiguen fácilmente sumando las alturas de mira de *atrás* y las de *delante* y restándolas; restando las altitudes de los dos puntos considerados y restando asimismo las sumas de las diferencias de altura positivas y negativas, pues las tres diferencias finales han de ser iguales y del mismo signo; pero, *entiéndase bien, esto no comprueba la exactitud de la nivelación y si solo la de los cálculos por cuyo medio se obtienen de los datos consignados en las casillas* 3, 4 y 5, los resultados que aparecen en las 6, 7, 8 y 9, comprobación necesaria, pero que no tiene el alcance que muchos la atribuyen.

En todo lo que llevamos consignado se ha supuesto que las alturas de mira procedan de una sola lectura sobre una mira dividida en centímetros ó al menos numerada de manera que se cuenten los metros y submúltiplos tal como son; pero cuando, para comprobar las observaciones y corregir errores aumentando la precisión, se leen en cada punto varias alturas de mira ó esta se halla numerada de manera que se lean como unidades sencillas los dobles metros y sus fracciones, lo que ocurre con muchas divididas en dobles centímetros, se comprende que antes de deducir las verdaderas alturas de mira es preciso hacer algunas observaciones.

Si, por ejemplo, se hacen dos lecturas sobre la mira de cada punto, es necesario tomar el término medio como altura mas exacta y esto no ofrece dificultad realizarlo mentalmente, porque, como solo difieren ordinariamente en los milímetros ó á lo sumo en algun centímetro, escribiendo los de la 2.ª lectura sobre los de la 1.ª con tinta roja, facilísimamente se percibe la media, que se lee al hacer los cálculos; esto es, si en las dos posiciones del anteojo se leen sobre la mira colocada en A, 1'573 y 1'577 se escribirán en esta forma: $1'57\frac{7}{3}$ y se leerá, despues, para hallar la altitud del plano de mira, 1'575 resultando aquella 101'575 y lo mismo se hará en todas las demás lecturas y cálculos sucesivos.

Si la mira estuviera numerada en unidades dobles, como resultan las alturas mitad de lo que realmente son, se sumarían las dos lecturas para tener la verdadera, que se podría escribir debajo de las anotadas en el campo y directamente con tinta para evitar equivocaciones con una suma y resta mentales simultáneas.

Al mismo efecto se deben hacer constar en la columna de observaciones las advertencias necesarias especialmente respecto á las condiciones de las miras que se utilicen; pues estas no se deducen de las anotaciones del campo, como sucede con el número de alturas de mira, que en cada punto se tomen y que por su diferencia deben tenerse en cuenta.

Tambien se han de hacer constar las circunstancias especiales de los puntos que se nivelen, cuando sean dignas de ello y especialmente los que puedan servir de referencia.

Finalmente tambien se ha de consignar la altitud del punto de partida ó de otros en que sea conocida por trabajos anteriores y, sino se conoce, la arbitraria que se les atribuya, como hemos hecho con la del punto de partida A en el ejemplo consignado en el registro al suponerla igual á 100 m.

OBSTÁCULOS

Muchas veces se presentan algunos inevitables que impiden realizar la nivelación en la forma antes referida y conviene hallarse prevenido para resolver inmediatamente la dificultad, porque sucede en los trabajos de campo, especialmente á los principiantes, que el cambio mas insignificante en el procedimiento general los perturba y molesta grandemente.

Uno muy frecuente es tener que cruzar un terreno cercado de pared sin que sea fácil seguir otro camino por ser necesario determinar la altura de varios puntos del mismo con referencia á la nivelación poligonal desarrollada entre dos puntos exteriores, caso que se indica en la figura 64 por las dos paredes B y C.

Algunos ilustrados Autores para resolver la dificultad utilizan las miras invertidas adosa-

das á las paredes á partir de su vértice ó caballete viéndose precisados á cambiar las alturas de mira de *atrás* por las de delante convencionalmente; pero con esto se ofusca muchas veces el operador motivando equivocaciones; parécenos mejor por su sencillez el siguiente procedimiento.

Desde la estación de nivel N¹ se leen las alturas de mira de *atrás* y *delante* de los puntos A y B; mediante una regla colocada horizontalmente sobre el vértice ó caballete de la pared se mide su altura por ambas caras y se tendrá la de B′ sobre ó debajo de B, con cuya diferencia de

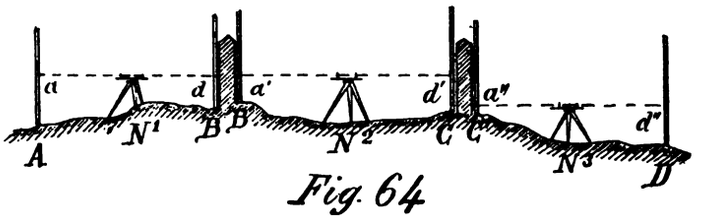


Fig. 64

alturas se determina la de mira de *delante* de B′, como si hubiera sido vista desde la estación N¹; se le dirige la visual desde N² y se tendrá la altura de mira de *atrás* y por consiguiente la del plano de mira en N² al que se refieren los puntos del terreno cercado y el pié interior de la otra pared C; por el procedimiento antes indicado se busca la diferencia de alturas entre C y C′; con ella la de mira de *delante* de C′, como si fuera visto desde N² y eligiéndole despues por punto de *atrás* para la estación N³ se continúa la operación como de ordinario.

En resúmen; en el obstáculo se consideran dos puntos, se deduce la altura de mira de *delante* del posterior con la diferencia de altura entre él y el anterior medida directamente, suponiéndola leída desde la estación precedente y se le elige para punto de *atrás* de la siguiente considerándole como *principal* y el anterior como secundario.

Haciendo en la columna de observaciones el cróquis correspondiente con anotación de las alturas de la pared por uno y otro lado quedará todo perfectamente claro y sencillo, se utilizará sin modificaciones el registro general y se conservará el dato, muchas veces conveniente, de la altura de la pared por sus dos caras y tambien se puede anotar su espesor para tenerle en cuenta en el perfil.

2.° *Caso.*—Si el obstáculo consistiera en tener que bajar desde un gran muro, como se indica en la figura 65 se procedería de una manera enteramente análoga midiendo directamente la

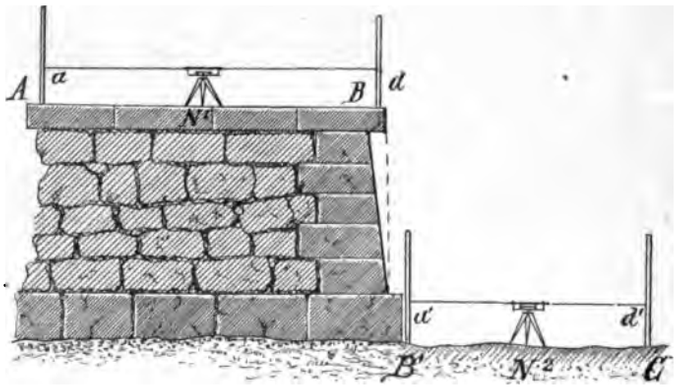


Fig. 65

altura entre los puntos B y B′, sumándola á la de mira de *delante* d y considerando la suma como la propia de B′ supuesto visto desde N¹ y últimamente utilizando el punto B′ para la altura de mira de *atrás* de la estación N² se continuaría la operación como de ordinario.

Si la altura fuera considerable y mucho el fruto del talud se podría medir con el reglón y la aplomada segun indicamos en el número 93, figura 121 del vol. I.

que haya de operar en un caso con el nivel de agua y en otro con el de anteojo de buenas, pero no de excepcionales, condiciones y para mayor sencillez supondrémos tambien que ambos se refieran al caso representado en la figura 63, pero siendo las distancias del nivel á los puntos visados la mitad para el de agua que para el de anteojo; es decir que supondrémos en el

	1.er CASO	2.° CASO
N_1 A' . . .	52'5 metros	105 metros
N_1 B' . . .	51'0 »	102 »
N_2 B' . . .	54'0 »	108 »
N_2 C' . . .	50'0 »	100 »
N_3 C' . . .	37'5 »	75 »
N_3 D' . . .	41'5 »	83 »
N_4 D' . . .	41'0 »	82 »
N_4 E' . . .	40'0 »	80 »
Sumas	367'5 metros	735 metros

Con el nivel de agua, haciendo caso omiso de las diferencias de longitud de las niveladas del 1.er caso á la media de 45 metros aceptada en el número anterior y tomando las precauciones alli aconsejadas, podría cometerse el error medio de ± 20 mm. entre cada dos estaciones sucesivas de la poligonal, que en este caso pueden considerarse como secciones de nivelación y siendo 4 entre A y E el error total que podría cometerse entre estos dos puntos, segun la fórmula 12ª del número 10, resultaría.

$$e = \pm 20 \text{ mm.} \sqrt{4} = \pm 40 \text{ mm.}$$

pero repitiendo la nivelación en sentido contrario los errores serían diferentes y aun podrían anularse con la media para cada punto y aunque así no sucediera siempre podría reducirse el total de cierre á

$$e_c = \frac{\pm 40 \text{ mm.}}{\sqrt{2}} = 28 \text{ mm.}$$

que se repartiría por partes iguales entre los puntos B, C, D y E, pues que se pueden considerar las niveladas de iguales condiciones.

En la práctica á causa de las compensaciones naturales, los errores finales suelen ser mucho menores y así no es de extrañar que mientras con los anteriores supuestos resulta ±76'3 mm. por kilómetro de distancia, el ilustrado Mr. Busson Descars fijara como *tolerancia para el nivel de agua* 10 ó 12 centímetros por miriámetro solamente (1), aunque consideramos esta supuesta precisión exagerada y debida á resultados en que no se apreciaron, ni tuvieron bastante en cuenta las compensaciones fortuitas, como se corrobora con las mayores tolerancias señaladas por entidades respetables á las nivelaciones realizadas con el nivel de anteojo como luego dirémos.

Con el nivel de anteojo de amplificación de 20 á 25 diámetros y 25 metros de radio de curvatura del tubo de burbuja, en que suponemos se centre esta con aproximación de 1 mm. hemos dicho al tratar de la nivelación simple, que se podía hallar la diferencia de altura entre dos puntos distantes entre sí 200 metros con error probable de ± 2'6 mm. y aceptándole para cada dos puntos sucesivos del caso supuesto resultaría para error total ó de cierre

$$E_c = \pm 2'6 \sqrt{4} = 5'2 \text{ mm.}$$

en 735 metros, que repitiendo la nivelación en sentido inverso y tomando la media de las diferencias se reduciría á

(1) Bretón de Champ.—Nota VII, pág. 288.

Finalmente los errores medios cuadráticos por kilómetro tolerados en la nueva *Nivelación general de Francia*, son los siguientes: (1)

Líneas	de	primer	orden	1'2	mm.	accidental	y	0'2	mm. sistemático
»	»	segundo	»	1'5	»	»		0'4	» »
»	»	tercero	»	5'0	»	»		2'0	» »
»	»	cuarto	»	8'0	»	»		5'0	» »

Los errores señalados para las líneas de primero y segundo órden se han de considerar como especiales de las nivelaciones de alta precisión, los de las de tercero y cuarto pueden servir de tipo para las buenas nivelaciones topográficas y como la *tolerancia* puede ser en las diferencias directas cuatro veces mayores relativamente á los errores accidentales y los sistemáticos se suman resultando en el cierre proporcionales al número de niveladas y duplicados con la repetición de la nivelación en sentido inverso, con referencia á las líneas de tercer órden no resulta exagerada la *tolerancia* de 30 mm. $\sqrt{K}$ prefijada en el artículo 127 de las Instrucciones Topográficas del Instituto Geográfico y Estadístico, aunque realmente con los aparatos actuales se puede cumplir fácilmente operando con cuidado en niveladas que no excedan de 100 metros.

44 — Con los eclímetros ó goniómetros de limbo vertical.

Hay que distinguir el caso en que por tener el plano geométrico sean conocidas las distancias entre los puntos cuya diferencia de alturas se quiera determinar, del en que se haya que levantarle al propio tiempo que se realiza la nivelación como se hace con los modernos procedimientos, porque en el primer caso la distancia entre aquellos puede ser sin gran dificultad dupla de la admitida para la nivelada y en el segundo se ha de limitar á la longitud de esta, al objeto de leer con precisión la mira para con ella calcular la distancia, y esta diferencia de condiciones es esencialísima en la comparación de los dos procedimientos.

Como ahora tratamos especialmente de la nivelación, á que en el primero se concreta, á él lo harémos suponiendo conocidas las distancias entre los puntos A, B, C, D y E de la figura 63, que utilizarémos para facilitar la comparación de este procedimiento con el explicado para los niveles; sean aquellas

A B =	198 metros
B C =	201 »
C D =	158 »
D E =	155 »
Suma. .	712 metros

Poniendo el eclímetro en estación en A y en B un jalón ó mira de plancha con esta á la altura del eje de giro del anteojo sobre A, es consiguiente que si dirigimos la visual á su línea de fé, será paralela á la recta A B, cuyo ángulo de inclinación ó zenital leerémos en el limbo vertical resultando la altura de B sobre A de la fórmula

$$z = D \text{ tang. } v$$

ó $$z = D \text{ cot. } \varphi$$

no siendo necesaria la corrección i—m por ser iguales estas alturas.

Si en lugar del jalón ó mira de plancha se colocara en B una parlante, la coincidencia del hilo axial horizontal se haría con una de las grandes divisiones por ser mas fácil y precisa, y á ser posible con la de 150 á 160 centímetros para que la diferencia i—m resultara la menor y con poca diferencia la visual paralela á la línea del terreno.

Conseguida así la diferencia de altura entre los puntos A y B, se trasladará el eclímetro á B y la mira á A y haciendo la *observación inversa ó recíproca* en iguales condiciones, se tendrá

(1) Topografía de Prévot volúmen II, página 369.

Supongamos que con estos mediante los dos nónius se aprecien los ángulos con error máximo de 30" ó próximamente 1' centígrado.

Si se repite la observación con el anteojo invertido y se toma el término medio, el error probable se reducirá á $\frac{30''}{\sqrt{2}} = 21''$ y procediendo en la misma forma en la observación recíproca tomando el término medio de los ángulos ó de las alturas halladas, pues que el resultado es el mismo ya que el error en estas será el producto del error en el ángulo multiplicado por la misma distancia, se reducirá el del ángulo á 15".

El ángulo de inclinación necesario para producir una diferencia de altura de 1'168 metros entre puntos distantes 198 metros, como los A y B, se deduce de la fórmula $z = D.\ tang.\ v.$ que es de 0°, 20', 17"; por consiguiente si la resolvemos suponiendo que sea de 0°, 20', 2" y 0° 20' 32" la diferencia entre estos valores de z y el antes obtenido de 1'168 metros nos dirá el error que podemos cometer en la nivelación con el eclímetro en 198 metros.

Haciendo v = 0°, 20', 2" resulta z = 1'1555

Id v = 0°, 20', 32" » z = 1'1826

Con el 1.° se comprueba un error de 12 mm. y 14 con el 2.° ó sean 13 mm. por término medio en los 198 metros ó 13 mm. $\sqrt{5} = 28'98$ mm. por kilómetro.

Si esta nivelación se repitiera en sentido contrario con las mismas condiciones tomando el término medio de los resultados, el error kilométrico se reduciría á 20'5 mm. y en las alturas de A y B á 9'2 mm., que si es cuadruplo del calculado para los buenos niveles de anteojo, es mucho menor que el que se comete con los de agua y de pínulas y se acerca mucho á las diferencias tolerables segun el artículo 127 de las Instrucciones topográficas de nuestro Instituto Geográfico y Estadístico.

Lo mismo que hemos dicho relativamente á las alturas entre A y B, podría decirse respecto á las demas estaciones y la diferencia total hallada en el cierre se *repartirá* proporcionalmente á las distancias, cuando los ángulos de inclinación no lleguen á 3c y teniendo esta en cuenta en otro caso, porque indudablemente influye en la entidad de los errores, como ya digimos en el número 84 del vol. I.

45 — Con los clisímetros y barómetros.

Seguramente que en casos como el representado en la figura 63 ningun Topógrafo utilizaría los *clisímetros* como tales, sino como niveles asegurando el anteojo á la altura conveniente; pero no es así como debemos aquí considerarlos, sino como medidores de las pendientes ó rampas del terreno para de ellas y de la distancia entre los puntos de estación y vistos respectivamente deducir las alturas correspondientes.

A tal efecto, en una nivelación compuesta ó en una poligonal se utilizan enteramente lo mismo que los goniómetros-eclímetros con la sola diferencia de medir las tangentes en lugar de los ángulos de inclinación; pero, como segun dejamos consignado, su apreciación equivale á 6'5' centígrados, la precisión es mucho menor que con los buenos teodolitos y taquímetros y que con las pantómetras y brújulas nivelantes y es verdaderamente sorprendente que, apesar de ser esto evidente, muchos Topógrafos crean conseguir la nivelación con mayor exactitud: ilusión consiguiente á que suponen obtener en la observación recíproca una pendiente y una rampa del mismo valor absoluto, cuando no se consigue mas que en los límites de apreciación del aparato; ni tampoco se obtiene con mayor seguridad la anulación de los errores instrumentales y los de refracción y esfericidad, porque lo que no se mide mal puede apreciarse.

Como los eclímetros, tienen los clisímetros sobre los niveles la ventaja de permitir medir directamente alturas mucho mas considerables y por consiguiente realizar ciertas nivelaciones con gran rapidez, pero tambien la desventaja de la menor precisión.

Otra ventaja que los caracteriza, aunque tambien puede conseguirse el mismo resultado con los eclímetros, pero no con los niveles, es dar desde luego la pendiente ó rampa entre dos puntos del terreno ó fijar respecto á cada uno otros que tengan la que convenga, y esta condición los hace muy útiles en los trazados de vías de comunicación, conducción de aguas y otras obras análogas, que es á lo que principalmente se destinan.

Para anotar ordenada y sencillamente los datos medidos y resultados conseguidos se puede utilizar un registro en que consten: los puntos de estación y vistos; la distancia que los separa; la pendiente ó rampa de la línea que los une; la diferencia de altura ó producto de la distancia por la pendiente ó rampa distinguiéndolas con el signo — ó +; las altitudes designando cada punto con su letra y las observaciones importantes.

Los *barómetros* solo se utilizarán cuando los puntos cuya diferencia de altura se desea conocer se hallen á mucha distancia ó aquella sea muy grande, porque en casos como el utilizado para ejemplo, aun procediendo con toda clase de precauciones sería muy difícil apreciar la diferencia de alturas; en cambio si los puntos distaran 10 ó 12 kilómetros, v. gr., ó la diferencia de nivel fuera de 300 ó 400 metros, como el error de 1 ó 2 no tendría grande influencia, sería poco razonable realizar una nivelación con niveles, eclímetros ó clisímetros, que implicaría mucho trabajo y gasto, cuando con dos barómetros bien comparados podría realizarse rápidamente, por de contado sino fuera necesario mas que conocer la diferencia de nivel entre los dos puntos supuestos; porque si se deseara tener el perfil, plano ó prismático, entre ellos, ya la ventaja del barómetro se anularía quedando su natural destino reducido á servir de amplia comprobación de la altitud de algunos puntos principales operando con las precauciones aconsejadas en el número 141 del vol. I.

Es preciso no olvidar las ventajas y los inconvenientes característicos de cada clase de aparatos y las condiciones propias de cada clase de trabajos para ponerlos siempre en consonancia al objeto de conseguir el resultado, que en cada caso se propone, con la necesaria precisión, la mayor seguridad y el menor coste y á este efecto procuramos desvanecer las muchas preocupaciones é improcedentes prejuicios, que desunen á los Topógrafos con perjuicio notorio del progreso de la Topografía moderna y de los buenos planos.

46 — Perfiles longitudinal y trasversales.

Se llama *perfil* á la intersección de la superficie del terreno con un plano, superficie prismática, cilíndrica ó mixta vertical, y como por su medio queda determinada la sección del mismo género esta se utiliza comprendiéndola en aquel.

Suponiendo determinada la proyección horizontal por los procedimientos planimétricos se hace el perfil mediante los explicados para la nivelación compuesta con la sola diferencia de determinar la altura de todos los puntos en que cambie la pendiente, de tal manera que la recta que une cada dos sucesivos se adose perfectamente á la superficie del terreno, prescindiendo por de contado de los pequeños y mudables accidentes, que no alteren su forma característica; es decir, que se ha de hacer caso omiso, v. gr., de los surcos del arado, matorrales, montones de piedras sueltas ó de tierra y otros análogos; pero no de las zanjas de desagüe, arroyos, caminos, escarpes de roca, hoyas y otros semejantes de carácter mas permanente y que puedan afectar al objeto á que el perfil se destina, que ordinariamente es el de estudio de una vía de comunicación, de encauzamiento de ríos, conducción de aguas y otras obras parecidas ó á determinar el relieve general del terreno.

Otra diferencia esencial entre el perfil y la nivelación compuesta propiamente dicha consiste en que en el *primero* es necesario precisar la distancia entre los puntos nivelados para concretar la sección de los accidentes del terreno por él cortados, lo que no es indispensable en la *segunda*, aunque por otros conceptos hayamos tenido en cuenta la distancia al ocuparnos de la descripción de tales operaciones; pero por eso hemos omitido este dato en su registro general.

Sea cualquiera el objeto á que los perfiles se destinen, no basta ordinariamente el conocimiento de la situación y de las alturas de los puntos de uno solo; es preciso tenerle de una zona mas ó menos ancha y de aquí viene la necesidad de combinar los datos, que suministra el que se realiza en el sentido de la longitud de la zona de estudio, con otros con él relacionados en el sentido de la latitud de esta y por eso al primero se le llama *perfil longitudinal* y *trasversales* á los demas; solo en el caso de quererse obtener el relieve general de un terreno, que no tenga el caracter de zona, esto es, que no sea largo y estrecho, se prescinde de los segundos disponiendo los perfiles en el sentido de las vaguadas, divisorias y máximas pendientes para apreciar mejor aquel, como tendrémos ocasión de detallar mas adelante, no teniendo ninguno el carácter de los trasversales, que tanto facilitan el conocimiento del relieve del terreno necesario en las zonas de estudio antes indicadas.

Para simplificar su determinación, el proyecto á que se destinan y el cálculo de los desmontes y terraplenes consiguientes, los perfiles trasversales, que siempre son relativamente cortos, se hacen de una sola alineación recta normal á la correspondiente del longitudinal y en los vértices de las varias de este segun la bisetriz de sus ángulos planos, de tal manera situados que la recta que une los puntos de dos sucesivos coincida aproximadamente con la superficie del suelo, refiriendo las distancias y las alturas de sus puntos al de su intersección con el perfil longitudinal.

Cuando las alineaciones rectas, de que este se compone, no son excesivamente largas ó cortas, se pueden considerar como secciones de nivelación para las comprobaciones y siempre se han de marcar sus extremos mediante hitos ó fuertes estacas, cuando no se hallaren en puntos notables y permanentes, con las referencias necesarias para que puedan encontrarse fácilmente durante los trabajos, replanteo y ejecución de las obras proyectadas, porque constituyen la base de operaciones, á que se refiere el eje ó líneas principales de las obras.

Al hacer el examen detenido de la zona de estudio, ó mejor aun al hacer su medición directa, se fijan los puntos del perfil longitudinal, en que, para que el relieve de aquella quede bien determinado, se han de hacer perfiles trasversales señalándolos con estacas, en que se escribirán los números ó letras con que se designen en los cróquis y registros refiriéndolos á puntos bien visibles para que sean fácilmente encontrados.

Durante las operaciones pueden utilizarse cañas ó delgados jalones mas ó menos largos con un papel en su extremo superior, que permite distinguirlos fácilmente; pero despues se ha de quitar, porque llamando con ellos la atención de los campesinos sobre el lugar donde se encuentran las estacas, desaparecen estas con mucha frecuencia.

Las estacas se deben fijar fuertemente en el suelo, no dejando fuera de la superficie mas que 10 centímetros, en que se escribe la designación correspondiente; la referencia á puntos fijos próximos, como hitos de término ó de propiedad, ángulos de edificio, puentes ú otros análogos es la mejor; pero en su defecto se pueden utilizar estacas clavadas á menos de 20 metros enfiladas con dos objetos lejanos y visibles: tambien se pueden utilizar dos regueros en ángulo, de manera que su bisectriz pase por la estaca colocada á 1 ó 2 metros del vértice, cuidando de anotar en los cróquis y registros las condiciones de las referencias para poder encontrar los puntos.

Hecha la marcación de estos se procede á la determinación de los perfiles longitudinal y trasversales, que se puede realizar sucesiva ó simultáneamente; lo *primero* es mas sencillo cuando las distancias se miden directamente con el reglón ó la cinta y aunque parece costoso, como permite encargar la realización de los perfiles trasversales al personal subalterno con aparatos muy sencillos por no afectar los errores, que en ellos se cometan, al conjunto de la operación y de todos modos los datos de ambas clases de perfiles se han de consignar en distintos registros para no producir confusión, la posible división del trabajo ha de dar generalmente mejores resultados y por esto así muchas veces se procede, aunque no haya graves dificultades en determinar las dos clases de perfiles á la vez y esto se hace cuando las distancias se miden indirectamente para disminuir el número de estaciones, porque desde las utilizadas para el

perfil longitudinal se pueden medir todos los datos de dos ó mas trasversales en los terrenos de relieve pronunciado.

Para facilitar la explicación nos ocuparémos separadamente de cada clase de perfiles consignando sin embargo las indicaciones oportunas para que puedan hacerse simultáneamente por el mismo operador, cuando así lo crea conveniente.

Supongamos al efecto dos alineaciones rectas A B y B C, figura 66, de un perfil longitudinal.

Como la *primera* comprende 320 metros y 360 la *segunda* dividirémos cada una en dos mediante los puntos intermedios A_1 y B_1 resultando cuatro A A_1, A_1 B, B B_1 y B_1 C respectivamente de 152, 168, 190 y 170 metros, que, segun las condiciones del terreno, permiten medir las alturas de todos los puntos convenientes del perfil longitudinal y de la zona de 100 á

Fig. 66.

150 metros á uno y otro lado de él y por consiguiente, si se creyera oportuno, desde las mismas estaciones del nivel, que se separarán poco de las alineaciones del longitudinal, podrían, si el relieve lo permite, determinarse las de todos los perfiles á la vez.

Al hacer el reconocimiento definitivo del terreno no solo se fijarán estacas en los extremos de las alineaciones A, B y C, sino tambien en los A_1 y B_1, que lo han de ser de las niveladas y en los puntos *a*, *b*, *c*, ... en que cambia notoriamente la pendiente y muy especialmente los *a*, *c*, *e*, *g*..., en que se han de trazar perfiles trasversales numerándolos para su mas fácil referencia y haciendo un cróquis en proyección horizontal y vertical, en que consten claramente consignadas todas las condiciones aparentes del terreno, así como la longitud aproximada, que se deberá dar á los perfiles trasversales, cuya dirección y límites se puede señalar entonces con una escuadra de reflexión.

Cuando las alturas se hayan de determinar por medio de un nivel, conviene levantar previamente el plano de la zona, y se comprende fácilmente que haciendo estación en los extremos de las alineaciones, y niveladas con los aparatos distanciómetros ahora utilizados, se determinaría perfectamente la posición de todos los puntos del perfil longitudinal y trasversales, los que al efecto sería conveniente señalar con cañas ú otros medios sencillos evitando para despues todas las mediciones de distancias, pues las que los separase respectivamente de su intersección con el longitudinal se deduciría gráfica ó trigonométricamente por ser catetos de triángulos rectángulos, en que se conoce la hipotenusa, el otro cateto y el ángulo agudo opuesto, ya que las distancias al extremo de cada alineación del perfil longitudinal se determinarían directamente.

Supongamos, en efecto, que se hayan marcado en el perfil trasversal *a* 7 puntos: poniendo el goniómetro en estación en A no solo se medirá la dirección A A_1 y las distancias *Aa*, *Ab*, *Ac*... sino tambien los rumbos y las distancias Aa^1, Aa^2, Aa^3, etc. pudiéndose fijar la situación planimétrica de todos los puntos a^1, a^2, a^3... del perfil *a*, que debiendo hallarse sobre la normal en *a* á la recta A A_1 quedarían perfectamente comprobados y su distancia á *a* se podría medir sobre el plano ó calcularla por una de las dos fórmulas siguientes:

$$a\,a^1 = \sqrt{(Aa^1)^2 - (Aa)^2}$$

ó

$$aa^1 = Aa.\ Tang.\ \hat{a}Aa^1$$

que se resuelven rápidamente con la tabla de los cuadrados la *primera* y con el Círculo logaritmico la *segunda*.

En la misma forma se designarán y señalarán sobre la proyección horizontal del cróquis todos los puntos característicos de los demas perfiles trasversales y en el registro planimétrico los datos correspondientes, lo que podrá hacerse sin confusión, porque este sistema de designación indica desde luego á que perfil trasversal corresponden todos los puntos aludidos y su posición sin necesidad de la distinción de derecha é izquierda, generalmente admitida, porque, aunque en la continuación del trabajo haya necesidad de utilizar repetidamente las mismas letras, es distinta la anotación con acentos, *a*, *a'*, *a''*... de la aquí elegida para todos los puntos de un mismo perfil trasversal, *a*, a^1, a^2... y este sistema puede evitar dudas y equivocaciones, si se cuida de llevar siempre concordantes el registro y los cróquis.

Determinada la situación planimétrica de todos los puntos nivelables y los demas característicos de la zona, las alturas relativas se determinan sencillamente y con mucha rapidez, pues preparados los cróquis en la forma indicada en la figura 66 y los registros con la designación ordenada de los puntos del perfil longitudinal en primer término y sucesivamente de cada uno de los trasversales con las distancias correspondientes al extremo de partida de cada alineación y á la intersección con esta en los trasversales, colocando el nivel cerca de la alineación y próximamente á igual distancia de los extremos de la nivelada elegida, se mide la altura de mira colocada ordenada y sucesivamente en tales puntos y se escriben las resultantes en la proyección vertical del cróquis y en el registro; las de *atrás* á la derecha de la vertical del punto y las demas, que serán de *delante*, á la izquierda, como se indica en la figura, en que *A* es el punto de origen y por consiguiente su altura de *atrás* sirve para calcular la altitud del plano visual en la *primera* nivelada, la de la izquierda de A_1 es la delante de este punto y la de la derecha la de *atrás* de la *segunda* nivelada, considerándose las de todos los puntos intermedios y las de los puntos de los perfiles trasversales como de *delante* y su altura directamente referida á la altitud del punto de origen *A* y, como lo mismo se hace para la de su intersección con el perfil longitudinal, es fácil deducir las alturas de aquellos relativamente á su punto de intersección, pudiéndose con ella construir los perfiles trasversales con esta referencia.

Para evitar los entorpecimientos que motivan las grandes pendientes, que algunas veces se encuentran en los perfiles trasversales ó los accidentes especiales, como barrancos, caminos ó arroyos profundos y otros semejantes, que aquellos ó el longitudinal atraviesan, conviene utilizar en esta clase de trabajos, en lugar de los niveles comunes de anteojo, los buenos modernos clisímetros con brújula ó círculo azimutal y anteojo distanciómetro, porque con ellos se resuelven fácilmente las dificultades que presentan á la visual horizontal obligada de los primeros; pero utilizando los segundos como niveles en todos los puntos que no ofrezcan inconveniente para facilitar el cálculo de las alturas y conseguirlas con mayor exactitud.

Cuando no se dispone de aparatos modernos, despues de determinar la dirección de las alineaciones se miden horizontalmente las distancias parciales de cada punto señalado en cada una de ellas ó se marcan al hacer la medición y en los puntos convenientes se levantan las normales que han de servir para perfiles trasversales repitiéndose la medición en sentido

REGISTRO PARA LOS PERFILES TRASVERSALES

IZQUIERDA							DERECHA							OBSERVACIONES
PUNTOS DE		Distancia al eje	ALTURAS DE MIRA		ALTITUDES		PUNTOS DE		Distancia al eje	ALTURAS DE MIRA		ALTITUDES		
Estación	Observados		Atrás	Delante	De los planos de mira	De cada punto	Estación	Observados		Atrás	Delante	De los planos de mira	De cada punto	
PERFIL TRASVERSAL *(a)* NÚMERO 1.°							PERFIL TRASVERSAL *(a)* NÚMERO 1.°							
N	*a*	»	3'65	»	19'25	15'60	*N'*	*a*	»	0'35	»	15'95	15'60	
	a^1	19	»	2'86	»	16'39		a^5	25	»	1'46	»	14'49	
	a^2	38	»	1'95	»	17'30		a^6	44	»	1'92	»	14'03	
	a^3	61	»	1'46	»	17'79		a^7	71	»	3'12	»	12'83	
	a^4	86	»	0'52	»	18'73								
PERFIL TRASVERSAL *(c)* NÚMERO 2.°							PERFIL TRASVERSAL *(c)* NÚMERO 2.°							

Empleándose ordinariamente en los perfiles trasversales encargados al personal subalterno el nivel de agua ó el de pínulas, en el caso supuesto hay necesidad de hacer al menos una estación para determinar las alturas de cada porción de cada uno; pero desde ella muchas veces se pueden determinar las alturas de dos perfiles sucesivos y con las precauciones antedichas y la de considerar en este caso como nivelada de atrás la del punto del eje correspondiente para referir á él las alturas de sus puntos, así como las distancias, cuidando de anotarlas en el lugar correspondiente del registro y del cróquis, no hay inconveniente ninguno en utilizar para dos ó mas la misma estación del nivel.

En el anterior registro hemos considerado como altura de mira de atrás la del punto *a* para las dos estaciones del nivel, *N* y *N*¹; si desde la primera se hubieran podido medir las alturas de la porción izquierda del perfil *c* ó 2.° se empezaría por tomar la del punto *c*, siguiendo con las de los otros puntos del mismo perfil y considerando aquella como de *atrás* se calcularía con referencia á su altitud, tomada del registro del perfil longitudinal, la del plano del nivel y por su medio las de todos los puntos del perfil número 2.° anotándolo todo en la parte del registro correspondiente á este perfil trasversal y lo mismo podría hacerse desde la estación del nivel *N*¹ para la porción *derecha;* conviene hacerlo así y no referir las altitudes al plano de nivel deducido de la del punto *a* para no inmiscuir puntos de varios perfiles, siquiera todos esten relacionados mediante el longitudinal.

En la figura 67 se representa el cróquis del perfil, *a* número 1.°, que contiene los mismos datos que el registro, con el que debe siempre comprobarse, observándose en la vertical del punto *a* del eje dos alturas de mira, que son las de *atrás* de las dos posiciones del nivel, *N* y *N*¹, que sirven para determinar la altitud de su plano en cada uno con referencia al punto *a*.

Casos particulares.—El perfil longitudinal y los trasversales cortan algunas veces paredes, grandes escarpes, edificios, barrancos profundos, cerros, ríos y otros accidentes semejantes, que no permiten determinar aquellos en la forma antedicha y conviene indicar la manera de resolver la dificultad, porque sin este previo estudio entorpecen grandemente los trabajos de campo y perturban al Topógrafo novel.

Las dos primeras clases de obstáculos se resuelven como hemos dicho en el número 43 cuidando de medir la distancia que separa los dos puntos en cada uno considerados.

Si, como se indica en la figura 68, fuera un edificio aislado el que debiera cruzar el perfil, se marca su alineación en sus dos fachadas opuestas por medio de perpendiculares, que permi-

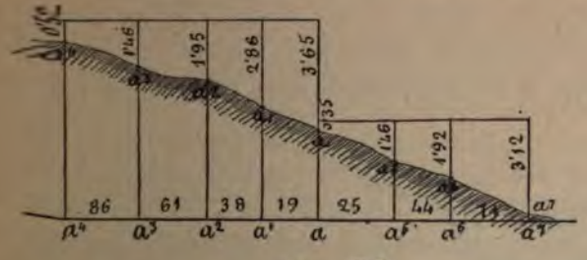


Fig 67.

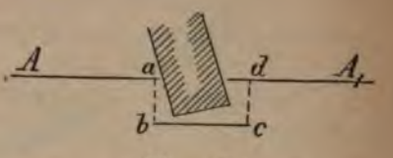


Fig. 68

ten medir la distancia interceptada y la diferencia de sus alturas con la pequeña nivelación aislada de los vértices del rectángulo *a*, *b*, *c*, *d*, cuya construción y datos numéricos se consignarían en cróquis especial.

Si el perfil cruzara un barranco profundo, como se indica en la figura 69, no sería posible determinar la sección vertical con los niveles, y señalando los puntos *m*, *n*, *o*, *p*, que la caracterizan, desde una estación próxima á *m* se determinaría la altura de *p* y la distancia que los separa del nivel, si este tuviera el anteojo distanciómetro, pudiéndose continuar el perfil prescindiendo por el momento del especial *m*, *n*, *o*, *p*, al que se destinará un cróquis particular en escala suficientemente grande para consignar todos los datos haciendo las referencias oportunas

en el registro y cróquis general, aunque en ellos ya se pueden poner los resultados de la nivelación particular.

Esta se puede hacer con reglones, como ya digimos, pero, si se dispone de un goniómetro-eclímetro con anteojo distanciómetro, lo mas sencillo será determinar la posición de los puntos característicos del barranco, *m*, *n*, *o*, *p*, desde una estación distante del perfil 60 ó 80 metros calculando las distancias y las alturas trigonométricamente, comprobando con la posición en línea recta de la proyección de los cuatro puntos y las alturas con la diferencia que resulte para *m* y *p*, ya determinadas con el nivel.

De una manera enteramente análoga se procedería si, como se indica en la figura 70, el obstáculo consistiera en *un cerro*, *A B C*, con la sola diferencia de que, no pudiéndose ver desde el punto *A* el *C* ú otro de la alineación del perfil, habría que trazar entre ellos una poli-

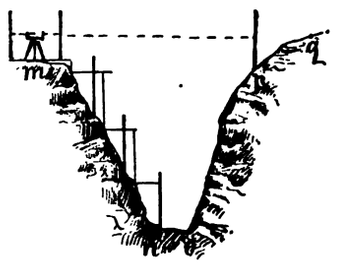


Fig 69.

Fig. 70

gonal, que se mediría planimétrica y altimétricamente al objeto de determinar la distancia horizontal y vertical entre *A* y *C* y esto podría realizarse con libertad en la elección de los vértices ó eligiéndolos á la altura de *A*, segun lo permitieran las condiciones del terreno: la diferencia de alturas se hallaría sencillamente como si se tratara de una nivelación compuesta; pero la distancia exigiría la construcción de la poligonal auxiliar para medirla gráficamente ó calcular las coordenadas planimétricas de todos los vértices para deducirla trigonométricamente por la fórmula

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

siendo X é Y la abscisa y ordenada de *C* con relación á *A*.

Si el obstáculo consistiera en un río, podría suceder que el perfil le cruzara normal ú oblícuamente á su eje; en el primer caso representado en la figura 71, se investigarían los puntos *A* y *G* de su nivel en las mayores avenidas, que se cuidaría de fijar en el terreno y en el perfil determinando los *C* y *D* de su actual nivel y los *B*, *E* y *F* intermedios y con referencia al plano

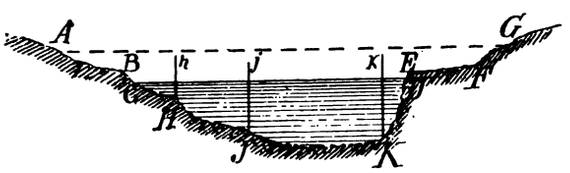


Fig. 71.

de aguas *C D* por tanteos se determinaría su lecho midiendo las distancias *Ch*, *Cj* y *C k* con una cinta ó con la estadia y las alturas *hH*, *jJ*, *kK* con un reglón ó percha.

En el segundo caso, se puede hacer lo propio con la sección oblícua, pero conviene entonces hacer otra normal al eje midiendo el ángulo de las dos; pues la normal es la que se tiene despues en cuenta para calcular el caudal de aguas, velocidades, etc., aunque á este efecto se han de hacer varios perfiles en puntos convenientemente elegidos.

Cuando el objeto del estudio es el encauzamiento de un río, no pudiendo determinarse el perfil longitudinal por el eje del mismo, se le fija en una ó en las dos márgenes y con relación

á ellas los perfiles trasversales que han de comprender una zona bastante mas ancha que el cauce actual, á fin de que se puedan proyectar las obras con desembarazo.

Si el río fuere ancho y caudaloso habrá que tomar precauciones especiales para fijar la situación de los puntos y determinar la profundidad con referencia al plano de aguas actual.

Lo primero se consigue cuidando de seguir la alineación del perfil y midiendo la segunda cada 10, 15 ó 20 metros, si esto es posible; ó bien midiendo con un sextante los ángulos que en el punto considerado forman con la alineación del perfil las visuales dirigidas á dos estaciones determinadas del longitudinal ó fijando estas alineaciones desde fuera y midiendo su dirección y con ella la situación del punto en el plano ó finalmente midiendo los ángulos á tres estaciones del perfil longitudinal y determinando la situación del punto por intersección inversa por el cálculo ó por medio del trasportador de dos alidadas (número 24, figura 26).

La profundidad, cuando no fueren suficientes las perchas, se mediría con la sonda evitando ó teniendo en cuenta la influencia de la corriente; pero como esto es bastante difícil, se ha de procurar utilizar el primer medio en cuanto sea posible empleando delgadas y rígidas barras de hierro.

47 — Planos acotados.

Para que sean completos no solo deben tener la altitud verdadera ó convencional, que permita hallar por sencilla sustracción la altura relativa entre cada dos puntos cualesquiera de los característicos de los accidentes planimétricos del terreno que comprenden, sino que es preciso que contengan la situación de todos los demás que indiquen variación de pendiente, de tal manera que la recta, que va desde uno á cualquiera de los que se encuentran á su alrededor, coincida sensiblemente con la superficie del terreno, prescindiendo, como hemos dicho al hablar de los perfiles, de los pequeños y mudables accidentes.

Es consiguiente que uniendo por rectas una serie de estos puntos, con sus cotas se deducirá inmediatamente el perfil que por ellos pasa y queda por su medio completamente puesto en evidencia el relieve del terreno de la sección correspondiente.

Para conseguir un plano acotado con los antiguos aparatos, era preciso levantar primero el plano geométrico incluyendo como detalles todos los puntos de variación de pendiente, haciéndose despues la nivelación de todos los puntos característicos en los conceptos planimétrico y del relieve, lo cual implicaba un trabajo penosísimo, que solo se realizaba en los casos indispensables, reduciéndole todo lo posible; esto es, á las estrechas zonas de estudio para deducir de las cotas y separación de los puntos los perfiles longitudinales y trasversales; no sucede ahora lo mismo por la extrema facilidad y rapidez con que se determinan las tres coordenadas de cada punto y por eso todos los planos que se hacen con los modernos procedimientos, son ó deben ser planos acotados, si bien en algunos casos, se reducen los puntos determinados á los que principalmente caracterizan los accidentes planimétricos, lo cual es poco recomendable, porque resultan aquellos incompletos.

Sea cualquiera el procedimiento que se siga, es de la mayor importancia la *buena elección de los puntos característicos*, que bajo el concepto altimétrico, de que ahora nos ocupamos, ha de comprender los de cambio de pendiente de las reuniones y divisorias de aguas y de todos los accidentes del terreno, de manera que, como ya hemos dicho, la recta que une un punto con cada uno de los que le rodean coincida sensiblemente con la superficie del terreno (no hay otro medio de definir la clasificación en términos generales) y no hay para ello que determinar grandísimo número de puntos produciendo trabajo inútil y confusión en el plano, como hacen los que por no darse buena cuenta del objeto creen conseguirle mejor atendiendo mas al número que á las condiciones de situación de cada punto; pero se comprende que así no se consigue, como tampoco se haría si para determinar un poliedro mas ó menos irregular, en lugar de elegir los vértices de sus ángulos lo hiciéramos de puntos intermedios de las aristas y de las caras; pues bien, *toda porción mayor ó menor de cada terreno se puede suponer circunscrita á un*

poliedro y lo que importa es distinguir bien los vértices de los puntos que no tengan este carácter y determinar la situación altimétrica de los primeros mediante nivelaciones poligonales combinadas con otras radiantes, que permiten determinar el relieve por zonas con mas sencillez y menos trabajo que por perfiles longitudinales y trasversales, aunque su objeto final sea idéntico.

En los lagos, los puertos y las costas, como no se ven los accidentes del lecho, no es fácil la elección de los puntos característicos y por esta razón se hace el sondeo en puntos comprendidos en alineaciones rectas y á distancias determinadas para poder construir perfiles arbitrarios con relación á la superficie de las aguas teniendo en cuenta su altura en el momento de la observación, segun la hora é importancia de la marea, cuando esta en ella influya, ó en su defecto se hace el sondeo en gran número de puntos, cuya situación planimétrica se fija por intersección inversa con referencia á tres puntos previamente fijados en tierra, midiéndose los ángulos con un goniómetro de reflexión: en estos casos el número de puntos ha de suplir la falta de la buena elección para llegar á conocer la forma del fondo de las aguas.

Con los planos acotados en la forma antedicha sencillamente se resuelven DOS PROBLEMAS DE USO MUY FRECUENTE; son á saber:

1.° *Conocida la altura de dos puntos del terreno hallar la de otro situado en la recta que los une.*

Siendo la pendiente de esta recta igual al cociente que resulta de dividir la diferencia de las alturas de los dos puntos dados por la distancia horizontal que hay entre ellos, multiplicándola por la distancia del tercer punto á cualquiera de los otros dos se tendrá la altura que habrá que sumar ó restar de la correspondiente al punto, á que esta distancia se refiera, para tener la que se busca.

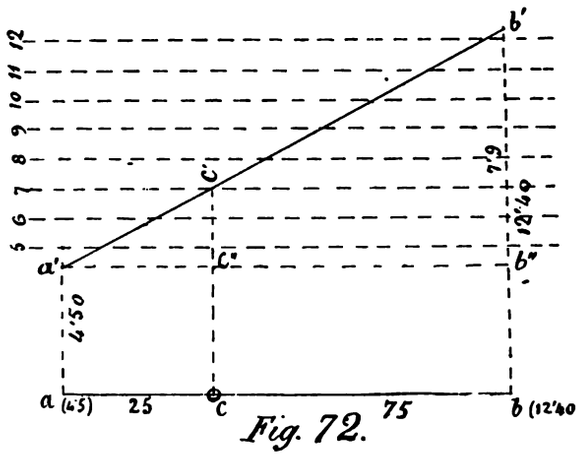


Fig. 72.

En efecto: sean *a* y *b* (fig. 72) los dos puntos dados del plano, cuya cota es respectivamente de 4'5 y 12'4 metros y su distancia de 75 metros y *c*, distante de *a* 25 metros, el punto del que, hallándose en la recta *a b*, deseamos conocer la cota ó altura.

Si por cada uno levantamos una normal y tomando sobre la de *a* la magnitud de 4'5 metros con la escala del plano y sobre la de *b* 12'4 metros, unimos los puntos *a'* y *b'* habrémos construído el perfil del terreno, siendo *a' b'* la proyección vertical de la recta *a b* y *c'* el correspondiente en ella del punto *c*.

Si por el punto *a'* se traza la horizontal *a' b''*, lo que equivale á restar de la mayor altura la menor, se formarán los triángulos rectángulos semejantes $b''a'b'$ y $c''a'c'$ de los que se deduce:

$$a'b'' : b''b' :: a'c'' : c''c' = \frac{b''b'}{a'b''}\ a'c'' \qquad (1.^a)$$

pero $\frac{b''b'}{a'b''}$ es la pendiente por metro; pues el numerador es la diferencia de alturas de los dos puntos dados y el denominador su distancia y $a'c''$ la que separa el 3.° de uno de aquellos y es evidente que si sumamos á la altura de $a' = c''c$ el valor de $c'c''$ se tendrá la altura $c'c$ buscada, que con los datos consignados en la figura será:

$$c'c = \frac{12'4 - 4'5}{75} \times 25 + 4'5 = 7'133 \text{ metros.}$$

mismo en cuanto se pronuncia mas con formas redondeadas en pendientes mas ó menos escarpadas ú otras irregulares mas complicadas, ya que el gran número de cotas necesario para determinarlas, en lugar de facilitar su apreciación, confunde y obscurece el concepto de la forma del relieve.

Esta dificultad se resolvió (1) por medio de las *curvas de nivel* (2) ó *proyección horizontal de la intersección de superficies de nivel con la del terreno,* las que sin perturbar los límites de los accidentes planimétricos aparecen sobre ellos dando á conocer el relieve en que se desenvuelven; de manera que si *los perfiles ponen de manifiesto, aunque de una manera incompleta, el relieve* y los *planos acotados los accidentes planimétricos,* los *planos con curvas de nivel lo hacen á la vez de unas y otras condiciones,* especialmente donde esto es mas necesario, en los terrenos de relieve pronunciado con formas redondeadas ó mas ó menos irregulares; pero á tal objeto es preciso que tales superficies de nivel ó los planos horizontales en cada estación, que son sus elementos, sean equidistantes para que se haga patente con la separación de las curvas la pendiente y que la *equidistancia varíe con la escala y con las condiciones del relieve* para evitar confusión en unos casos y deficiencia de representación en otros.

Desarrollemos algo mas estas indicaciones.

Como cada curva de nivel queda caracterizada con una sola cota, basta esta para expresar las de todos los puntos de aquella simplificando grandemente la anotación; ordinariamente, sin embargo, se escriben las cotas de las curvas en dos, tres ó mas lugares ordenadamente para facilitar su busca, si bien otras veces se omite las de algunas que fácilmente se deducen de otras que se dibujan mas gruesas y sirven para caracterizar el grupo; es decir que si, por ejemplo, la equidistancia es de 1 metro y las formas del terreno tales que las curvas no estén muy separadas, se dibujarán mas gruesas las de cota 0, 5, 10, 15, etc., ó sea cada cinco; si aquella fuera de 2 metros se anotarán las de 0, 10, 20, etc.; si fuera de 2'5 metros la equidistancia se anotarían cada cuatro ó sean las de 0, 10, 20, 30, etc., con lo que y escribiendo las cotas en las porciones del plano menos cargadas de detalles y en columna se encontrarán y se seguirán las curvas con mucha facilidad, con tanto mayor motivo cuanto que se dibujan con tinta de siena tostada y rara vez siguen el perímetro de los accidentes planimétricos en una grande extensión.

Suponiendo que se haya elegido la equidistancia de las superficies de nivel de tal manera que la recta que une dos puntos, los más próximos de las curvas sucesivas, coincida sensiblemente con la superficie del terreno, no solo de ellas se deduce fácilmente la cota de un punto intermedio cualquiera, el perfil de una alineación y las pendientes del terreno, si no que con su separación y su forma, expresan gráficamente el relieve de este con la entonación de claro-oscuro correspondiente á la luz zenital, cuando son suficientemente próximas.

En efecto:

1.° Sea *E*, figura 73, la proyección horizontal de un punto del terreno de la zona determinada por dos curvas; para calcular su altura bastará trazar por él la recta *A B* normal á las mismas, dividir la altura de *A* sobre *B* por su distancia horizontal, cuyo cociente será la pen-

---

(1) El primero en utilizar las superficies de nivel equidistantes para determinar el relieve del terreno submarino fué el Agrimensor holandés Cruquins (1729); en 1737 Felipe Buache, geógrafo francés, le propuso á la Academia de ciencias, como invención suya, con motivo de haberle aplicado á la determinación del fondo del Canal de la Mancha; en 1771 Ducarla hizo igual propuesta á la misma Academia relativamente á las montañas de la Suiza suponiendo que Buache no le había dado tal alcance ni aun comprendido el método por él aplicado; despues otros y especialmente el Capitán de Ingenieros Clerc demostró en 1809 las ventajas de este sistema de representación y la mejor manera de conseguir las curvas de nivel, cuyo método se ha seguido despues por muchos Topógrafos con diferentes aplicaciones y especialmente en la representación de las montañas en los mapas.

(2) Algunos Autores consideran esta denominación impropia, llamándolas *horizontales* y suponiéndolas intersección de *planos horizontales* con la superficie del terreno; pero sucede lo contrario, siquiera los últimos sean los elementos de aquellas superficies; para convencerse de ello basta tener en cuenta el caso en que los puntos de una ó varias curvas sean determinados desde dos ó mas estaciones, cuyos planos horizontales no constituirán un plano horizontal ó varios paralelos sino una superficie de nivel ó varias paralelas, de las que aquellos son los elementos.

Cuando el valor de D sea conocido por medición directa ó indirecta sobre el terreno, el primero de p será mas exacto que el segundo, porque el de d, generalmente se consigue midiéndole sobre el plano; pero como se hace con suma rapidez y en los de grande escala con suficiente precisión para la generalidad de los usos, es de mayor aplicación.

Por regla general la equidistancia real, y por consiguiente la gráfica, es la misma para todas las curvas de un mismo plano, y como segun se deduce fácilmente de las ecuaciones primera y segunda, las pendientes y las distancias son inversamente proporcionales (1), resulta que la separación de las curvas indicará claramente las pendientes del terreno.

Esto indujo á algunos Topógrafos en el primer tercio del siglo pasado, á proponer que se fijara la misma equidistancia gráfica para todos los planos y mapas, fuera cualquiera su escala, pues siendo fácil acostumbrar el ojo á apreciar la separación de las curvas lo haría tambien de las pendientes, habiéndose desechado la propuesta, porque resultaría de su aplicación confusión de las curvas en unos casos y excesiva separación en otros.

Ciertamente así sucedería; pero tambien ocurre con las equidistancias reales señaladas según las escalas con la condición de que sea la misma para cada plano ó mapa y de aquí resulta que no estén conformes los Autores, ni los Centros encargados de los grandes trabajos topográficos y geográficos en la equidistancia real ó gráfica que deba adoptarse, y esto es consiguiente á que la separación conveniente depende del objeto á que se destinan y de la variabilidad del relieve: cuando las condiciones de este son mas ó menos uniformes puede aceptarse una equidistancia; pero cuando no lo son, la única para cada plano ó mapa motiva siempre los inconvenientes señalados á la única general, la que especialmente se había propuesto para los mapas de escalas menores de $^1/_{10000}$

En nuestro concepto hay que señalar la equidistancia gráfica en cada caso teniendo muy en cuenta el destino del plano, la escala y las condiciones generales del relieve; pero evitando los inconvenientes apuntados utilizando la interpolación en unos casos y supresión en otros de determinadas curvas, á fin de conseguir el objeto de representar en todos claramente el relieve del terreno, lo cual puede hacerse sin perjuicio de la claridad, utilizando intensidades ó colores distintos y gruesos diferentes en las líneas de las curvas ó haciendo que estas sean contínuas, de trazos, de puntos ó de estos y aquellos combinados.

En corroboración de las precedentes indicaciones, consignamos á continuación los tipos de equidistancias reales ó gráficas que señalan algunos ilustrados Autores.

Según Leagre (2), el Coronel de Ingenieros geógrafos Bonne, que hizo la propuesta de la equidistancia gráfica única para todos los mapas, la fijaba en ¼ de milímetro, resultando para cada escala la real siguiente:

Para las escalas de	$^1/_{1000}$	$^1/_{2000}$	$^1/_{5000}$	$^1/_{10000}$	$^1/_{20000}$ y	$^1/_{50000}$
la equidistancia real de	25 ctm.	50 ctm.	1'25 m.	2'50 m.	5 m. y	12'5 m.

El mismo Autor despues de hacer constar (3) que «*la equidistancia podrá variar en razón de la escala de la carta y de las formas del terreno;* PERO DEBERÁ SER SIEMPRE LA MISMA EN TODAS LAS PARTES DE UNA MISMA CARTA» consigna como equidistancias mas generalmente utilizadas en los planos y mapas topográficos las siguientes:

---

(1) De la 2.ª se deduce para distintas pendientes

$$pd = e;\quad p'd' = e$$

ó $pd = p'd'$ de donde $\frac{p}{d'} = \frac{p'}{d}$

(2) Cours de Topographie, volúmen I, página 368.

(3) Obra citada, volúmen I, página 369. En la siguiente admite la interpolación y supresión de curvas, que se hace por el Depósito de la Guerra en Francia.

ESCALAS	EQUIDISTANCIAS MÉTRICAS	EQUIDISTANCIAS GRÁFICAS
$^1/_{1000}$	1 metro	1 milímetro
$^1/_{2000}$ y $^1/_{5000}$	2 id.	1 mm. ó $^1/_5$ de mm.
$^1/_{10000}$	5 id.	½ mm.
$^1/_{20000}$	5 ó 10 id.	¼ ó ⅕ de mm.
$^1/_{50000}$	10 ó 20 id.	$^1/_5$ ó $^2/_5$ de mm.

Goulart-Henrionnet, según referencia de Giol y Soldevilla (1) fijaba como equidistancias mas comunmente utilizadas:

PARA LAS ESCALAS DE	EQUIDISTANCIAS REALES
$^1/_{5000}$	2'5 metros
$^1/_{10000}$	5 id.
$^1/_{20000}$	10 id.
$^1/_{40000}$	15 id.
$^1/_{80000}$	20 id.

Suarez Inclán (2), acepta como constante la equidistancia gráfica $e = ½$ mm. ó sea doble de las propuesta por el Coronel Bonne.

Prévot, dice (3) que las equidistancias gráficas mas usuales son de ¼ y ½ milímetro; pero en el apéndice del mismo libro (página 428) su Autor Roux, admitiendo las curvas intercaladas y la supresión de otras según los casos, consigna como equidistancias gráficas mas usuales para la escala de $^1/_{5000}$ en las regiones medias 0'4 milímetros en las montañosas 1 metro.

$^1/_{10000}$	»	»	0'5	»	»	1	»
$^1/_{20000}$	»	»	0'25	»	»	0'5	»

consignando las reales ó métricas correspondientes.

TRAZADO Y LEVANTAMIENTO DEL PLANO DE LAS CURVAS DE NIVEL

Este trabajo presupone la existencia del plano geométrico ó mas ó menos acotado del terreno, en que se haya de realizar.

El *trazado* de las curvas de nivel sobre el terreno se puede hacer directa ó indirectamente y el *levantamiento del plano* de sus puntos sucesiva ó simultáneamente.

Trazado directo

Está fundado en la resolución del siguiente sencillo problema de nivelación.

Conocida la altura de un punto del terreno, determinar otro de otra dada y todos los demas que correspondan á la misma curva de nivel.

En efecto: si *A* (figura 74) es un punto de una alineación, *A B*, del plano geométrico, cuya altitud real ó arbitraria de 8'14 metros se haya calculado por la nivelación poligonal previa, de que luego hablarémos, bastará fijar sobre la misma alineación los puntos *a*, *b*, *c*... de altitud respectivamente de 9, 10, 11... metros y sucesivamente los a^1, a^2, a^3... b^1, b^2, b^3... etc., de igual altitud y que determinen todas las inflexiones de cada curva, para que queden trazadas las correspondientes de metro en metro del cerro representado en la figura.

Para conseguirlo se procede de la manera siguiente:

Colocado el nivel en un punto *N* convenientemente elegido para que la visual horizontal encuentre la mira puesta en *A* á mayor altura de 3 metros y menor de 4, al objeto de utilizar la misma estación del nivel para el mayor número de puntos de dos ó mas curvas,

(1) Tratado de Topografía, volúmen II, página 156.
(2) Tratado de Topografía, página 15.
(3) Topographie, volúmen II, página 373.

á cuyo efecto se han de tener tambien en cuenta las distancias, se lee y anota la altura de mira, que suponemos sea 3'78 metros, con lo cual resulta que la altitud del plano visual será de 8'14 + 3'78 = 11'92, que excede á la del punto *a*, que se quiere determinar, en 2'92 metros, por consiguiente si á esta altura se fija la plancha de la mira (1) y se hace que el peón la vaya colocando en la alineación *A B*, cuando llegue al punto *a* la visual coincidirá con la línea de fé de la plancha.

Fijado el punto *a* con una estaca, caña ó pequeño jalón, despues de bajar 1 metro la plancha de la mira, se determinaría el punto *b* á 10 metros de altitud y bajando otro metro la plancha se encontraría del mismo modo el punto *c* de altitud 11 metros, puesto que para *b* la plancha de la mira estaría á 1'92 y por consiguiente la altitud de *b* sería 11'92—1'92=10 y para *c* 11'92 — 0'92 = 11 metros, ya que *a*, *b* y *c*, se encontrarán respectivamente por debajo del plano visual 2'92, 1'92 y 0'92 metros.

En lugar de un punto, á que el problema citado se refiere, hemos supuesto que se determinaran 3, porque permitiendo las condiciones del terreno y la equidistancia fijada trazar tres curvas á la vez, debe procederse así para evitar trabajos inútiles.

Si en lugar de ser 1 metro la equidistancia, fuera de 5 metros y la altitud de la primera curva, *a*, de 10, como su diferencia á la del plano visual, sería 11'92 — 10 = 1'92 á esta altura colocaríamos la plancha de la mira y recorriendo con ella la alineación *A B* encontraríamos el

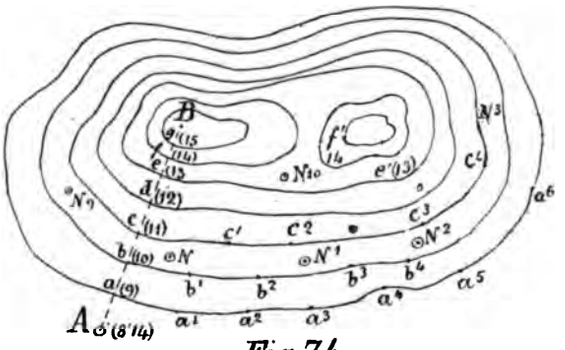


Fig. 74.

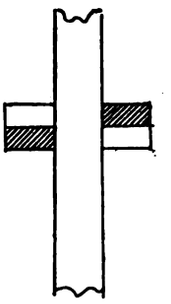


Fig. 75.

punto en que la cruza la curva buscada; en este caso no se podría determinar mas que una curva y aun para hallar el punto de cruce de la inmediata superior con la alineación, muchas veces habría que hacer dos estaciones de nivel; se podrá evitar una si al fijar el de la curva anterior se señalara sobre la alineación el punto mas alto que permitiera la primera altura de mira, v. gr., de 20 centímetros, que como ya tendría la altitud de 11'92—0'20=11'72 nos permitiría con una sola estación hallar el de altitud de 15 m., pues bastaría para ello una altura de mira sobre el punto provisional al efecto señalado de 3'28 m. eligiendo convenientemente la estación del nivel.

Conviene fijar mucho la atención en estas indicaciones para reducir todo lo posible las estaciones del nivel, porque no solo hacen perder mucho tiempo y complican los registros y cróquis, sino que aumentan los errores, y al mismo efecto se han de tener en cuenta las distancias

(1) Suponemos que se utilice al efecto la mira de plancha en corredera, porque es más cómodo y rápido; pero sino se dispusiera más que de las parlantes, convendría disponer una plancha mitad roja y mitad blanca para fijar la altura conveniente; no haciéndolo así se fatiga mucho la vista inútilmente y se expone á incurrir en equivocaciones; sólo cuando se desée medir al mismo tiempo la distancia con los hilos estadimétricos se podrán utilizar las parlantes; pero aun en este caso será conveniente el uso de la plancha suplementaria, ya que conociéndose la altura que debe tener su línea de fé con ella hay que hacer coincidir el hilo axial horizontal y aunque no se vea la graduación de la mira ya se conoce y anota para las comprobaciones de la distancia; pero sería mas cómodo sustituir la plancha ordinaria por otra de la forma de la figura 75, que dejaría visible la graduación de la mira y sería de más fácil construcción; pues penetrando las dos planchuelas en unas ranuras laterales del cuerpo de la mira y atornilladas á otra que la abrazara por detrás y por los costados, con un tornillo de presión se podría asegurar á la altura conveniente.

á que de cada estación del nivel se encuentren los puntos, que parezca sea conveniente determinar.

Una vez fijados los puntos *a*, *b* y *c* de cruce de las tres primeras curvas con la alineación, se asegura la plancha de la mira á 2'92 m. y se coloca nuevamente en el punto *a* comprobando su altitud; en caso necesario se repite la operación en *A* y se rectifica la posición de *a;* esto conseguido y bien asegurada la plancha de la mira el peón recorre horizontalmente el terreno presentando la mira al observador en los puntos de inflexión y para fijar el de la curva subirá ó bajará en el sentido de la máxima pendiente hasta que coincidiendo la visual con la linea de fé quede determinado el punto a^1, que se puede marcar con una pequeña caña ó estaca con un papel blanco en que conste su designación; del mismo modo se fijará y señalará el punto a^4, no haciéndolo del a^2 y siguientes por considerarlos demasiado lejanos.

En el caso supuesto sin tocar el nivel de la estación *N* el peón bajando la plancha de la mira á 1'92 metros la colocará en *b* y despues de comprobada ó rectificada su posición siguiendo horizontalmente el terreno se situará en b^1 ó cerca de él determinándole como digimos para a^1 y lo mismo se hará para b^2 de esta segunda curva, todos los que se señalarán tambien con pequeñas cañas ó estacas y papel de distinto color del utilizado en los puntos de la curva *a* para distinguirlos fácilmente, escribiéndose en cada uno la designación correspondiente.

De igual manera se comprobará el punto *c* y se determinarán c^1 y c^2 señalándolos en la forma antedicha, pero utilizando papel de distinto color que los antes empleados.

En casos como el supuesto conviene disponer de tres peones porta-miras dedicando uno á cada curva, por cuyo medio se economiza tiempo y se evitan equivocaciones.

No pudiéndose utilizar la estación de nivel *N* para mas puntos, se traslada á N^1 y colocando la mira, si es una sola, en a^4 y si son tres cada una en el último punto determinado para cada curva, esto es a^3, b^3 y c^3 se calcula la altitud del plano visual con la altura de mira de a^3 y se comprueba con las de los otros dos, es decir que, si la primera es de 3'55, las demas deben ser de 2'55 y 1'55 y en la forma antes dicha se determinan y fijan en la curva *a* los puntos a^3 y a^4, en la *b* el b^3 y en la *c* el c^3 y cambiando despues la estación del nivel á N^2 se medirá la altura del punto c^3, v. gr., que servirá para determinar los puntos sucesivos de la misma curva; con la de b^3 que será un metro mayor, se hará lo mismo con los de la curva *b* y con la altura de mira del punto a^4, que será dos metros mayor que la de c^3, se determinarán los puntos sucesivos de la curva *a*; es decir que *en cada cambio de estación de nivel* se determinará la altura de mira colocándola en el último punto determinado de la misma curva y se comprobará con los análogos de las curvas inmediatas en el caso de que se puedan hacer varias á la vez, lo que da mas seguridad y permite proceder con mas rapidez.

Cuando, como en el caso representado en la figura, las curvas son cerradas, continuando en la forma indicada se llegará á una estación N^9 desde donde se verán ya en buenas condiciones los puntos *a*, *b* y *c* orígen de las curvas y como la altitud de su plano visual estará determinada con relación al último punto de la curva respectiva, colocando la mira en aquellos se verá directamente el error de cierre en cada una comprobando la operación.

Como los puntos de cada curva ó grupo de curvas se determinan por nivelación compuesta, en la comprobación del cierre sobre sí mismas ó en la que en otro caso se tendría mediante la altitud de un punto de otra alineación previamente calculada, pueden utilizarse las comprobaciones, tolerancias y distribución de errores para aquellas establecidas, teniendo en cuenta, en el segundo caso, el error tolerado en la nivelación previa entre los puntos inicial y final de la porción de la curva ó curvas trazadas; pero generalmente se admiten mayores tolerancias, porque las diferencias de altitud de 4 ó 5 centímetros en los puntos no alteran sensiblemente la forma del relieve.

De la misma manera que se determinó la altitud del plano visual de la estación N con referencia á la de *A* se hace del correspondiente al de la estación N^{10} relativamente á la de *c* y con ella se calcula la altura de mira de las curvas sucesivas superiores, la que será

1, 2, 3 metros menor que la de *c* y se determinarán los puntos de inflexión de las curvas en la misma forma dicha para las tres primeras pudiéndose utilizar los papeles con la designación correspondiente de los mismos colores y en el mismo órden, por ejemplo, blanco, azul y roj pues divididos en grupos de tres curvas no hay peligro de confusiones y se conoce desde luego á cual de ellas pertenece.

Al llegar á la curva *f* (14) se observa que cierra á la izquierda de la estación quedando á derecha puntos de la misma y mayor altitud indicando, aunque ya se nota á la vista, que cerro tiene dos cúspides y consiguientemente curvas cerradas independientes, cuyos punt inmediatos se pueden determinar á la vez, continuando los restantes con separación para traz completamente estas curvas de igual altitud, si bien cuando la equidistancia es pequeña, terreno despejado y las distancias cortas, podrán determinarse desde una estación de nivel cada cúspide referidas á la altitud de puntos determinados desde la estación N°, lo cual permitirá economizar tiempo en el trazado y en el levantamiento del plano correspondiente.

Si las curvas no fueran cerradas, sino que se desarrollaran entre dos alineaciones con puntos de altitud previamente determinada ó entre dos perfiles, se procedería en la misma forma se comprobaría con la altitud del que se tomara para término de cada curva ó grupo de curvas y en este caso para evitar caminatas innecesarias y la consiguiente pérdida de tiempo se haría el trazado de unas curvas caminando del perfil de la izquierda al de la derecha y de otra en sentido contrario.

OBSTÁCULOS

Muchas veces se presentan en el trazado de las curvas los que hemos indicado al ocuparnos de la *nivelación compuesta y de los perfiles;* pero como aquellas no los cruzan de ordinario, fácilmente se ocurrirá sobre el terreno la manera de salvarlos continuando al otro lado de ellos la determinación de los puntos de las mismas curvas, pues conviene hacerlo á la vez de todas las interrumpidas por el mismo obstáculo; es decir, que si este consiste, v. gr., en un escarpe de roca, antes y despues de él se marcarán los puntos de todas las curvas que comprenda, para lo cual basta conocer el punto anterior y posterior de una de las curvas y determinar los otros con referencia á este y á tal efecto se puede utilizar ó una nivelación especial, que por encima ó debajo del escarpe permita salvarle, ó una estación del nivel en la ladera opuesta, desde donde se vean los puntos de ambos lados del escarpe con buenas condiciones, ú otro medio apropiado al objeto, y determinando el contorno del escarpe planimétrica y altimétricamente fácil será deducir la forma y situación de las curvas determinantes del escarpe, por lo que no creemos necesario detenernos mas en detallar la manera de resolver estas dificultades.

TRAZADO INDIRECTO DE LAS CURVAS

Si se completa el plano geométrico con perfiles que crucen todos los accidentes altimétricos en el sentido de sus mayores pendientes y de tal manera dispuestos que uniendo oportunamente sus puntos, las rectas con que se haga se confundan sensiblemente con el terreno ó si se hace el plano acotado de este, será fácil deducir las curvas de nivel que caracterizan el relieve sin hacer su trazado directo sobre el terreno, ni la proyección vertical de los perfiles pues aquello se consigue con la proyección horizontal y las cotas propias de cada perfil ó las características del plano acotado, ya que los dos casos se reducen á uno solo, pues en ambos se conoce la distancia horizontal y las altitudes de cada dos puntos sucesivos que comprendan las de una ó mas curvas y aplicando la fórmula segunda del número 47 se calcularán fácilmente los puntos de cruce de las curvas.

Supongamos, en efecto, que entre los puntos *a* y *b* (figura 72), de altitud respectivamente de 4'5 y 12'4 metros y distantes entre sí 75 metros, queramos situar los puntos correspondientes á las curvas de metro en metro, 5, 6, 7... 11 y 12.

Llamando para mayor sencillez d, d^1, d^2, d^3, d^4... d^7, á las distancias de estos puntos al a, resultará:

$d = \frac{75}{7'9} \times 0'5 = 9'494 \times 0'5 = 4'747$ metros $d^5 = 9'494 \times 5'5 = 52'217$ metros

$d^1 = \frac{75}{7'9} \times 1'5 = 9'494 \times 1'5 = 14'241$ » $d^6 =$ » $\times 6'5 = 61'711$ »

$d^2 =$ » = » $\times 2'5 = 23'735$ » $d^7 =$ » $\times 7'5 = 71'205$ »

$d^3 =$ » = » $\times 3'5 = 33'229$ »

$d^4 =$ » = » $\times 4'5 = 42'723$ »

y marcando estos puntos á partir de *a*, se tendrá la proyección horizontal de los en que las superficies de nivel determinantes de las curvas cortan á la recta que une los dos puntos del terreno *a'*, *b'*.

Si por encima ó debajo de ellos se hubieran determinado otros, se hará lo mismo relativamente á las curvas superiores é inferiores y de igual manera se procederá en los demas perfiles ó líneas de puntos acotados, que se hayan considerado necesarios para caracterizar el relieve, y uniendo los puntos de igual altitud con curva contínua, *cuidando de no hacerlo de los que correspondan á dos curvas diferentes de igual altitud*, como las *f* y *f'*, *g* y *g'*, de la figura 74, se tendrán trazadas, no sobre el terreno, pero sí sobre el plano, las curvas de nivel.

Como la equidistancia aceptada en el caso referido es de un metro, la diferencia entre las distancias parciales en los puntos de las curvas es igual á 9'494 metros ó el inverso de la pendiente; si la equidistancia fuera de 2, 3 á 5 metros, sería el duplo, triplo ó quintuplo de aquel número, lo que claramente dice que despues de determinada la primera distancia parcial las siguientes se pueden conseguir con una suma ó una multiplicación.

Tambien se pueden determinar con una sencillísima construcción gráfica.

En efecto: por el punto *a* (figura 76), se trazará una línea *a c* con inclinación arbitraria, y con una escala cualquiera se tomará sobre ella una distancia *a d*, que represente la diferencia de la cota de *a* á la de la primera curva siguiente, o'5 metros en el caso supuesto, y despues tantas como sean las curvas comprendidas entre *d* y *b* con distancias que en la misma escala representen la equidistancia y finalmente el punto *c* que corresponda á la diferencia de su cota á la

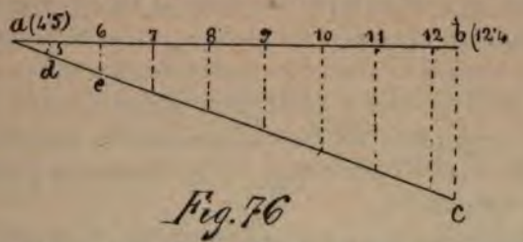


Fig. 76

de *a*; uniendo *c* con *b* y trazando las paralelas que en la figura aparecen, la recta *a b* quedará dividida en partes proporcionales á las distancias tomadas sobre *a c* y determinados los puntos de cruce de las curvas.

Utilizando una cuadrícula con la escala del plano, en la que se marcan mas las líneas correspondientes á la equidistancia, construyéndola en una pequeña cartulina, aplicándola á la recta que une los puntos acotados y una regla á las alturas expresivas de las cotas de los puntos extremos, de las que se restan todas las unidades enteras del mas bajo, se vé inmediatamente donde el canto de la regla corta á las líneas correspondientes á la equidistancia y á ojo se señala su proyección sobre la recta dada fijando los puntos de cruce sin necesidad de hacer construcciones especiales conservando el plano limpio; pero si la equidistancia y la escala son pequeñas resulta confusa la cuadrícula y molesta su aplicación.

Como verémos al describir las de nuestro *Circulo logarítmico*, por su medio se calculan rápidamente las distancias aludidas y conservándolas ordenadamente sirven para todos los planos, que en diferentes escalas se puedan construir del mismo terreno, lo que no se consigue con las construcciones gráficas indicadas y sin aumentar la molestia y el tiempo necesario se obtiene mayor precisión en los resultados y la ventaja indicada, por cuyos motivos *es preferible la solución numérica á las gráficas*.

LEVANTAMIENTO DEL PLANO DE LAS CURVAS TRAZADAS SOBRE EL TERRENO

Marcados en él, en la forma antedicha, todos los puntos determinantes de cada curva, para fijar su situación en el plano geométrico se puede utilizar cualquiera de los procedimientos explicados; pero, como son muchos los puntos y no muy separados entre sí, ahora que todos los anteojos de los goniómetros y el de la alidada de las planchetas son distanciómetros, sería un inconveniente utilizar los antiguos procedimientos con la medición directa, ni siquiera el de intersecciones si no para puntos muy especiales y lejanos y pues que no es necesaria grande precisión en las distancias, porque no alterarían la forma del relieve errores en ellas de 20 ó 25 aun de 50 centímetros, lo mas sencillo y económico será determinar la situación de tales puntos por radiación desde las estaciones que hayan servido para el levantamiento del plano geométrico y en caso de hallarse muy lejanas, desde otras auxiliares determinadas desde ellas siendo á tal objeto preferibles á los antiguos goniómetros las planchetas modernas, no solo porque economizan muchos trabajos de gabinete, si no porque permiten dibujar directamente las curvas á la vista del terreno con los puntos determinados y es mas fácil hacerlo bien y completar el relieve con pequeños detalles interesantes que utilizando los cróquis.

La *elección de las estaciones* no ofrece dificultad á la vista del terreno; pero puede establecerse como regla general que deben hallarse en las márgenes de las vaguadas y en las divisorias de las lomas para ver en buenas condiciones de distancia é inclinación el mayor número de puntos.

Al objeto de medir las distancias largas con mayor facilidad y evitar los inconvenientes que los herbajes matorrales y otros estorbos semejantes con frecuencia dificultan esta clase de trabajos, deben preferirse las *miras de dos planchas* con la fija en el extremo superior y en terrenos despejados en distancias menores de 150 metros las parlantes ordinarias.

TRAZADO Y LEVANTAMIENTO DEL PLANO DE LAS CURVAS SIMULTÁNEAMENTE

Como quiera que realizando estas dos clases de trabajo sucesivamente se pierde mucho tiempo y obliga á recorrer el terreno repetidas veces, se ha buscado el medio de evitarlo realizándolos á la vez utilizando un nivel para señalar los puntos de las curvas y una plancheta para fijar su situación, lo cual ademas de engorroso y caro es poco exacto y nada recomendable ahora que muchos niveles inclinómetros y clisímetros tienen brújula, limbo azimutal y antcojo distanciómetro, con los que se hacen los dos trabajos simultáneamente con mayor rapidez, precisión y economía, siendo al efecto preferibles los inclinómetros y clisímetros; pues dejan mayor libertad de acción al operador.

Supongamos para demostrarlo que disponiendo de un clisímetro de las indicadas condiciones hagamos estación en *A* (figura 74); podríamos midiendo la altura del eje del giro del anteojo calcular la altitud del plano visual, arreglar la altura de mira para la de la primera curva y determinar la situación de los puntos *a*, a^1, a^2 y otro al menos de la misma curva á la izquierda de la alineación *A B;* pero prescindirémos de esto concretándonos á determinar la primera estación del nivel por rumbo y distancia con referencia á la alineación *A B*.

Supongamos elegidas las mismas estaciones de nivel anteriores: colocado el aparato en *N* orientado con *N A* y hecha la coincidencia de los ceros del nónius y escala del clisímetro, este quedará convertido en nivel y por el procedimiento antes descrito se fijará el punto *a;* al propio tiempo con los hilos estadimétricos axial é inferior, se conocerá la distancia y con el limbo la dirección quedando determinada la situación del punto *a*, que se marcará para la comprobación; con la misma altura de mira recorriendo el terreno horizontalmente se buscarán los puntos a^1 y a^2 señalando este con una caña y fijando la situación de ambos con la dirección y distancia: bajando un metro la plancha de la mira se buscará el punto *b* de la alineación determinando su situación por rumbo y distancia y lo mismo se hará con los puntos b^1 y b^2 y en la misma forma se buscarán los *c*, c^1 y c^2, terminando las observaciones de la estación *N*.

Con rumbo, distancia y altura de mira, se determina la situación y altitud de la estación siguiente N^1 y en ella se pone el aparato orientado con N^1 *N;* midiendo en cada estación la al-

tura del eje de giro del anteojo se podría calcular la altura del plano visual, pero no es necesario, porque teniendo señalados los puntos a^2, b^2 y c^2 las alturas de mira en cada uno, que diferirán en 1 metro en el caso de que se trata, servirán respectivamente para determinar los puntos sucesivos de cada curva comprobándose mútuamente.

Como los puntos de estación se fijan próximamente en una curva de nivel para poder fijar simultáneamente el mayor número de curvas, el clisímetro se conserva en las condiciones de nivel y si al fijar desde una estación la siguiente se cuida de dar á la plancha de la mira la altura que en aquella tiene el eje de muñones, resultando de la misma altitud, la poligonal que constituyen forma una curva de nivel, que sirve para evitar equivocaciones.

Continuando la fijación de los puntos y determinación de su situación de las tres curvas se llegará á la estación N^9 comprobando con las alturas precedentes de *a*, *b* y *c*, cuya situación servirá tambien para comprobar la poligonal planimétrica formada por las estaciones.

En el terreno despejado que hemos supuesto, desde N^9 se determinará la situación de N^{10} por dirección y distancia y colocando el aparato en N^{10} orientado con $N^{10}N^9$ se puede comprobar con *A*, *B* y *N* utilizándole como clisímetro; pero reducido á la condición de nivel con la coincidencia de los ceros y colocada la mira en *c* se calculará la altitud del plano visual; como antes se fijarán los puntos de las curvas y se determinará su situación planimétrica por dirección y distancia utilizando las demas estaciones que fueren necesarias.

Comparando el trabajo ahora descrito con el del trazado directo de las curvas con nivel ordinario, se vé que en aquel, *para conseguir los dos objetos*, no hay mas que hacer la referencia de las estaciones y anotar los rumbos y alturas de mira con dos hilos para calcular la distancia dejando para el gabinete los cálculos y construcción del plano, si bien hace innecesaria la marcación de los puntos exigiendo, cuando mas, el señalamiento provisional de los ultimos de cada curva vistos desde cada estación, aunque no sea indispensable, pero si conveniente para las comprobaciones sucesivas é inmediatas; y como el trabajo subsiguiente de gabinete es sencillo y poco molesto calcular las coordenadas planimétricas de todos los puntos utilizando el Círculo logarítmico y con ellas la construcción es rápida y exacta y por otra parte este pro-

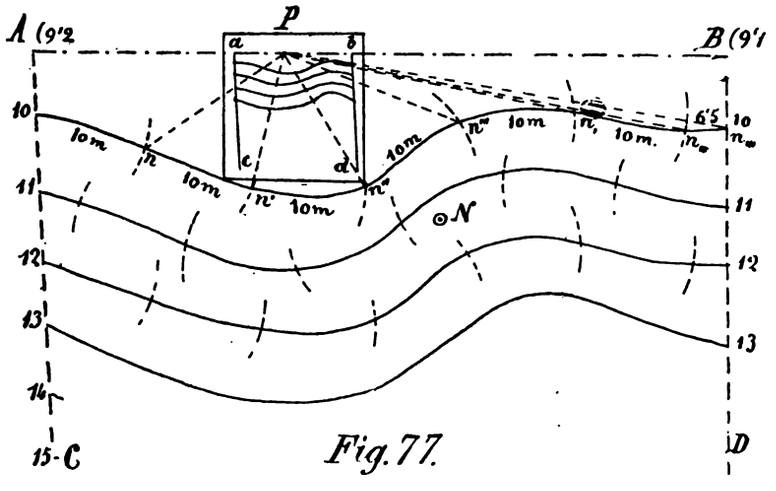


Fig. 77.

cedimiento ofrece todos los medios de comprobación de los modernos, *es indudablemente el que se debe preferir, cuando se creyèra conveniente utilizar el trazado directo de las curvas.*

De buen grado dejaríamos en su consecuencia de exponer algunos métodos de levantamiento preconizados por otros Autores; pero para que no se nos tache de intransigentes y puedan nuestros lectores formar juicio exacto con su comparación, vamos á ocuparnos de ellos.

Método de la cadena arrastrada (chaine traïnante). — Es el mas generalmente admitido por considerarle de mas fácil aplicación.

Se opera entre tres alineaciones, *A B*, (figura 77) casi horizontal y *A C* y *B D* que van en la dirección de la máxima pendiente, las que, si no han sido determinadas en el plano geométrico,

se sitúan con referencia á puntos notables del mismo; se construye el polígono abierto ó cerrado por ellas y otras formado en el papel de una plancheta, que se estaciona en el punto que considere mas conveniente orientándola; sea *P* este punto y *N* el de estación del nivel.

Supuestas conocidas las cotas de los puntos *A* y *B*, que se habrán determinado por la nivelación poligonal de que luego hablarémos, con referencia á la primera se determina en la alineación *A C* el punto de cota 10, asegurando fuertemente la plancha de la mira; al pié de esta se fija un extremo de una cadena ó de una fuerte cinta de 10 m. y el otro le sujeta un peón en el primer punto, mientras el portamira recorre horizontalmente el terreno hasta que la cadena ó cinta quede estirada; en este momento siguiendo las indicaciones del Topógrafo que tiene el nivel, sube ó baja permaneciendo estirada la cadena, lo que equivale á describir el arco indicado en la figura y cuando la visual pasa por la línea de fé de la plancha, estaciona la mira la que el de la plancheta dirige una visual marcando su traza y clava en el punto *n*, una aguja el porta-mira; pónense en movimiento los dos peones hasta que el de atrás llega al punto n, y el otro hasta que la cadena quede nuevamente estirada, subiendo ó bajando en el terreno según las indicaciones del Topógrafo que tiene el nivel; conservando la cadena estirada se encuentra el punto siguiente de la curva y dirigiendo el de la plancheta la visual á la mira colocada en él marca la traza; clava el porta-mira otra aguja y se ponen los dos peones en movimiento para buscar ó fijar el otro punto en la misma forma.

Mientras esto hacen del primero al segundo punto, el Topógrafo que tiene la plancheta determina la situación del punto *n* trazando desde el (10) de la alineación *A C* un arco con radio

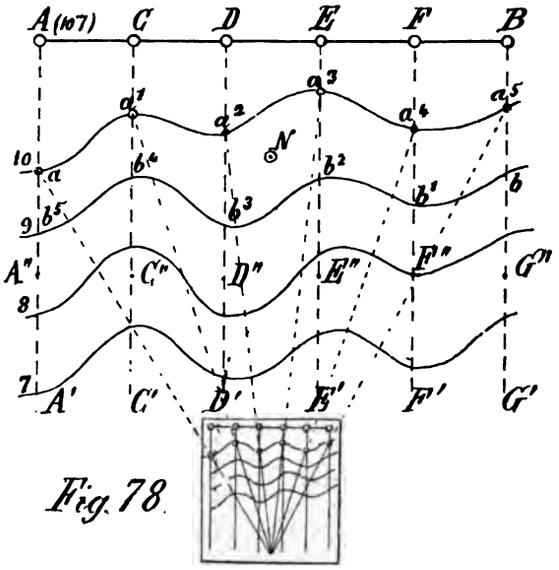


Fig. 78

de 10 metros hasta cortar la visual correspondiente y lo mismo hará en todos los demas desde el punto anterior.

Llegados los peones al punto $n_{\prime\prime}$ como este dista menos de 10 metros del punto de cruce de la curva con la alineación *B D*, se determinará en ella el punto $n_{\prime\prime\prime}$ midiendo la distancia $n_{\prime\prime}\, n_{\prime\prime\prime}$ que suponemos sea 6'5 m. y la $n_{\prime\prime\prime} B$, que comunicarán al observador de la plancheta para comprobar la poligonal así trazada y la nivelación lo quedará colocando la mira en el punto *B* y observando si su altura es 0'90 m. mas alta que en $n_{\prime\prime\prime}$ como debe ser.

Si estas comprobaciones justifican la operación, se procede á trazar los puntos de la curva siguiente y fijar su situación en el plano de la plancheta y es evidente que para evitar caminatas innecesarias se puede proceder en sentido contrario que en la anterior partiendo de la cota (11) de la alineación ó perfil *B D*, como lo indican los arcos de la figura; esto no lo advierten los Autores que describen el procedimiento, pero sería conveniente obrar así en caso de aplicarse y tambien utilizar cadena, cinta ó cuerda de 15 ó 20 metros en lugar de las de 10, cuando

las condiciones del terreno lo permitieran; pero en ningún caso deben admitirse tales mediciones al paso por las muchas equivocaciones y crasos errores á que conducen y si bien esto lo proponen algunos solo para los planos expeditos, no es admisible, porque no lo es tampoco este procedimiento, ya que con mayor economía y rapidez se conseguirían mejores resultados determinando la situación y la altitud de un corto número de puntos bien elegidos y deduciendo las curvas de los perfiles correspondientes.

Método de las alineaciones paralelas. — Muy semejante al anterior, es, como este, solo aplicable á terrenos despejados y no muy accidentados.

Elegida una base *A B* (figura 78) determinada en el plano geométrico ó con referencia á las estaciones del mismo entre dos puntos de altura conocida por la nivelación general previa, se trazan perpendicularmente á ella las alineaciones *A A'*, *C C'*.... á distancias, no iguales como algunos proponen, sino de manera que crucen el relieve por los puntos mas convenientes y se señalan en el terreno por medio de tres jalones cada una al objeto de que el porta-mira se pueda situar en ellas viendo dos del mismo lado, se construye el plano de estas alineaciones en el papel de una plancheta y se estaciona con ella en un punto desde el que resulten de buenas condiciones la mayor parte de las intersecciones con las trazas de dichas alineaciones, orientándola convenientemente.

Colócase el nivel en un punto *N* de tal manera que se pueda desde él y con referencia á la altitud de los puntos *A* y *B* determinar en las alineaciones extremas el mayor número de cruces de curva con la equidistancia dada.

Con referencia al punto *A* se fija el *a* de cota de 10 m. y se determina su situación dirigiéndole desde la plancheta una visual por su intersección con la línea del plano homóloga á *A A'*; el porta-mira se traslada á la alineación *C C'* colocándose en ella mirando los jalones *C''* y *C* y moviéndose en ella según las indicaciones del Topógrafo que tiene el nivel busca y se fija en el segundo punto, a^1 de la curva, cuya situación se determina por intersección de la línea del plano homóloga de *C C'* con la visual que le dirige el de la plancheta y así se continúa hasta determinar el último punto (a^8) de la curva.

Para comprobar, coloca el peón la mira en el punto *B*, con la altura de esta lo quedará la nivelación y con la intersección de la visual y la alineación *A B* la situación planimétrica, aunque mejor lo quedará midiendo la distancia a^8 *B*.

La situación de los puntos que se hallen en las alineaciones que pasen por la plancheta ó cerca de ella quedará indeterminada sino se mide su distancia á la base por falta de intersección ó ser muy aguda y á tal medición hay por ello que acudir; para evitar este inconveniente en lugar de situar la plancheta, como en la figura aparece, convendría muchas veces hacerlo fuera de las alineaciones á un lado de ellas, desde donde se viera bien todo el terreno.

Terminada la primera curva (*a*) se buscará y fijará el punto *b* de la segunda con referencia á la altura de B ó de a^8 y se continuará como la precedente en sentido contrario hasta b^8 comprobando la altura con la de *a*, y la situación midiendo la distancia entre ambos puntos.

En los cambios de estación del nivel se procede como queda dicho para el trazado directo de las curvas y en los de la plancheta como se ha dicho al hablar de este goniógrafo.

Método del Comandante Clerc. — No difiere del descrito para los niveles y clisímetros estadimétricos con limbo azimutal, sino en que, como en su tiempo no se hacía uso de la medición indirecta de las distancias, empleaba para fijar la situación planimétrica la dirección determinada por una brújula nivelante ó un eclímetro cualquiera y la cadena arrastrada, lo cual producía mayores molestias y menos precisión.

PLANOS CON CURVAS DE NIVEL DE LAS POBLACIONES

En la parte no edificada se procederá como en los casos antes considerados; en la que lo esté se hacen los perfiles de las calles y plazas deduciendo los puntos de cruce de las curvas, que se dibujarán en su consecuencia como si el terreno no se hubiera esplanado, á fin de indicar las formas generales del relieve anterior como aparece en la figura 79 para un pequeño pueblo,

debiendo fijar las cotas de los perfiles en las aceras ó muros de los edificios para que sirv de norma en la renovación de rasantes, conducción de aguas y demas obras que puedan pr yectarse.

Fig. 79.

49 — Acotación, perfiles y curvas de nivel de terrenos de considerable extensión.

Sea cualquiera el sistema que se adopte para la representación del relieve del terreno necesario hacer préviamente una nivelación general que dé base segura para la aplicación aquellos, cuando el plano geométrico se ha levantado por los antiguos procedimientos ó compruebe y perfeccione los resultados altimétricos de los modernos, si el relieve se qui conseguir con mucha precisión.

A este efecto, con las condiciones señaladas á la nivelación compuesta, se determinar altitud verdadera ó arbitraria de todos los puntos de estación de todas las poligonales ut zadas para la planimetría, de manera que se forme una red poligonal de nivelación, que ye de los mayores á los menores polígonos queden perfectamente comprobadas todas las altitu de las estaciones y de los puntos notables.

Con esto ya se verá claramente si conviene en todo ó en parte representar el relieve curvas de nivel ó por cotas de los puntos característicos y en el primer caso si conviene de cirlas de puntos acotados, de perfiles ó por el trazado directo; podrá suceder que convenga unos polígonos acudir á un medio y en otros á otro, que, como serán ordinariamente de peq ña extensión y ofrecerán base para complementarlos, podrá realizarse sin dificultad y con in pendencia de las diferentes operaciones.

Convendrá tambien determinar y señalar sobre el terreno los puntos de cota múltipla la equidistancia que se considere necesaria y así se tendrán en el perímetro de cada polígo puntos fijos de las curvas, que servirán para determinar los demas de cada una dentro de c polígono y de enlace á los varios que cada una pudiere cruzar, completándose por cualqui de los procedimientos indicados el trazado de las curvas en el plano.

50 — Comparación crítica de los procedimientos de trazado de las curvas de nivel.

A propuesta del Coronel Goulier, llaman los franceses al directo, *método de los Ingeni militares* por haberle iniciado el Comandante Clerc, y ser el que utilizan las brigadas topog ficas del servicio geográfico del Estado Mayor del Ejército y al *indirecto, método de los Inge ros civiles* por ser el utilizado en los estudios de estos, emitiendo aquel su autorizada opin sobre el valor de cada uno en los términos siguientes:

«Se concibe fácilmente que el primer método sea *mas espedito* y de *mayor precisión* qu »otro, observando que, en atención á la poca exactitud con que por las irregularidades del » »lo se pueden conseguir las altitudes de cota redonda, la determinación de estos puntos se h »sobre el terreno casi á la carrera y que se obtiene su plano inmediatamente; mientras que

»puntos de cotas arbitrarias exigen ademas de las lecturas y las construcciones, que fijan su »situación planimétrica, la lectura de la inclinación y los cálculos por cuyo medio se deducen »las altitudes.—Se observará ademas que en el método indirecto, cada punto de cota redonda »se deduce de dos de cotas arbitrarias por una operación gráfica ó mecánica, que exige tiempo »y supone rectilínea la forma del perfil del suelo que pasa por estos dos puntos, suposición casi »siempre falsa que da lugar á errores muchas veces enormes en la posición de los puntos de »cotas redondas, sobre todo en las pendientes rápidas».

No nos explicamos que tan ilustre Topógrafo se exprese en tales términos, porque no son aceptables las razones indicadas, ya se trate de planos de grandes ó de pequeñas escalas.

No conocemos el libro «*Études sur les levés topométriques*» del Coronel Goulier, de que Roux toma la precedente referencia aceptando la opinión de aquel para la *Topografía espedita* (1) y que Prévot combate tímidamente (2); discutirémos las razones apuntadas para los casos en que se pueda realizar esta clase de trabajos.

En los planos de grande escala, el trazado directo de las curvas con el levantamiento del plano de sus puntos por el procedimiento de dirección y distancia medida con la estadía, tal como le hemos explicado, *puede dar buenos resultados técnicos;* pero no económicos, por el mucho tiempo que en el campo y en el gabinete se empleará en la busca y señalamiento de tan grande número de puntos y los cálculos necesarios para determinar y fijar sobre el plano su situación planimétrica. Si la equidistancia es pequeña, el relieve puede detallarse bien, pero el número de puntos crece extraordinariamente y con ello los trabajos de campo y gabinete; si es grande, disminuyen estos trabajos, pero en cambio no queda bien detallado el relieve, aunque sí determinadas sus formas generales.

Téngase presente que el trazado directo se hace entre dos perfiles distantes á lo mas 500 metros en terrenos medianamente accidentados.

Pues bien: como en estos casos, sean las pendientes suaves ó rápidas, con un corto número de perfiles de muy pocos puntos cada uno en los talves, divisorias de las vaguadas y de las lomas, puede quedar el relieve perfectamente determinado y con los taquímetros se miden rápidamente los datos necesarios para determinar las tres coordenadas de cada punto, que en poco tiempo se calculan en el gabinete con el Círculo, Regla logarítmica ó con las Tablas apropiadas, se comprende fácilmente que se economizará mucho tiempo en los trabajos de campo, que son los mas penosos y mas caros y no se aumentará sensiblemente el tiempo necesario en el gabinete en el supuesto indicado, porque el cálculo de las alturas y la deducción del cruce de las curvas se hace rapidísimamente.

En cuanto á la precisión dependerá del número de puntos que por el trazado directo se determinen y del de perfiles que en el indirecto se hagan; pero á igualdad de condiciones se puede asegurar que el segundo método dará ó puede dar mayor precisión, porque no solo quedan bien determinados los puntos de cruce de las curvas, si no tambien otros que detallan el relieve y no son de cota redonda y esto, cuando la equidistancia es grande, no debe despreciarse.

Si esto puede decirse relativamente al procedimiento del trazado y levantamiento del plano de las curvas de nivel que consideramos preferible, con mayor motivo le corresponde relativamente á los procedimientos de la plancheta y cadena arrastrada ó de las alineaciones paralelas y de recorrimiento, porque si bien disminuyen los trabajos de gabinete, aumentan considerablemente los de campo y dan resultados muy confusos, inexactos y expuestos á crasos errores.

Los enormes, que supone Goulier, se pueden cometer al deducir las cotas redondas de las que caracterizan los perfiles, no son de temer, si estos se hacen, como es fácil, de las condiciones aconsejadas.

Lo que si es cierto, es que en el procedimiento indirecto el Topógrafo ha de saber elegir los

(1) Topographie par E. Prévot, volumen II, página 430.
(2) Id. id. id. id. 375.

puntos característicos del relieve y no determinar muchos sin este criterio, porque *vale mas fijar pocos bien, que muchos mal;* pero esto no es difícil observando las formas del relieve con algun cuidado.

En ciertos casos conviene determinar una ó dos curvas para que sirvan de norma y esto se consigue determinando una, que pase cerca de la estación, entre cada dos perfiles, mediante dos ó tres puntos de nivel con el de la misma altura de aquellos.

En los planos de pequeña escala y consiguiente gran equidistancia real, sucede lo mismo en cuanto al procedimiento aconsejado, y los de la plancheta con cadena arrastrada son imposibles, porque ¿cómo se harán las intersecciones con visuales dirigidas á puntos distantes á lo mas 10 metros normalmente á ellos con arcos de este radio en la escala de $^1/_{10000}$, en que valdrán $^1/_4$ milímetro y mucho menos en las menores?

Ademas siendo la equidistancia de 5, 10 ó mas metros, es mucho mas penoso fijar los puntos de cota redonda en los perfiles extremos y naturalmente entre las curvas pasarán desapercibidos detalles importantes del relieve.

No se necesita hacer un grande esfuerzo de inteligencia para comprender que los que proponen esos métodos para el trazado directo y tanto los preconizan, es porque perseveran preocupados con las supuestas ventajas de la plancheta, porque dá el plano hecho, olvidando los inconvenientes que la tienen hoy postergada y que así mismo creen que son muchos y muy complicados los cálculos necesarios para conseguir las tres coordenadas de cada punto, y de aquí su horror á los planos numéricos acotados, que tan fácilmente se realizan y de los que se deducen las curvas de nivel para hacer mas sencilla la representación del relieve al propio tiempo que le complementan con la altura de detalles importantes, dando precisión y facilidad para la completa representación del terreno y la resolución numérica de todas las cuestiones, como mas detalladamente verémos en la PARTE SIGUIENTE.

ARTÍCULO SEGUNDO

TRABAJOS DE CAMPO

51 — Preliminares y clasificación.

Aunque para hacer mas fácilmente comprensibles los procedimientos de que en el artículo anterior nos ocupamos, descendimos á detalles mas propios de los trabajos de campo que de la teoría de aquellos, lo que nos permitiría reducir la materia del presente á breves indicaciones evitando repetir conceptos y consideraciones ya consignados, si bien procurarémos no incurrir en repeticiones enojosas, tampoco este temor nos impedirá de hacerlo cuando lo creamos conveniente para completar las descripciones, porque estamos convencidos de que al lector le será más sencillo de esta manera hacerse cargo de ellas que recordando lo que antes se hubiese dicho y nada perderá con leer dos veces algunas consideraciones que conviene tener muy presentes.

La 1.ª condición para que los trabajos de campo se realicen con la conveniente precisión, seguridad y rapidez, dentro de las condiciones de cada aparato y procedimiento, es que los aparatos y utensilios necesarios en cada caso estén y se conserven en buen estado, y para de ello estar seguro se han de comprobar y corregir al principio de la campaña y de la jornada para evitar las funestas consecuencias de los desperfectos que hubieren sufrido en la precedente: descuidar esta necesaria precaución es exponerse á trabajar mucho sin conseguir resultados aceptables; nosotros supondrémos en cuanto hemos de decir que tales aparatos y utensilios estén perfectamente comprobados y corregidos.

Para que sea completa la descripción de los trabajos de campo de la nivelación, nos ocuparémos sucesivamente de los correspondientes

á la recíproca y compuesta;

á los perfiles longitudinales y trasversales;

á la acotación de los planos y

al trazado y levantamiento del plano de las curvas de nivel

en el supuesto, para cada uno, de que se utilice como aparato de nivelación

el nivel de agua ó el de pínulas,

el nivel de anteojo ordinario ó el estadimétrico con limbo azimutal y, finalmente,

los eclímetros, inclinómetros ó clisímetros modernos propiamente dichos,

al objeto de que poniendo en evidencia las condiciones de rapidez, precisión y seguridad conseguibles con cada uno pueda el Topógrafo elegir el aparato y procedimiento que mas le convenga en cada caso.

52 — En la nivelación recíproca y compuesta.

CON EL NIVEL DE AGUA Ó EL DE PÍNULAS

La brigada necesaria en los casos generales se compondrá del *Topógrafo, dos porta-miras* y *un peón* destinado á trasladar el aparato y sostener el parasol durante la observación; pero cuando se haya de operar en terrenos cubiertos de matorrales ó arbolado ó con obstáculos, como los indicados en el n.° 43, será conveniente aumentar *otro peón* dedicado á cortar las ramas que intercepten las visuales, á ayudar en el descenso de los grandes muros ó escarpes y á clavar estacas en los puntos principales al objeto de no entorpecer con estos detalles la marcha de los trabajos, como sucedería si sólo se dispusiera de los porta-miras y peón del aparato.

El *equipaje topográfico* consistirá en el *nivel, dos miras de plancha con sus correspondientes perpendículos, una cinta de hilo fuerte de 20 metros* para hacer, en caso necesario, mediciones directas de alturas y referencias y *algunas estacas* para marcar los puntos principales, cuya designación se puede hacer en ellas en casa ó en el mismo campo con un *alfabeto de latón*, que debe llevarse á este efecto y *un cuaderno* en cuyas páginas de la izquierda se hayan preparado estados de registro como el modelo de la pág. 128 y en blanco las de la derecha para dibujar los croquis indicando las operaciones, los que sino son indispensables pueden evitar equivocaciones. Antes de empezarla debe enseñarse á los porta-miras la manera de leer las alturas inferiores á 2 metros y las comprendidas entre 2 y 4 metros, de asegurar en cada caso la plancha, de poner la mira vertical y de frente al observador y las señales con que se le indicará cuando ha de bajar, subir y fijar la plancha, advirtiéndole que despues de esto último la ha de presentar siempre otra vez para comprobar la altura de mira; que se ha de cuidar de colocar sobre el suelo algo esplanado y no en hoyos ó pequeñas elevaciones accidentales cuidando de no alterar su situación en los puntos á que se hayan de dirigir niveladas de atrás y de delante, que son los que mas influyen en el resultado de la nivelación compuesta.

En la *recíproca*, mientras el Topógrafo coloca el nivel sobre el primer punto y mide con cuidado la altura del plano visual, que ha de hacer el papel de *nivelada de atrás* en este caso, un porta-mira marcha al otro extremo, explana el terreno y coloca en él la mira vertical y de frente al observador y obedeciendo sus señales mueve la plancha hasta que su línea de fé tome la posición entre las dos rayas obscuras producidas por los casquetes de la superficie del agua en los frascos del nivel en la forma indicada por la figura 173 (número 107 del volúmen I); comprobada su buena situación el porta-mira lee y anota la altura de la plancha; entre tanto el Topógrafo hace girar el cuerpo del nivel para cambiar la situación de los frascos ó pínulas y dirige otra visual á la mira nuevamente colocada vertical comprobando ó rectificando la altura antes hallada; si la diferencia fuera notable, indicaría equivocación en la observación y se repetiría; si fuera pequeña despues de anotada la nueva altura por el porta-mira, asegurará la plancha esperando al observador; trasladado este al segundo punto se entera de las alturas halladas,

toma nota de ellas en el registro y colocando el aparato en estación, despues de medir la altura del plano visual sobre el punto en que se colocó la mira, dirige la visual á la que el otro peón habrá entre tanto colocado en el primer punto haciéndose la observación con las mismas precauciones que antes. Trasládase el segundo peón al segundo punto, el Topógrafo halla la diferencia entre la altura del plano visual en el primero y la semi-suma de las alturas de mira anotadas por el peón primero y la compara con la resultante entre la altura del plano visual medida en el segundo punto y la media de las alturas de mira anotadas por el segundo peón: si las dos diferencias no difieren en mas de la tolerencia correspondiente al nivel de que se trata, el término medio de las alturas correspondientes será la buscada.

Cuando á esto se concreta la operación pueden reducirse los dos porta-miras á uno solo, porque si bien se tardará algo mas con la repetición de sus idas y venidas á los puntos, como no se ocupará ordinariamente una jornada en toda aquella, resulta mas económico.

Si el terreno comprendido entre los dos puntos consistiere en un profundo barranco, que permitiera verlos desde otros dos de la misma línea superior de sus márgenes distantes de cada uno 10 á 20 metros, se podría aplicar el sistema de dos miras de Porro modificado por Salmoiraghi, de que dimos cuenta detallada en el número 113 (figura 180 del volúmen I) y en este caso los porta-miras se situarán uno en cada punto y el Topógrafo sucesivamente en los distantes de aquellos respectivamente de 10 á 20 metros dirigiendo desde cada uno visuales á las dos miras, cuyas diferencias darán dos valores de la buscada y su término medio se aceptará como valedero, si aquellas diferencias no resultaran muy discordes.

Como las miras no se mueven de los puntos y no hay que hacer mediciones directas, es casi seguro que este procedimiento dará siempre mejores resultados y es claro que con él desde cada estación se considerará como nivelada de *atrás* la altura de mira mas próxima y como de *delante* la mas lejana.

Cuando la *nivelación compuesta* solo tiene por objeto hallar la diferencia de altura de dos puntos bastante distantes entre sí, las *precauciones especiales*, que conviene tomar, consisten en situar el nivel á la distancia máxima de 40 á 50 metros de la mira de atrás y de delante y á altura tal que permita hallar la diferencia de 3 á 4 metros, á fin de reducir el número de niveladas cuando sea mucha la altura de un punto sobre el otro y así mismo de dividir la poligonal que se ha de seguir en secciones de 200 á 300 metros, que sirvan despues para hacer la comprobación por repetición con la mayor seguridad y menor molestia.

Aunque por concretarse en este caso á niveladas de atrás y de delante principales y al pasar el porta-mira de atrás por cerca del aparato, podría el Topógrafo leer la altura de mira prescindiéndose de que la anotara aquel, no conviene omitir esto, porque muchas veces se altera la posición de la plancha en los traslados de uno á otro punto por enredarse ó tropezar en las ramas de los árboles y otros estorbos, ó simplemente con el balanceo que la imprime al andar, saltar, etc., y es mas seguro que el Topógrafo despues de leer las alturas anotadas las compruebe observando la situación de la plancha, cuya altura correspondería á la segunda visual, que se ha dirigido al mismo punto, cuando esta precaución se toma.

Esto es mas necesario cuando la nivelación compuesta se combina con la radial para determinar, v. gr., la altura de las estaciones y puntos de detalle de un plano geométrico préviamente levantado, en cuyo caso conviene tomar como puntos principales todas ó la mayor parte de tales estaciones, y la poligonal seguida entre algunas de ellas como *secciones de nivelación* para comprobar por repetición; con todo esto y lo consignado en la detallada descripción consignada en el número 43, no ofrecerá ninguna duda la realización de los trabajos á que ahora nos referimos.

CON EL NIVEL DE ANTEOJO ORDINARIO Ó EL PERFECCIONADO ESTADIMÉTRICO CON LIMBO AZIMUTAL

Se procederá en la misma forma que en el caso anterior, sino que en lugar de las miras de plancha será casi siempre preferible utilizar las parlantes, que permiten al Topógrafo comprobar directamente la lectura de mira con solo observarla nuevamente despues de dar medio giro al

anteojo alrededor de su eje de figura; que las niveladas pueden alcanzar á 100 ó 120 metros consiguiéndose grande economía de tiempo y mayor precisión y seguridad; pero en cambio, como se ha de cuidar de nivelar rigurosamente el eje de colimación y que al dirigir la visual esté bien centrada la burbuja del tubo del nivel, se tarda algo mas en cada una que con el de agua.

CON LOS ECLÍMETROS, INCLINÓMETROS Ó CLISÍMETROS PROPIAMENTE DICHOS

Descrita detalladamente la manera de realizar la nivelación con estos aparatos en los números 41 y 45 no hay para que repetirlo ahora, solo si debemos hacer constar nuevamente que en terrenos muy accidentados son preferibles estos aparatos, y especialmente los buenos eclímetros, á los niveles por la grande economía de tiempo y de molestias que procuran, aunque no sea tanta la precisión; pero sucede lo contrario en los terrenos menos accidentados, porque en ellos los buenos niveles de anteojo con menos trabajo dan mayor exactitud y seguridad.

53 — En los perfiles longitudinales y trasversales.

CON EL NIVEL DE AGUA Ó EL DE PÍNULAS

Como en este caso se han de hacer con separación y sucesivamente los trabajos planimétricos y los de nivelación y la clase de nivel ya indica que se han de medir las distancias con un diastímetro ordinario (cadena ó cinta) en el perfil longitudinal y en los trasversales por la misma *brigada*, esta se compondrá del personal indicado en el número anterior con la adición al menos de dos peones encargados de trasladar las banderolas y jalones y de clavar las estacas para no interrumpir la medición.

El *equipaje topográfico* entonces descrito se debe tambien completar con una sencilla pantómetra, brújula ú otro goniómetro que permita medir los ángulos ó rumbos de las alineaciones ó en su defecto se utilizará el método de las cuerdas (número 7 del volúmen I); con una escuadra, á ser posible de reflexión, para señalar la dirección de los perfiles trasversales normalmente á cada alineación del longitudinal; con una cadena ó cinta de acero para medir las distancias en este y otra de hilo fuerte para hacerlo en aquellos, con algunas banderolas ó jalones de dos metros para marcar las alineaciones *que lo han de quedar siempre por 3 puntos para facilitar las mediciones;* con estacas, varas y cañas de distintas dimensiones para marcar los extremos de las alineaciones del perfil longitudinal y trasversales, los cruces de estos con aquel y los cambios de pendiente y finalmente con dos cuadernos, uno con los registros y cróquis del perfil longitudinal y otro con los de los trasversales ó uno solo con estas dos clases de documentos, aunque es preferible se encuentren separados, pero relacionados claramente.

El órden, que para evitar complicaciones conviene seguir, es el siguiente:

Como en el reconocimiento previo del terreno se habrán determinado los extremos de cada alineación del perfil longitudinal, se hará poner en cada uno una banderola y otra intermedia de manera que desde cada punto se vean dos, que permitan no separarse de aquella durante la medición y señalamiento de los puntos de cambio de pendiente y de cruce de los perfiles trasversales.

Mientras esto hace uno de los peones dirigido por otro que sepa alinear, se clava una fuerte estaca en el punto de partida y las demas de referencia que sean necesarias; se mide el rumbo de la alineación y los correspondientes á tres visuales dirigidas á puntos notables y lejanos para fijar la situación de aquel, procediéndose inmediatamente despues á la medición y señalamiento de los puntos de cambio de pendiente con pequeñas varas ó cañas en cuyo extremo superior se sujeta un papel blanco con la designación correspondiente y provisionalmente de los de cruce de los perfiles trasversales con jalones formales ó varas ó cañas mas altas con papel de color, en que se escribe la designación correspondiente.

Como esto se hace con la cadena ó cinta extendida para determinar la distancia y puntos de la alineación, no se mueve aquella hasta que el Topógrafo ha hecho el señalamiento de cada

punto y anotado la distancia, haciéndose por lo demas la medición con las precauciones rec- mendadas para las de esta clase hasta el fin de la alineación.

La manera mas sencilla de anotar los datos, consiste en ir construyendo el cróquis del p- fil en proyección horizontal y vertical, lo cual es sencillísimo utilizando papel cuadriculado- centímetro, pues de esta manera sin necesidad de regla ni de escala, se hace á ojo y á mano justas proporciones; lo primero eligiendo una de las líneas horizontales se marca el punto partida y la situación de las estacas de referencia, se escribe el rumbo de la alineación y los rigidos á objetos lejanos y despues en aquella, á las distancias proporcionadas á la longit total presumible de la alineación, se marcan los puntos de cambio de pendiente y de cruce los perfiles trasversales con la designación correspondiente escribiendo sobre aquella línea distancia de cada uno al punto de partida. Al propio tiempo se va figurando la proyección ve- tical de manera que se correspondan las dos de cada punto, lo que en el papel cuadriculado sencillísimo, sin escribir mas que la designación.

Una vez que se haya llegado al término de la primera alineación, se repite la medición sentido inverso comprobando las distancias parciales que se irán anotando debajo de la lín- antedicha, pero al llegar á cada punto de cruce de perfil trasversal, si resulta bien elegido marcará así como sus referencias próximas con una estaca; con la escuadra se levantará la no- mal que ha de servirle de traza y sobre ella se marcarán las distancias á que se encuentren d- eje los puntos de cambio de pendiente, designándose estos con la misma letra del punto del ej correspondiente y los números correlativos como exponentes, haciéndose primero la porción d la derecha, que corresponderá á la izquierda de la primera medición, tal como se indica en l figura 66: la cadena ó cinta con que se mide el perfil longitudinal conviene no tocarla de su posición fijando sus extremos con dos agujas y medir las distancias del perfil trasversal con l cinta de hilo señalándose sus puntos con varas y cañas con papel del color del punto del eje y la designación correspondiente, al objeto de que se conozca desde luego cuales son los punto de cada perfil. Si al comprobar las distancias del longitudinal se observara que no era necesa- rio alguno de los trasversales provisionalmente señalados, se quitaría la vara ó caña provisio- nal y se borraría del cróquis si no fuera punto de cambio de pendiente, y en caso de que sol conviniera cambiar mas ó menos su situación, se arreglaría aquel en consecuencia.

Terminada la proyección horizontal del perfil longitudinal de la primera alineación y de todos los trasversales correspondientes y estando claramente señalados y designados en el te- rreno y en el cróquis todos los puntos, la nivelación pudiera hacerse como hemos dicho para la compuesta y radiante utilizando el registro general del número 43, página 128; pero ordina- riamente será mejor reservarle para los puntos del perfil longitudinal añadiendo una casilla para las distancias al punto de partida, consignando los datos de cada uno de los trasversales en re- gistros especiales, como el modelo inserto en el número 46, página 141 y sin perjuicio de es- cribir las alturas de mira sobre los cróquis en la forma en que aparecen en la figura 66 para el perfil longitudinal y en la 67 para los trasversales.

Debemos hacer constar sin embargo, que queriendo nivelar ambas clases de perfiles á la vez se producirá alguna confusión y es por lo tanto preferible hacer primero la del perfil longitu- dinal y despues, con referencia á las altitudes calculadas de los puntos de cruce la de cada uno de los trasversales; porque si bien esto exigirá hacer mas estaciones de nivel, la mayor sencillez permitirá hacer mejor y mas rápidamente las diferentes nivelaciones y con la segunda se po- drá comprobar la primera, que es la principal.

Terminados el perfil longitudinal y trasversales de la primera alineación, se procederá á ha- cer el mismo trabajo para la siguiente y así se continuará hasta el término del estudio; pero si aquella ó alguna de las siguientes fuera corta, podrá hacerse el trabajo correspondiente á varias á la vez, considerándolas como secciones de la zona de estudio, lo que permite hacerse mejor cargo del terreno de cada una y conservar todas las señales y aun utilizar las banderolas, jalo- nes y cañas de la primera en las sucesivas no dejando mas que las estacas de los puntos princi- pales y de sus referencias.

CON EL NIVEL DE ANTEOJO ORDINARIO Ó EL ESTADIMÉTRICO CON LIMBO AZIMUTAL

Cuando se dispone de un nivel de anteojo se procede de la misma manera que en el caso anterior, pero como por una parte su puesta en estación exige mas tiempo que la del nivel de agua, y por otra, la nivelada puede ser mucho mayor y hacerse directamente la lectura de las alturas de mira utilizando las parlantes, han de elegirse con mas cuidado las estaciones á fin de nivelar desde cada una el mayor número de puntos de ambas clases de perfiles empezando siempre por los del longitudinal y haciendo seguir los de cada trasversal al de cruce correspondiente para facilitar su anotación y busca subsiguiente, en lo que no habrá dificultad si se hacen los cróquis detallados en proyección horizontal para ambas clases de perfiles y en la vertical para el longitudinal y se utiliza el registro general inserto en la página 128, del que despues se copian los datos separadamente para cada perfil, lo que si dá algún trabajo en los inmediatos de casa disminuye los del campo y permite comprobar las operaciones antes de abandonar el lugar donde se opera.

Si la importancia del trabajo lo permite y al propio tiempo se dispone de un nivel de agua ó de pínulas y de miras de plancha, conviene formar otra brigada subalterna, que termine los perfiles trasversales con referencia al último punto de cada uno ya determinado al hacerlo del perfil longitudinal.

Si el relieve del terreno fuere muy pronunciado, convendrá mas hacer separadamente la nivelación de las dos clases de perfiles concretando los trabajos de la brigada principal al longitudinal y la subalterna con el nivel de agua á los trasversales, en cuyo caso la primera utilizaría cróquis de la forma de la figura 66 y registros como el modelo inserto en la página 128, y la segunda cróquis de la forma de la figura 67 y registros como el inserto en la pág. 141.

Cuando se dispone de un *nivel de anteojo estadimétrico con limbo azimutal*, se puede prescindir de la medición directa de las distancias en los terrenos de relieve poco pronunciado; pero como esto no complica gran cosa el señalamiento de los puntos en las alineaciones rectas de los perfiles, si bien pueden utilizarse aquellas especiales condiciones del aparato para comprobar la situación de los puntos principales no se gana mucho tiempo con aquella omisión, que implicaría aumento en los trabajos de gabinete, porque obliga á determinar la poligonal planimétrica de las estaciones y esto con la visual horizontal obligada complica el trabajo coartando la libertad de elección de aquellas, lo que produce muchas veces entorpecimientos funestos.

Haciéndose los perfiles longitudinal y trasversales con separación y distintos niveles se realizarán las comprobaciones y se utilizarán las tolerancias consignadas para la nivelación compuesta relativamente á cada clase de aparatos, si bien es de advertir que comprobaciones por repetición solo se hacen en el longitudinal, concretándose á los puntos principales y al de cruce de los trasversales por ser los que tienen mayor trascendencia en los proyectos subsiguientes.

CON LOS ECLÍMETROS, INCLINÓMETROS Ó CLISÍMETROS MODERNOS PROPIAMENTE DICHOS

Con estos aparatos ya desaparece la dificultad expresada para los precedentes, porque la posibilidad de inclinar la visual para determinar las estaciones mas convenientes y las alturas de los puntos de ambas clases de perfiles, que serían inapreciables con la visual horizontal obligada, dejan al Topógrafo gran libertad de acción en tales conceptos, si bien en parte la coarta la condición de que los puntos se encuentren en alineaciones determinadas, cuando no se haya hecho previamente su señalamiento y designación, y como, si los puntos hubieran de estar próximos entre sí no se economizaría mucho tiempo omitiendo la medición directa, que facilita el señalamiento, será casi siempre preferible hacerlo como queda dicho para el nivel de agua, si bien con los eclímetros y clisímetros se pueden comprobar las distancias muy fácilmente eligiendo para estaciones puntos principales del perfil longitudinal, lo que permite omitir la medición de los ángulos y hacer los cálculos de que hablamos en el número 46 (página 140), pues los puntos del perfil longitudinal quedarán determinados con la distancia, lo mismo su-

cederá con los de los trasversales que le cruzan en el punto de estación y los de los demás con una sencilla construcción gráfica.

Cuando las condiciones del terreno no permitieran elegir para estación un punto del perfil longitudinal, á él se referiría por dirección y distancia y se comprobaría la de los puntos nivelables de cada perfil entre sí determinando su situación de la misma manera y en caso necesario la poligonal formada por las estaciones como otra cualquiera, cuidando de tomar para altura de mira de atrás la de un punto antes determinado del perfil longitudinal.

Como estos aparatos se pueden utilizar en cada momento como goniómetro estadimétrico, como nivel ó como clisímetro dan gran facilidad para resolver todas las dificultades á un Topógrafo experimentado; pero confunden á los noveles, porque no es fácil concretar la anotación de los datos y resultados en sencillos registros por la condición especial de los perfiles, y por esto es mejor y más práctico hacer el plano acotado de la zona por los nuevos procedimientos, utilizando en lo posible la visual horizontal, detallando todo lo necesario y despues deducir aquellos en el gabinete, como diremos en la Parte siguiente.

54 — En la acotación de los planos.

CON EL NIVEL DE AGUA Ó EL DE PÍNULAS

La acotación de un plano presupone la existencia del geométrico bien detallado en cuanto á los accidentes planimétricos se refiere; pero no determinados los puntos del perímetro de los polígonos, ni los interiores de ellos, en que cambia la pendiente del relieve y es por consiguiente necesario complementarle con la situación de todos estos, porque de otro modo, no quedando determinada la de los vertices del poliedro ó mejor dicho de la superficie poliédrica inscrita en cada parte del terreno, su relieve no lo quedaría tampoco con la nivelación de los puntos característicos del plano geométrico.

No basta, por consiguiente, el aparato de que ahora nos ocupamos para acotar un plano sino en el caso de que el relieve consista en superficies planas mas ó menos inclinadas ó de altitudes diferentes y que tengan sus vértices concordantes con los de las superficies poliédricas indicadas.

En este caso especial bastará para acotar un plano hacer una nivelación compuesta poligonal y radial, en que se comprendan todos los vértices planimétricos siguiendo próximamente los perímetros de los diferentes polígonos; pero no estacionando en sus vértices sino en puntos desde donde se vean en buenas condiciones para determinar sus altitudes, como se ha dicho al hablar de la nivelación compuesta.

Como en tal caso se opera con presencia del plano geométrico ó de una copia del mismo en papel de calco para mayor comodidad y en él constan todos los puntos nivelables, basta consignar ordenadamente los correspondientes á cada estación en un registro como el modelo inserto en la página 128 y las alturas de mira de atrás y de delante como allí se dijo para conseguir la acotación deseada, *cuyas altitudes verdaderas ó arbitrarias se escribirán entre paréntesis al lado de la designación de cada punto* reduciéndose en este caso la brigada y el equipaje topográfico á lo dicho en el número 52.

No sucede ordinariamente lo mismo cuando el relieve exija determinar la altura de otros puntos del perímetro ó del interior de los polígonos; pues en este caso será necesario señalar y designar esos puntos, cuya altura desde luego se determina, haciéndolo despues de su situación desde las estaciones que sirvieron para levantar el plano geométrico ó desde otras auxiliares á aquellas referidas, ó se hace esto simultáneamente con la nivelación desde las mismas estaciones por otro Topógrafo con un goniómetro ó goniógrafo estadimétrico á medida que se fija la mira en cada punto complementario para evitar equivocaciones y á tal efecto servirá bien la plancheta moderna; los trabajos simultáneos resultan mas económicos en las operaciones de importancia, pero lo contrario sucedería en las que tengan poca, pues la misma brigada realizará las dos clases de trabajo sucesivamente.

Como la nivelación poligonal se hace en perímetros cerrados formando red mas ó menos densa, las comprobaciones son numerosas y fáciles la distribución de errores y compensaciones naturales.

CON EL NIVEL DE ANTEOJO ORDINARIO Ó EL ESTADIMÉTRICO CON LIMBO AZIMUTAL

Cuando del primero de estos se dispone, se opera en la misma forma que en el caso anterior, con la sola diferencia de sustituir las miras de plancha por las parlantes, de dar mayor longitud á las niveladas y de conseguirse mayor precisión; su puesta en estación exige mas tiempo que la del nivel de agua, pero, como son necesarias muchas menos, la observación es mas rápida y no hay que confiar á los porta-miras la anotación de sus alturas, resultan mas económicos, seguros y exactos los trabajos.

Con los aparatos de la segunda clase no solo se consigue esto, sino tambien completar el plano geométrico con la situación de los puntos nivelables, que no sean en aquel vértices determinados, *cuando el relieve es poco pronunciado;* pues por rumbo y distancia lo quedan relativamente á las estaciones de nivel y estas en la misma forma con referencia á una ó dos del plano geométrico y *á este solo efecto no hay inconveniente, y es muy útil inclinar un poco la visual mediante los tornillos del juego* cuidando de volverla á la horizontal para nivelar los puntos desde allí vistos; pero, lo repetimos, esto solo se puede hacer en donde el relieve fuere poco pronunciado.

CON LOS ECLÍMETROS, INCLINÓMETROS Ó CLISÍMETROS MODERNOS PROPIAMENTE DICHOS

Con los primeros la acotación se realiza al levantar el plano geométrico, como detalladamente explicarémos al hablar de los procedimientos modernos, y si bien la precisión en las alturas es menor que la conseguida con los buenos niveles, como ya digimos, se perfecciona mediante una nivelación poligonal, que comprenda las estaciones modificando en su consecuencia las cotas de todos los demas puntos.

Con los *inclinómetros y clisímetros modernos* no se hace indispensable la nivelación poligonal complementaria, porque deben utilizarse como niveles para la determinación de las alturas al menos de las estaciones y puntos característicos principales, como clisímetros en otros menos importantes que por su altura relativamente á la estación lo hicieren necesario, y como goniómetros de visual libre para fijar la situación planimétrica de estos con referencia á las utilizadas en el plano geométrico; lo mismo pudiera hacerse con los eclimetros, pero no es su manejo tan fácil, ni tanta su precisión y seguridad con la visual horizontal obligada, esto es cuando se convierte en nivel; de manera que al objeto á que ahora nos referimos creemos preferibles los clisímetros modernos, con tal que procediendo como arriba se indica, no se abuse de las pendientes, pues en este caso son muy inferiores á los eclímetros.

55 — En el trazado y levantamiento del plano de las curvas de nivel.

Siendo la diferencia esencial entre estos trabajos y los de acotación de los planos, que mientras en los segundos se busca y fija la situación de los puntos en que cambia la pendiente, en los primeros se ha de hacer de los que tengan cota múltipla de la equidistancia, lo mismo en el perímetro de los distintos polígonos determinados en la planimetría y seguidos en la nivelación general previa, que en el interior de aquellos, y teniendo en cuenta que sobre el trazado y levantamiento de las curvas entre perfiles ó cerradas dimos en el número 48 todos los detalles necesarios, no hay para que ahora los repitamos, con tanto mayor motivo cuanto que en el número anterior ya consignamos las consideraciones críticas, que proceden relativamente á las condiciones de cada clase de aparatos, pues son enteramente aplicables á los trabajos á que ahora hacemos referencia; pero no podemos dejar de consignar una vez más: que los métodos de la cadena arrastrada, de perfiles paralelos y demas que entonces indicamos, no deben aplicarse ahora que con los goniómetros ó goniógrafos estadimétricos tan fácil es conseguir ex-

celentes planos acotados, de los que se deducen sencillamente las curvas de nivel en el gabinete y hasta, en caso necesario, determinar la situación de todos los puntos de las curvas que se trazan directamente en el terreno por medio de las planchetas modernas, que darán siempre mejores y no mas costosos resultados, que las malas intersecciones y semi-recorrimientos de aquellos métodos equivocadamente preconizados por algunos Autores modernos.

ARTÍCULO TERCERO

TRABAJOS DE GABINETE

56 — En la nivelación simple, recíproca y compuesta.

Reducidos estos trabajos al cálculo de las altitudes ó cotas, á su comprobación y á la distribución de los errores tolerables, como detalladamente digimos en los números 40 á 45 y por ser sencillos y breves se realizan simultáneamente con los de campo ó inmediatamente despues de ellos en el mismo lugar para evitar, en caso necesario, nuevos viajes, aplazando pasar de tinta los datos y resultados, si con ella no se hubieran escrito directamente, como conviene hacerlo algunas veces, para cuando en la tranquilidad del gabinete propio se disponga á redactar la memoria ó dictamen consiguiente á los resultados obtenidos y al hacer aquello debe proceder con cuidado para no incurrir en equivocaciones materiales y descubrir las que en el campo se hubieren cometido, á cuyo efecto se debe hacer con la mayor limpieza y claridad utilizando lápices bien afilados ó plumas y tinta en buen estado, porque no obrando así se pierde mucho tiempo en darse cuenta de los verdaderos datos y resultados y se incurre fácilmente en equivocaciones que molestan grandemente al Topógrafo, cuando no le obligan á repetir trabajos bien hechos, lo que es enojosísimo y es preciso evitar á toda costa. También se debe procurar ordenar los cálculos y procedentes correcciones de los datos y resultados de manera que fácilmente se comprenda todo por otros Topógrafos, que no hayan intervenido en los trabajos.

57 — En los perfiles longitudinales y trasversales.

Suponiendo que al realizar los trabajos de campo se hayan hecho las comprobaciones inmediatas en lo referente á la planimetría y nivelación, que los perfiles comprenden, y pasado de tinta los datos anotados en los registros y cróquis, lo *primero* que se ha de hacer en el gabinete es examinarlos todos detalladamente, hacer los cálculos restantes que fueren necesarios para determinar la situación relativa de los puntos característicos marcados, si no se hubiese hecho por medición directa de las distancias, completar las comprobaciones á que se presten segun los aparatos y procedimientos utilizados y hacer la oportuna repartición de los errores finales tolerables que se encontraren, al objeto de que sea conocida con seguridad la situación relativa de todos los puntos, que hayan de figurar en los perfiles longitudinal y trasversales con las tolerancias que para cada clase de estos hemos antes señalado.

Por estos medios se conseguirá ordinariamente el *plano numérico* de los perfiles; pero, si no se creyera esto necesario, los cálculos, comprobaciones y correcciones numéricas indicadas se concretarán á la nivelación del perfil longitudinal y á la determinación directa de las cotas ó altitudes de los puntos de los trasversales, prescindiendo de las correspondientes á su situación planimétrica, que se determina por procedimientos simplemente gráficos.

Constrúyese despues la poligonal correspondiente al perfil longitudinal por el sistema mas concordante con el aparato y procedimiento utilizados en su levantamiento y en cada uno de

sus lados se marcan los puntos de cambio de pendiente y de cruce de perfil trasversal determinados, escribiendo entre paréntesis al lado de su designación la altitud ó cota correspondiente, con lo que se tendrá la proyección horizontal de aquel perfil, y para completar la cota de los trasversales en los puntos de cruce, se levantarán las normales y bisectrices de los ángulos, que expresen la traza de los planos de estos perfiles, marcando en ellas los puntos de cambio de pendiente con la distancia al punto de cruce ó por intersección con las rectas, cuyo ángulo ó rumbo se haya medido desde las estaciones del perfil longitudinal ó por el medio que proceda segun el sistema que se haya utilizado en el levantamiento del plano, poniendo al lado de cada uno la designación correspondiente y entre paréntesis la cota ó altitud que le corresponda, completando la proyección horizontal de la zona con los detalles que figuren en el cróquis, ya se hayan dibujado á ojo ó ya determinado instrumentalmente.

Como las zonas de estudio, á que se destinan especialmente los perfiles longitudinales y trasversales, suelen ser largas de muchos kilómetros y las alineaciones que constituyen los primeros, forman ángulos que difieren bastante algunas veces de los 180°, para que todo el perfil aparezca en fajas de papel ó tela lúcida de 30 á 35 centímetros de ancho, se subdivide en porciones próximamente rectas y se dibujan unas á continuación de otras suponiendo dobleces, ó lo que es lo mismo, haciéndolas girar convenientemente para que aparezcan en la misma faja de papel; pero para que sea conocida su verdadera dirección, se expresa gráfica y numéricamente la parte de giro necesaria, aunque tal vez fuera mas sencillo poner las secciones independientes con todos sus detalles y dibujar con pequeña escala la verdadera forma de la poligonal general con indicación de las secciones detalladas, ya que así se daría mas fácilmente cuenta de las condiciones planimétricas del perfil y de toda la zona de estudio.

Cuando el perfil longitudinal es el definitivo de un trazado, en su proyección horizontal se marcan los kilómetros y las curvas de unión de las alineaciones rectas y en ellas al menos los perfiles trasversales de los puntos de tangencia y el normal en el vértice de la curva, que será ordinariamente perpendicular en el punto medio de la recta que une aquellos ó sea á la cuerda del arco de unión.

Para construir la proyección vertical ó el perfil propiamente dicho, basta desarrollar sobre una recta la poligonal rectilínea, curva ó mixta de la proyección horizontal marcando en ella por su distancia á cada vértice todos los puntos, levantar en ellos perpendiculares de la longitud de las cotas y unir los extremos de cada dos sucesivas por una línea contínua, todo lo que se realiza á ojo rápidamente con el buen papel cuadriculado al milímetro.

Para evitar que los perfiles exijan innecesariamente un papel de mucha altura, la de los puntos se reduce en lo posible suprimiendo en cada uno el mismo número de millares, centenas ó decenas de metros, lo que no altera la forma del perfil, porque esto equivale á comparar la altura de todos sus puntos á una superficie de nivel superior á la del mar, ó á la tomada como general de comparación, en el mismo número de metros; pero las altitudes verdaderas ó arbitrarias, las correspondientes á las rasantes proyectadas y su diferencia ó *cotas rojas* se escriben en la dirección de las normales, determinantes de cada punto, cuando se ha hecho el proyecto definitivo, así como en el sentido de la longitud ú horizontal, en la parte superior la de las rasantes con su inclinación por metro y en la inferior la distancia de cada punto al orígen ó entre sí, como todo se indica en la figura 80, en que aparece la sección de los terraplenes y desmontes, que se distinguen por su rayado para hacerlos mas aparentes.

Como las grandes distancias del perfil longitudinal obligan á utilizar una escala relativamente pequeña (de $^1/_{1000}$ á $^1/_{5000}$) y con ella las diferentes alturas no se harían perceptibles á la vista, especialmente en terrenos de relieve poco pronunciado, para evitar este inconveniente *se utilizan dos escalas;* una para las distancias y otra para las alturas, que ordinariamente es dupla, quíntupla ó décupla de aquella, segun las condiciones del relieve, lo que si evita aquel inconveniente ofrece el de no presentar las verdaderas formas del terreno; esto se anula ciertamente haciendo los cálculos de rasantes y movimiento de tierras mediante las cotas escritas; pero lo mismo sucedería con el primero; de manera que, aunque la práctica corriente admite las dos

escalas, que siempre se han de expresar en los planos, tal vez no está bastante justificado que por este medio se ofrezcan á la vista formas verdaderamente fenomenales ó falsas, ya que de todos modos para fijar las rasantes es necesario acudir á las distancias y cotas escritas.

Por esto, cuando no es muy largo el perfil y sí el relieve pronunciado, se utiliza una escala grande y lo mismo se hace en los trasversales.

Estos se construyen en la misma forma que el longitudinal rebatiéndolos siempre hácia un

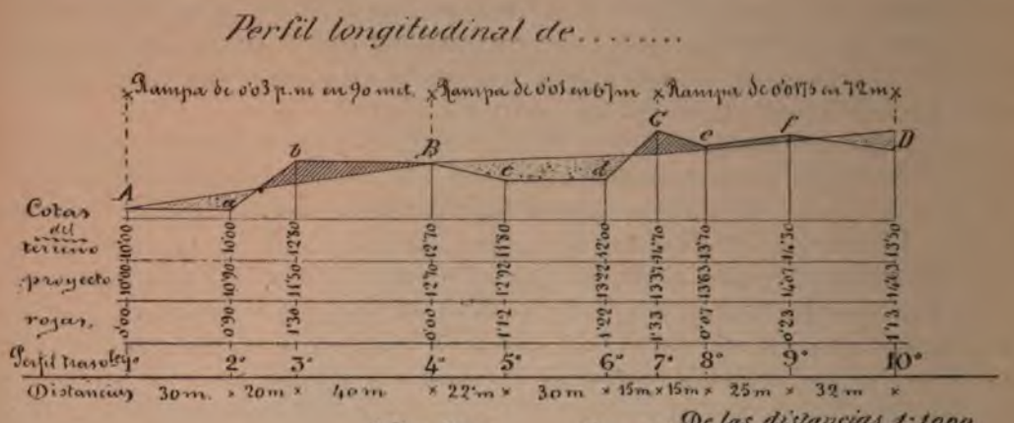


Fig. 80. Escalas { De las distancias 1:1000 / De las alturas 1:200

mismo lado con referencia al punto del eje de su cruce para evitar equivocaciones y en gra[illegible]nd[illegible] escala para determinar mecánica ó gráficamente la superficie de las secciones de desmon[illegible]te y terraplen, que son bases de los prismas correspondientes.

58 — En los planos acotados.

Construídos los geométricos correspondientes y hechas las comprobaciones y repartic[illegible]ón de errores de las poligonales de nivelación al realizar los trabajos de campo, no quedan par[illegible]a el gabinete mas que el exámen de esta y pasar de tinta los datos y resultados finales; situar so[illegible]re los perímetros de los diferentes polígonos de las parcelas y predios los puntos de cambio [illegible]de pendiente y determinar la situación de los interiores de aquellos, que sean característicos en [illegible]el concepto del relieve, lo que deberá hacerse segun el aparato y procedimientos utilizados en [illegible]el levantamiento de su plano, y finalmente escribir al lado de cada punto su especial designació[illegible], si no fuera vértice de aquellos poligonos, y entre paréntesis la cota ó altitud que le correspon[illegible]da, á fin de relacionar de una manera clara é indudable la acotación del plano con los cróquis, registros y pliegos de cálculos, que para conseguirlo se hubieren utilizado, á fin de que pueda ser fácilmente comprobado todo por otro Topógrafo, y en caso necesario, ampliarse el trabajo ó utilizar los datos y resultados directos en el replanteo de los proyectos, que sobre tales planos se hicieren.

Con los procedimientos modernos se consiguen directamente los planos acotados y al describirlos darémos á conocer detalladamente su documentación fundamental y justificativa, que tiene mucha mas importancia de la que erróneamente le conceden algunos Topógrafos, que se limitan á conservar el plano borrador, que por sí solo nada justifica: es por el contrario preciso proceder en todo con tanto órden que se pongan de manifiesto todos, absolutamente todos los trabajos que en el campo y en el gabinete se hubieren realizado para conseguir el plano acotado y que en cualquier momento permitan la comprobación y justificación de los resultados gráficos y numéricos: si, como procede, así se exigiera, no pasarían como buenos planos muchos que así se consideran y se pagan sin merecerlo.

59 — En los planos con curvas de nivel.

Cuando en la determinación de estas se haya utilizado el *trazado indirecto*, es consiguiente que en los trabajos de gabinete se empezará por construir el plano acotado y de él despues deducir gráfica ó numéricamente la situación de los puntos de cota múltipla de la equidistancia real en los perfiles perimetrales de los distintos polígonos planimétricos y de los que hayan servido para detallar su relieve interior uniendo los de igual cota por línea contínua con la precaución de no hacerlo de los puntos de curvas independientes.

Cuando se hubiere utilizado el *trazado directo de las curvas*, el trabajo especial consistirá en fijar la situación de los puntos para cada una determinados por el procedimiento de construcción mas en consonancia con el de levantamiento utilizado, uniéndolos con curva contínua y acotándolas en sitio poco cargado de detalles planimétricos para que sea fácil su busca.

La línea de las curvas se hace ordinariamente de igual espesor, salvo el caso de agrupación ó de interpolación ya indicados; pero cuando sin acudir á los *trazos normales* ó á las líneas onduladas en el sentido de aquellas se quiere hacer mas notorio á la vista el relieve, se cuida de hacerlas mas delgadas en las partes mas iluminadas, que son en las que están mas separadas y mas gruesas y con tinta mas oscura en las mas próximas, pues así se hacen mas notorios los efectos del claro-oscuro y por consiguiente el relieve.

A este mismo efecto se utilizan los *trazos normales á las curvas* limitados por ellas y si bien estas no se pasan de tinta en este caso para evitar mal efecto visual, quedan suficientemente señaladas por los extremos de aquellos, ya que se hace que no sean prolongación los de una zona de la inmediatamente superior é inferior, y ademas se cubren los blancos resultantes con pequeños rasgos ondulosos, que entonan el dibujo.

Como en nuestro concepto los trazos normales no definen mejor que las curvas de nivel el relieve del terreno y solo sirven para realzarle por los efectos de claro oscuro á espensas de la claridad de la accidentación planimétrica cuando se realizan las reglas establecidas en los sistemas francés y alemán, y por otra parte es muy difícil de seguirlas estrictamente, dejarémos de ocuparnos de ellas considerando, como lo hacen el Depósito de la Guerra y el Instituto Geográfico y Estadístico español, como medio geométrico de representación del relieve preferible las curvas de nivel y las reglas prácticas de los trazos y de las aguadas para el arte del dibujo, porque realmente es esto mas propio del dibujante que del Topógrafo y de fatales resultados bajo el punto de vista estético la aplicación estricta de las reglas establecidas en los precitados sistemas y diapasones aceptados en cada una de las dos Escuelas.

admiten el de N. á E., S. y O., otros lo hacen en el contrario, y como con el cambio de sentido varía notablemente el valor de los ángulos que se miden y consiguientemente el absoluto y el signo de su seno, coseno, tangente y cotangente, resulta que ni las fórmulas deducidas son aplicables en el caso de variarse el sentido de la numeración de la graduación, ni tampoco los trasportadores que no estén conformes con el de la de los limbos, y es preciso tener muy en cuenta el admitido al deducir las fórmulas para aplicarlas ó para medir los ángulos en el campo ó en el plano para no incurrir en gravísimos errores.

Consideramos preferible, como entonces ya digimos, el sentido de la graduación en los limbos horizontales de N. á E., S. y O.; como *positivos los senos ó abscisas* que van del centro ú orígen en la dirección de izquierda á derecha ó de O. á E. suponiendo el orígen de los ángulos ó arcos en el N., y *en tal concepto razonarémos;* porque si bien no es despreciable la razón que se alega en pró de la graduación de N. á O., S. y E. de que al leer en los limbos la numeración se presenta aumentando de izquierda á derecha facilitando algo la lectura, la necesidad consiguiente de considerar como positivas las abscisas ó los senos en el sentido de derecha á izquierda ó de E. á O. anula aquella ventaja en la construcción de los planos precisamente por la misma causa alegada y contraría las prácticas usuales y las convenciones admitidas en otras ciencias relativamente á las abscisas.

Esto no obstante, cuando en el estudio de una zona se proceda de E. á O., ofrecerá ventajas la numeración del limbo en el sentido de N. á O. y considerar positivas las abscisas de E. á O.; pero conviene advertirlo y poner en consonancia esto con el aparato, trasportador, tablas y fórmulas que se utilizaren para evitar equivocaciones.

En los *limbos verticales,* por las razones consignadas en los números 61 y 62 del volúmen I, damos la preferencia á la numeración continuada de 0^c á 400^c dispuesta de manera que se midan los *ángulos zenitales* y en tal concepto razonarémos.

En los limbos horizontales supondrémos dos nónius; uno *A*, que señala el azimut verdadero ó arbitrario, y otro *B*, que le comprueba mediante la graduación $A \pm 200^c$; *en los limbos verticales* tambien dos, uno *I*, que expresa el ángulo zenital, y otro *II*, que le comprueba con la graduación $I \pm 200^c$, que es como se distinguen en los mejores aparatos modernos.

62 — Determinación de un punto del espacio con referencia á otro por medio de varios sistemas de coordenadas.

En el número 55 del volúmen I, mediante la figura 74, que para mayor comodidad del lector reproducimos, dimos á conocer sencillamente la manera de determinar la posición de un punto *B* con referencia á otro *A* por las *coordenadas polares,* θ, φ y R, indicando los inconvenientes que ofrecen en su representación planimétrica y en su relación con las correspondientes á otros puntos referidos al mismo *polo, A*, haciendo constar que para evitarlos se sustituyen las *coordenadas polares* por otras llamadas *mixtas,* compuestas *del azimut, la distancia horizontal y la altura* del punto determinable *B*, sobre el plano horizontal del de referencia, *A*, ó sean θ, *D* y z y asimismo que para relacionar los puntos referidos á distintos polos ó estaciones era indispensable transformar aquellas en las *coordenadas ortogonales,* que permiten hacer tales referencias mediante sencillas sumas.

Tócanos ahora explicar detalladamente las condiciones de cada uno de los tres sistemas coordenados, sus mútuas relaciones y aplicación mas oportuna, porque de ello depende que se comprendan y apliquen con justo criterio los modernos procedimientos.

Las coordenadas polares, θ, φ y R, pueden directamente medirse con el taquímetro y la mira, dentro de los límites de visibilidad de estas, que con las parlantes no pasan ordinariamente de 300 m., ni de 1000 con las de dos planchas.

En efecto: si suponemos que los puntos *A* y *B*, figura 74, sean los del terreno que se quieren relacionar y que sobre el primero se coloque el taquímetro perfectamente orientado y nivelado y sobre el segundo una mira *perpendicularmente* á la visual y esta se dirija de manera

que el hilo axial encuentre á la mira á una altura sobre B igual á la que sobre A se halla el eje de muñones del anteojo, es indudable que los nónius del limbo azimutal nos darán con repetición el valor de θ, los del vertical el de φ y sobre la mira leerémos con los hilos estadimétricos el número de divisiones (centímetros ó dobles centímetros) representativo del valor en metros del *radio vector* R, todo lo que se consigue fácilmente en las visuales inclinadas con la mira de Viotti, de que dimos cuenta en el número 196 del volumen I, ó con las parlantes ordinarias en los casos y por los medios expuestos en el número 82.

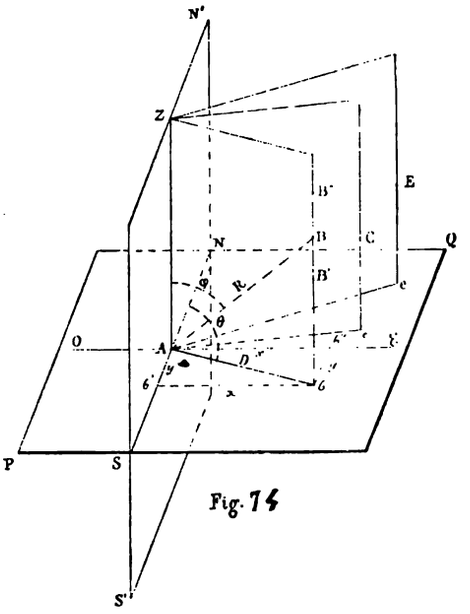


Fig. 74

Cuando, como sucede ordinariamente, no se toman tales precauciones sino que se coloca la mira verticalmente y se dirige la visual central á un punto de ella, que no está sobre el terreno á la misma altura que el eje de muñones, realmente no se miden el zenital φ y el radio vector R verdaderos; pero sí otros aproximados que se corrigen fácilmente al deducir las distancias horizontal y vertical entre los puntos; el número de partes de la mira que comunmente se designa por g, inicial de *generador*, equivale á R sen. φ.

De las *coordenadas* llamadas *mixtas* θ, D y z, la primera se mide directamente y las otras dos se deducen de las *polares* por las fórmulas

$$D = g \text{ sen.}^2 \varphi \text{ (E) ó } D = g' \text{ sen. } \varphi \text{ (A) y} \qquad (1.^a)$$
$$z = D \text{ cot. } \varphi + i - m \text{ (B) ó } z = g \text{ sen. } \varphi. \text{ cos. } \varphi + i - m \text{ (D)} \qquad (2.^a)$$

determinadas en el número 82; en las que, como allí se dijo, D = distancia horizontal; g = número de partes de la mira vertical ó *generador;* g' = número de partes de la mira perpendicular á la visual ó *radio vector;* i = altura del eje de muñones ó del instrumento y m = altura á que encuentra á la mira el eje de colimación del anteojo.

Las *coordenadas ortogonales*, x, y, z consisten: la primera en la distancia del punto determinable B al meridiano ó plano vertical que con este concepto pasa por el punto de referencia A; la segunda en la distancia al plano tambien vertical perpendicular á otro meridiano en el mismo punto, y la tercera la altura del primero sobre ó debajo del segundo ó sean relativamente al punto B de la figura 74, en proyección horizontal las dos primeras,

$$x = bb' = Ab''$$
$$y = bb'' = Ab'$$
$$z = Bb$$

La fórmula que da el valor de z en función de D y de φ ya se determinó en el número 82, como hemos antes dicho, y fácilmente se deduce de la fig. 74 reproducida; no sería difícil hacerlo con esta las correspondientes á x é y en función de D y θ; pero como en ella los ejes N S y O E, trazas, sobre el plano horizontal que pasa por A, del meridiano y su perpendicular en la misma estación, no aparecen perpendiculares, ni rectángulo en b'' el triángulo Abb'', como realmente deben ser, y la experiencia nos ha enseñado que esto ofrece dificultades á algunos Topógrafos para darse buena cuenta de los sencillos razonamientos trigonométricos, de que se deducen las fórmulas indicadas, parécenos mas oportuno utilizar la figura 81, en la que están en su verdadera posición los ejes coordenados y la proyección horizontal de los puntos determinados desde la estación A y la siguiente F, lo que nos permitirá hacer ver la facilidad suma con que por medio de las coordenadas ortogonales se pueden relacionar todos los puntos entre sí, que es la condición característica de aquellas, base de los planos numéricos.

En efecto: si se tiene en cuenta que en el triángulo Abb' (figura 81) la hipotenusa Ab es la distancia horizontal, D; $Abb' = b''Ab = \theta$; $Ab' = x$ y $bb' = y$, se deduce de las propiedades de los triángulos rectángulos, recordadas en el número 9 del volúmen I, que

$$x = bb'' = D \text{ sen. } \theta \qquad (3.^a)$$
$$y = bb' = D \cos. \theta \qquad (4.^a)$$

que son las fórmulas generalmente utilizadas.

Para tener los valores de x é y en función de las coordenadas polares basta sustituir en las (3.ª) y (4.ª) por D los valores expresados en las fórmulas (1.ª), deduciéndose

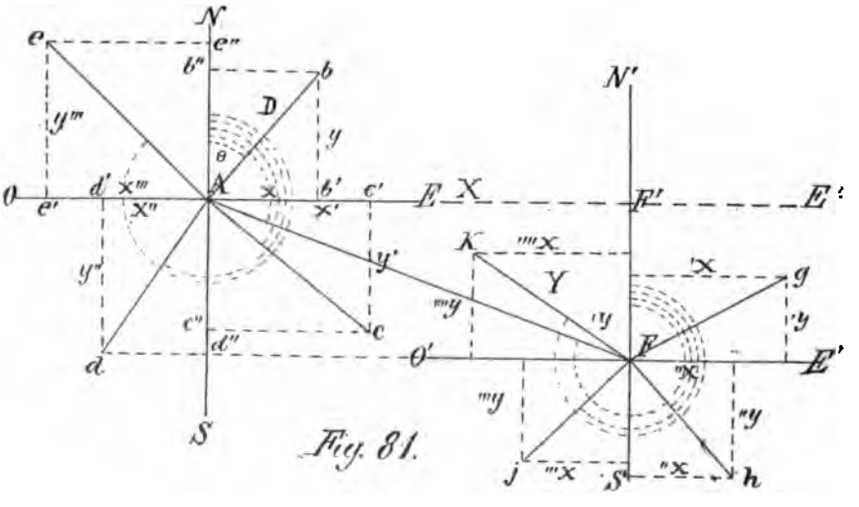
$$x = g' \text{ sen. } \varphi \text{ sen. } \theta = g. \text{ sen.}^2 \varphi \text{ sen. } \theta \qquad (5.^a)$$
$$y = g' \text{ sen. } \varphi \cos. \theta = g. \text{ sen.}^2 \varphi \cos. \theta \qquad (6.^a)$$

poco utilizadas en la práctica, pero necesarias para relacionar las coordenadas ortogonales con las polares y facilitar los replanteos.

Las fórmulas (3.ª) y (4.ª) son generales y dan directamente el valor absoluto de las coordenadas y su signo, porque como la distancia es siempre positiva, aquel depende del que corresponda al sen. y al cos. y la figura lo pone de manifiesto de conformidad con lo dicho en el número 8 del volúmen I; porque en efecto para el punto

b, en que $\theta < 100^c$, x é y son positivas.
c, en que $\theta > 100^c$ y $< 200^c$, x positiva é y negativa.
d, en que $\theta > 200^c$ y $< 300^c$, x é y son negativas.
e, en que $\theta > 300^c$ y $< 400^c$, x negativa é y positiva.

Lo propio sucede con la fórmula de la 3.ª coordenada, $z = D \text{ cot. } \varphi + i - m$ (B) (2.ª); porque, como ya digimos para las cotangentes en el número 8, son positivas cuando el valor de φ se encuentra entre 0^c y 100^c ó 200^c y 300^c y negativas cuando está aquel comprendido



entre 100^c y 200^c ó 300^c y 400^c y el signo de z depende del de ellas, salvo el caso en que la diferencia i — m iguale ó supere á su valor.

De todo esto se deduce sencillamente la suma facilidad con que se pueden referir entre sí dos puntos cualesquiera de los observados desde una misma estación; porque si + x, + y, + z son las coordenadas ortogonales del punto del terreno *B* con referencia al *A* y + x', — y', + z' son las del punto *C*, es indudable que z — z' será la diferencia de alturas entre *B* y *C* y x' — x é y + y' serán las coordenadas planimétricas de *C* con referencia á *B* y luego veremos como de ellas se deducen la distancia horizontal (D) y el azimut (θ) de *BC* y de la distancia (D) y la al-

Las coordenadas ortogonales, x, y, z, no pueden determinarse directamente sobre el terreno sino en pequeñas y fáciles extensiones por el antiguo sistema de perpendiculares y nivelaciones; pero deduciéndose sencillamente de las polares, que á su vez se consiguen de aquellas; poniendo en relación numérica las condiciones de situación de todos los puntos del terreno; permitiendo hacer las comprobaciones y distribución de errores racional y cómodamente y construir los planos por el sistema mas sencillo y exacto, *resuelven el problema topográfico de la manera mas sencilla, segura, completa y exacta por medio del plano numérico* que integran y SON LAS MAS PROPIAS PARA LOS TRABAJOS DE GABINETE Y VERIFICACIÓN GENERAL DE LOS PLANOS, por todo lo que son por los mas distinguidos Topógrafos y deben serlo por todos á los demas sistemas preferidas.

64 — Deducción de las coordenadas mixtas y ortogonales de las polares, y recíprocamente estas de aquellas.

LAS COORDENADAS MIXTAS

Estas tienen de comun con las *polares* el azimut θ, y estando las diferentes D y z, g ó g' = R y φ relacionadas entre sí por las fórmulas (1.ª) y (2.ª) del número 62, de ellas pueden deducirse las segundas en función de las primeras.

Debe, sin embargo, tenerse presente que, como el valor de z es la diferencia de alturas entre los dos puntos del terreno y en ella ha influido la de i — m, solo en el caso de ser esta nula se obtiene el mismo valor de φ, que sirvió para determinar aquella; lo que se consigue prescindiendo de la diferencia i — m es el zenital de la recta que une los dos puntos del terreno y como si las alturas del instrumento, *i*, y de la mira, *m*, no fueran iguales en el replanteo, sería tambien diferente el valor de φ deducido del que sirvió para determinar el de z, aquella condición se ha de cumplir en tal caso y por consiguiente de la fórmula (B) (2.ª) se ha de suprimir la diferencia i — m para hallar la coordenada polar φ y en tal supuesto necesario resulta:

$$\cot. \varphi = \frac{z}{D} \qquad (1.ª)$$

Conocido el valor de φ verdadero ó aproximado, de la fórmula (A) (1.ª) se deduce para

$$g' = R = \frac{D}{\text{sen. } \varphi} \qquad (2.ª)$$

pero como esto implicaría la necesidad de colocar la mira perpendicularmente á la visual, ordinariamente se utiliza la fórmula (E) (1.ª) para obtener el valor de g, que resulta

$$g = \frac{D}{\text{sen.}^2 \varphi} \qquad (3.ª)$$

La resolución de estas fórmulas con el Círculo logarítmico (1) ó con las Tablas, de que daremos cuenta en el Artículo cuarto, no ofrece dudas, porque si el valor de z es positivo el de φ ha de estar comprendido entre 0^c y 100^c y sí negativo entre 100^c y 200^c, siendo siempre positivo el de g' ó g.

En corroboración de lo dicho aplicarémos á dos casos diferentes la deducción de las coordenadas mixtas de las polares y la de estas de aquellas utilizando nuestras sencillas Tablas taquimétricas é indicando todos los cálculos necesarios, para que mejor de ello se den cuenta los principiantes.

---

(1) Con la Regla logarítmica se hacen los mismos cálculos que con nuestro Círculo, pero sin tanta precisión y con mas molestia.

PRIMER CASO.—*Sean las polares medidas:*

$$\theta = 35'35^c; \quad g = 128'4; \quad \varphi = 87'42^c; \quad i - m = o$$

Las mixtas serán:

$$\theta = 35'35^c$$
$$D = g.\ \text{sen.}^2\varphi = 128'4 \times o'9614 = 123'44 \text{ metros}$$
$$z = D.\ \cot.\ \varphi + i - m = 123'44 \times o'2000 = 24'688 \text{ metros}$$

Las polares de estas deducidas resultan:

$$\theta = 35'35^c$$
$$\cot.\ \varphi = \frac{z}{D} = \frac{24'688}{123'44} = o'2 = \cot.\ 87'42^c$$
$$g = \frac{D}{\text{sen.}^2\varphi} = \frac{123'44}{o'9614} = 128'4$$

SEGUNDO CASO.—*Sean las polares medidas:*

$$\theta = 147'35; \quad g = 98'5; \quad \varphi = 123'45^c; \quad i - m = -\ o'07 \text{ metros}$$

Las mixtas serán:

$$\theta = 147'35^c$$
$$D = g.\ \text{sen.}^2\varphi = 98'5 \times o'8704 = 85'73 \text{ metros}$$
$$z = D.\ \cot.\ \varphi + i - m = 85'73\ (-o'3859) - o'07 = -\ 33'153 \text{ metros}$$

Las polares deducidas de estas resultan:

$$\theta = 147'35^c$$
$$\cot.\ \varphi' = \frac{z}{D} = \frac{-33'153}{85'73} = -o'3867 = \cot.\ 123'50^c$$
$$g = \frac{D}{\text{sen.}^2\varphi} = \frac{85'73}{o'8698} = 98'56$$

La diferencia que se observa entre el zenital deducido, φ', y el supuesto medido, es consiguiente á lo que en el valor de z influye la diferencia i—m, que siendo negativa como el valor de z, ha de aumentar este y en g tambien se nota una pequeña diferencia consiguiente al aumento del zenital para el mismo valor de D.

Deducción de las coordenadas ortogonales de las polares y mixtas y recíprocamente estas de aquellas.

Las fórmulas, que ponen en relación los dos primeros sistemas de coordenadas, son: la (D) (2.ª) y las primeras de las (5.ª) y (6.ª) del número 62; pero por lo antes dicho prescindirémos de la diferencia i—m de aquella y utilizarémos para mayor facilidad y porque en la práctica así se hace, la (B) (2.ª) para hallar el valor de φ, ya que pudiéndose determinar directamente de los de x é y, los de D y θ, será despues muy fácil encontrar el de g ó $g' = R$ segun convenga.

Del triángulo Abb' (figura 81) y de todos los demas análogos se deduce que

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (4.ª)$$

Dividiendo ordenadamente las ecuaciones (5.ª) por las (6.ª) del número 62 y suprimiendo los factores comunes al numerador y denominador, resulta:

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{sen. } \theta}{\cos.\ \theta} = \text{tang. } \theta \qquad (5.ª)$$

Pero como la tangente no nos dá por sí solo el valor absoluto de θ en todos los casos (de 0^c á 400^c) es preciso para deducirle tener á la vista el cuadro inserto en el número 8 del volúmen I, que reproducimos mas abajo para mayor comodidad, y en su vista y la del signo y valores absolutos de x é y, se conseguirá el verdadero de θ añadiendo al correspondiente á la tangente, que siempre será menor de 50^c, las centenas y medias centenas que, segun el cuadro indique, correspondan en cada caso, como lo corroborará la figura 81.

En efecto: con relación al punto *b* de la misma, siendo las coordenadas planimétricas $+x<+y$, el valor de θ será el que dén las Tablas y menor que 50^c; si $+x>+y$ el valor de θ sería el complementario del de la tangente, porque en aquellas no se encontrará la tangente y sí la cotangente, á cuyo efecto en lugar de $\frac{x}{y}$ se buscaría $\frac{y}{x}$.

Si siendo las coordenadas negativas el valor absoluto de x fuera menor que el de y, como ocurre para el punto *d* de la figura 81, el de θ deducido de la tangente sería menor que 50^c, pero para tener el verdadero de θ habría que añadirle 200^c, segun expresa el cuadro y corrobora la figura.

No es necesario hacer mas supuestos para comprender lo dicho teniendo á la vista la figura 81 y el siguiente cuadro:

SIGNOS DE LOS		EL ANGULO SE ENCUENTRA, CUANDO	
x	y	$x<y$	$x>y$
+	+	entre 0^c y 50^c	entre 50^c y 100^c
+	−	» 150^c y 200^c	» 100^c y 150^c
−	−	» 200^c y 250^c	» 250^c y 300^c
−	+	» 350^c y 400^c	» 300^c y 350^c

Conocido el valor de D por la fórmula (4.ª) se deduce el de φ de la (B) (2.ª), pues, prescindiendo de la diferencia i—m, se tiene:

$$\cot.\ \varphi = \frac{z}{D} \qquad (6.ª)$$

Así mismo conocidos que sean los valores de φ y θ de las fórmulas (5.ª) y (6.ª) del número 62, se deducen para g' y g, los valores siguientes:

$$g' = \frac{x}{\text{sen. } \varphi \text{ sen. } \theta} = \frac{y}{\text{sen. } \varphi \cos. \theta} \qquad (7.ª)$$

y

$$g = \frac{x}{\text{sen.}^2 \varphi \text{ sen. } \theta} = \frac{y}{\text{sen.}^2 \varphi \cos. \theta} \qquad (8.ª)$$

con lo que quedarán deducidas de las *coordenadas ortogonales* x, y, z, *las polares* θ, φ y $g' = R$ la g que tambien muchos consideran como tal y las *mixtas* θ, D y z.

Apliquémos estas fórmulas á los dos casos antes utilizados.

PRIMER CASO.—*Sean las polares medidas:*

$$\theta = 35'35^c; \quad g = 128'4; \quad \varphi = 87'42^c; \quad i-m = 0$$

Las ortogonales serán:

$$x = g.\ \text{sen.}^2 \varphi\ \text{sen. } \theta = 128'4 \times 0'9614 \times 0'5272 = 65'078 \text{ metros}$$
$$y = g.\ \text{sen.}^2 \varphi\ \cos. \theta = 128'4 \times 0'9614 \times 0'8498 = 104'899 \text{ »}$$
$$z = g.\ \text{sen. } \varphi\ \cos. \varphi = 128'4 \times 0'9805 \times 0'1963 = 24'713 \text{ »}$$

Aunque desde luego se observa que las operaciones indicadas se simplifican por la repetición de un producto de dos factores y la posible supresión de algunas cifras decimales, sin embargo, la condición de tener tres factores cada resultado, haría enojosa la aplicación de estas fórmulas y por eso, determinando previamente el valor de D por la fórmula $D = g.\ sen.^2 \varphi$, que impropiamente se llama *reducir las distancias al horizonte* puesto que g no es igual á R, se utilizan las mas sencillas

$$z = D\ cot.\ \varphi;\quad x = D.\ sen.\ \theta;\quad y = D.\ cos.\ \theta$$

que en cada una reducen los tres factores antes indicados á dos, siendo uno, D, constante (1) y si bien exigen la previa determinación de este, tiene tanta aplicación en el plano numérico y en el gráfico construído directamente por rumbo y distancia ó por medio de las coordenadas ortogonales planimétricas, que siempre se calcula.

Resolviendo el caso propuesto por medio de las expresadas fórmulas, resulta:

$$D = g.\ sen.^2 \varphi = 128'4 \times 0'9614 = 123'44 \text{ metros}$$
$$x = D.\ sen.\ \theta = 123'44 \times 0'5272 = 65'078 \text{ »}$$
$$y = D.\ cos.\ \theta = 123'44 \times 0'8498 = 104'899 \text{ »}$$
$$z = D.\ cot.\ \varphi = 123'44 \times 0'2002 = 24'713 \text{ »}$$

Estos resultados, idénticos á los precedentes, se han obtenido con menor molestia; pero aún así sería grande y expuesto á equivocaciones si se aplicaran á todos los puntos característicos de un plano algo complicado y de aquí proviene que *muchos Topógrafos calculan los valores de D y z y no los de x é y* concretándose á conseguir el plano simplemente gráfico acotado *no aprovechando las grandes ventajas de los numéricos*, que inducen á los mas doctos y concienzudos á realizar aquellos cálculos con el auxilio de alguna de las muchas Tablas especiales, que daremos á conocer en el Artículo cuarto y *otros concretándolos á las estaciones fijan la situación de los detalles gráficamente por rumbo y distancia desde ellas*, con cuyo *sistema mixto*, sí pueden utilizarse en las comprobaciones y corrección de errores las ventajas del sistema de coordenadas ortogonales numéricas, dejan de aprovechar las que ofrecen las de los puntos característicos en la construcción mas sencilla y exacta de los planos, en su revisión, en la determinación numérica de las superficies y en el replanteo de los proyectos, todo lo que tiene bastante importancia.

En nuestro concepto la mejor manera de resolver todas las dificultades *es calcular las coordenadas de las estaciones con el auxilio de las Tablas y las de los puntos característicos ó de detalle con nuestro Círculo logarítmico, que permite hacer cómodamente 600 ó mas cálculos en una hora y da mas que suficiente precisión*, por lo que en la generalidad de los planos no hay inconveniente en hacer con él todos los cálculos, con lo cual desaparecería el supuesto fantasma del mucho tiempo y molestias sin cuento, que en opinión de no pocos Topógrafos hacen antipáticos los planos numéricos induciéndolos á concretarse á los simplemente gráficos.

Sin perjuicio de volver á ocuparnos de esta cuestión trascendentalísima para anular perniciosas preocupaciones, continuémos resolviendo el caso propuesto con la *deducción de las coordenadas polares de las ortogonales*.

Son estas según antes hemos visto:

$$x = 65'078 \text{ metros};\quad y = 104'899 \text{ metros};\quad z = 24'713 \text{ metros}.$$

Pues bien, resolviendo con estos valores y los que se vayan deduciendo las fórmulas (4.ª) á (8.ª) se tendrá:

---

(1) Esta condición permitiría calcular con nuestro Círculo logarítmico las tres coordenadas de cada punto con una sola posición del disco economizando considerablemente el tiempo necesario; sin embargo aconsejamos que para evitar equivocaciones y dudas no procedan así mas que los muy prácticos en su manejo.

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{65'078^2 + 104'899^2} = 123'445 \text{ metros}$$

$$\text{Tang. } \theta = \frac{x}{y} = \frac{65'078}{104'899} = 0'6204 \text{ y } \theta = 35'35^c$$

$$\text{Cot. } \varphi = \frac{z}{D} = \frac{24'713}{123'445} = 0'2002 \text{ y } \varphi = 87'42^c$$

$$g = \frac{x}{\text{sen. } \varphi \text{ sen. } \theta} = \frac{65'078}{0'9805 \times 0'5272} = 125'9$$

$$g = \frac{y}{\text{sen.}^2 \varphi \text{ cos. } \theta} = \frac{104'899}{0'9614 \times 0'8498} = 128'4$$

Estos cálculos, cuando se realizan con toda escrupulosidad, como lo hemos hecho para conseguir toda la precisión deseable, son bastante molestos; pero se simplifican mucho su primiendo algunas cifras decimales y utilizando el Círculo logarítmico en las cuatro últimas formulas; conviene realizarlos en los replanteos, porque son pocos los puntos en que puede ser esto necesario y no hay medio mas sencillo para deducir de las coordenadas ortogonales las polares y mixtas, cuando se desea conseguirlas con mayor precisión que la que dan los medios simplemente gráficos, que es poca en los planos de escala menor de $^1/_{1000}$; pero en los de esta y otras mayores se utilizan estos medios por la facilidad y rapidez con que se consigue aquella deducción á expensas por de contado de la precisión, ya que en los de escala de $^1/_{1000}$ será difícil alcanzar mayor precisión de 3 decímetros en las distancias y 0'15^c en los ángulos siendo además necesario para hallar los valores de φ y $g' = R$ hacer construcciones especiales aunque sencillas y emplear el trasportador ó mejor aun el sistema de las cuerdas como le explicamos en el número 7 del volúmen I.

Segundo caso. — *Sean las polares medidas:*

$$\theta = 147'35^c \text{ ; } g = 98'5 \text{; } \varphi = 123'45^c \text{ ; i-m} = -0{,}07 \text{ m.}$$

La mixta auxiliar, D, y las ortogonales serán:

$$D = g. \text{ sen.}^2 \varphi = 98'5 \times 0'8704 = 85'73 \text{ m.}$$
$$x = D. \text{ sen. } \theta = 85'73 \times 0'7359 = 63'089 \text{ m.}$$
$$y = D. \text{ cos. } \theta = 85'73 \times -0'6771 = -58'048 \text{ m.}$$
$$z = D. \text{ cot. } \varphi + i\text{—}m = 85{,}73 \times (-0'3859) - 0'07 = -33'153$$

Las polares y mixtas de estas deducidas son:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(63'089)^2 + (58'048)^2} = 85'73 \text{ m.}$$

$$\text{Tang. } \theta = \frac{x}{y} = \frac{63'089}{-58'048} \text{ o' cot. } \theta = \frac{-y}{x} = \frac{-58'048}{63'089} = -0'92 = \text{cot. } 52'65^c$$

$$\text{» } = \text{Tang. } 47'35^c \text{ y } \theta = 100 + 47'35^c = 147'35^c$$

$$\text{Cot. } \varphi' = \frac{z}{D} = \frac{-33'153}{85'73} = -0'3867 = \text{cot. } 123'49^c$$

$$g = \frac{D}{\text{sen.}^2 \varphi} = \frac{85'73}{0'8704} = 98'54$$

Como el valor de x es mayor que el de y, y este negativo, para hallar el de θ ha habido que recurrir á la cotagente y al resultado añadir 100^c, porque el signo positivo de x y el negativo de y, y aquella diferencia en los valores absolutos indican que el de θ se halla entre 100^c y 150^c, como ya se dijo en el número 8 del volúmen I y se recordó en el 62 de este.

La diferencia que se observa entre el valor deducido para φ' y el supuesto de φ procede de la influencia que en el de z tiene la diferencia i—m, que ahora no se podría tener en cuenta y á la misma causa es debida la no conformidad completa entre el valor deducido para g y el supuesto medido, todo como ya se dijo al deducir las coordenadas polares de las mixtas relativamente al mismo segundo caso y hacemos notar esto para facilitar á los menos doctos la aplicación de las precitadas fórmulas, así como debemos advertirles que en nuestras Tablas taquimétricas y muchas otras especiales no encontrarán las tangentes y cotangentes naturales de 140° á 150° y 50° á 60° porque no es necesario á su destino y en tal caso podrán resolver la fórmula segunda de las antes consignadas por logaritmos sino tienen á mano las Tablas de don Leoncio de la Bárcena, que contienen aquellas, pero no para los ángulos zenitales sino para los verticales.

65 — Algunas consideraciones sobre la influencia que en el error de cierre de una poligonal tienen los cometidos en los ángulos y en las distancias é inmediatas consecuencias que han de servir de base á los procedimientos topográficos perfeccionados.

1.° Al ocuparnos en el número 156 del volúmen I de las ventajas que se atribuyen á la brújula, hicimos ver la indudable que la medición y uso de los *rumbos ó azimutes* tiene sobre el de los ángulos que entre sí forman los lados de las poligonales; porque en la construcción del plano el error que en uno de los primeros se comete solo produce en el cierre otro igual al seno del mismo en el radio de la magnitud del lado correspondiente, conservándose todos los demas paralelos á su verdadera posición; mientras que el mismo error en un ángulo de la poligonal produce en el cierre un error equivalente al seno del mismo ángulo en radio igual á la distancia entre el vértice en que el error se cometió y el último, cambiando la dirección verdadera de todos los lados y produciendo un error de cierre mucho mayor.

De aquí se deduce la *conveniencia de medir y utilizar en la construcción de los planos los rumbos ó azimutes*, no en verdad con la incertidumbre y poca precisión características de la aguja imanada, sino con las condiciones de los buenos limbos y nónius ó microscopios compuestos apropiados; aquello es tanto mas recomendable cuanto que por su medio se consiguen directa y sencillamente las coordenadas ortogonales, que tantas ventajas nos ofrecen en la construcción, distribución de errores y toda clase de cálculos; pero es de advertir que aquella necesaria condición no se consigue completa y seguramente con solo trasmitir la orientación mediante el limbo, sino que es preciso combinar y comprobar sucesivamente los rumbos para descubrir las equivocaciones y corregir oportunamente los pequeños errores, que en ellos hubieran podido cometerse, sin lo cual producirían el mismo efecto de los cometidos en los ángulos de las poligonales, porque las orientaciones sucesivas tendrían con relación á la verdadera la inclinación correspondiente á tales errores.

2.° *Cuanto menor es la longitud de un lado de una poligonal tanto mayor debe ser el cuidado con que se centre el aparato y se haga la puntería*, porque el error que en ellos se comete produce mayor desorientación y consiguientemente mayor error de cierre.

Para comprender la grande importancia de esta observación basta hacerse cargo de las variaciones angulares en centígrados que corresponden al error de centración ó de puntería en milímetros, que para distintas magnitudes de los lados se consignan en el estado de la página siguiente:

En efecto: para un lado de 10 metros, v. gr., la desviación de 3 centímetros en la centración del aparato ó en la puntería no dará un cambio apreciable en la situación gráfica ni aun en la numérica del extremo de tal lado y por esto es frecuentísimo entre los Topógrafos que se hagan aquellas con poco cuidado; sin embargo *debe procederse de una manera enteramente contraria*, porque la consiguiente desorientación de 19'08" centígrados motivará un error considerable en el cierre, si á dicho lado excesivamente corto suceden otros largos, ya que tal errror

será equivalente al seno del ángulo de la desorientación en un circulo de radio igual á la distancia del vértice, en que se estacionó con descuido, al final de la poligonal.

MAGNITUD DE LOS LADOS	DESORIENTACIÓN EN CENTÍGRADOS PARA LA DESCENTRACIÓN DE					
	5 mm.	10 mm.	15 mm.	20 mm.	25 mm.	30 mm.
10 metros	3'14'	6'26'	9'63'	12'78'	15'30'	19'08'
20 »	1'59'	3'18'	4'98'	6'37'	7'96'	9'55'
40 »	0'80'	1'59'	2'39'	3'19'	3'98'	4'78'
60 »	0'53'	1'06'	1'59'	2'12'	2'65'	3'18'
80 »	0'40'	0'80'	1'20'	1'59'	2'00'	2'39'
100 »	0'32'	0'64'	0'96'	1'27'	1'59'	1'91'
150 »	0'21'	0'42'	0'63'	0'84'	1'05'	1'27'
200 »	0'16'	0'32'	0'48'	0'61'	0'80'	0'96'
300 »	0'11'	0'21'	0'31'	0'42'	0'52'	0'63'

Como en el anterior estado se observa, no sucede lo mismo con los lados de suficiente longitud, pues ya se vé que á la de 200 metros con la misma descentración de 3 centímetros la desorientación no llega á 1' ordinaria apreciación de los limbos y con la de 300 metros solo alcanza á 0'63', cuya apreciación solo se consigue con observaciones multiplicadas; de manera que para evitar aquel peligro parece que debiera establecerse como regla *que los lados de las poligonales fueran siempre muy largos;* pero como estos ofrecen inconvenientes en la medición directa é indirecta y por otra parte no siempre el terreno permite elegirlos á gusto del Topógrafo, de aquí que en las buenas Instrucciones topográficas catastrales, que es donde mas en evidencia se ponen todos los inconvenientes, se señalen límites á la longitud de los lados de las poligonales.

En la especial para estas (II) dictada en 15 de Abril de 1889 para la renovación del Catastro italiano (1) se dispone en el § 8.° que «la longitud de los lados de las poligonales no será nunca »menor de 100 metros en las principales y de 50 m. en las secundarias, ni mayor de 350 metros »cuando se utilice la medición directa ó de 200 m. cuando se emplée la estadia; pero utilizando »los taquimetros los lados de las poligonales podrán ser de longitud mayor (de 200 m.) con tal »que se liguen con puntos intermedios.»

Como estas prescripciones no siempre se pueden cumplir, es preciso hacer combinaciones que localizando los errores permitan corregirlos racionalmente y evitar que influyan en el cierre, como cumplidamente se consigue con el procedimiento modernísimo de que luego nos ocuparémos.

Para evitar el error de orientación consiguiente á los lados muy cortos utilizan algunos tres trípodes iguales, que se colocan en cada tres vértices sucesivos; pues estando el goniómetro en el del medio y en los otros dos planchas de mira perfectamente centradas, como las usadas en las minas, se tiene la seguridad de no cometer error sensible en la centración ni en la puntería, ya que medido el azimutal inverso y directo de cada estación se fija el aparato en el trípode siguiente sin tocarle y la plancha de mira en aquel en donde se encontraba el aparato, colocando el primer trípode en la estación siguiente bien nivelada su plataforma para que no haya necesidad de tocarla al poner sobre ella el aparato; así se miden los azimutes de las lineas ó mejor dicho de los planos verticales, que pasan por el eje de las roscas de los trípodes, que son invariables mientras se hace la medición; las distancias se miden sucesivamente despues de

(1) Estas y las demas Instrucciones dictadas para estos trabajos son de las mas apreciables por su sencillez, claridad y precisión.

cada azimutal directo é inverso colocando una mira ordinaria adosada á cada trípode de punto de mira.

Este procedimiento muy exacto es un tanto engorroso y generalmente no se utiliza más que en los planos de poblaciones ó cuando los demas se quieren conseguir con grande precisión y sea indispensable admitir lados muy cortos, porque con los mayores de 150 metros es inútil cuidando de centrar bien el aparato, lo que se consigue fácilmente con los que tienen movimiento de traslación sobre la plataforma y dirigiendo la visual al eje de la banderola ó de la mira.

3.ª Finalmente, *los errores en las distancias influyen en el de cierre de las poligonales de una manera muy distinta que los que en los ángulos se cometen y su combinación hace imposible la repartición racional de aquel error; por lo que es de todo punto necesario separarlos y localizarlos evitando en lo posible su acumulación.*

Ya en el número 18 hicimos ver la distinta influencia que en el error de cierre de las construcciones gráficas tiene un error en la magnitud de un lado ó de un ángulo; pero no siendo esto suficiente á nuestro actual objeto conviene examinar lo que ocurre cuando la posición de los vértices de la poligonal, que, como entonces, supondrémos se separa poco de la recta que une sus extremos, y el error de cierre, se determinan mediante las coordenadas ortogonales planimétricas.

Los errores que en la medición de las distancias se cometen y los consiguientes de las coordenadas ortogonales planimétricas son proporcionales á la longitud de aquellas.

Lo primero se desprende de cuanto sobre el particular digimos en el Capítulo III de la segunda Parte del volúmen I, y muy especialmente en los números 84 á 88 del mismo.

Lo segundo se deduce de las fórmulas que ponen en relación las coordenadas ortogonales planimétricas con la distancia.

$$\text{En efecto: si} \quad x = D \text{ sen. } \theta$$
$$\text{é} \quad y = D \cos. \theta$$

es consiguiente que cuando en la distancia se comete un error, *e*, los valores de las coordenadas serán:

$$x' = (D \pm e) \text{ sen. } \theta = D. \text{ sen. } \theta \pm e. \text{ sen. } \theta$$
$$y' = (D \pm e) \cos. \theta = D. \cos. \theta \pm e. \cos. \theta$$

y el error en cada una

$$x' - x = \pm e. \text{ sen. } \theta = \varepsilon_x$$
$$y' - y = \pm e. \cos. \theta = \varepsilon_y$$

cuyos errores serán respectivamente menores que el cometido en la distancia, porque siempre sen. θ y cos. θ lo son que la unidad.

Si, como es natural, nos concretamos á los errores accidentales y tenemos en cuenta que siendo distintos en magnitud y en signo los que se cometen en los diferentes lados de la poligonal pueden anularse en todo ó en parte ó bien acumularse, el error de cierre de cada coordenada $Sx - \Delta x$, $Sy - \Delta Y$, esto es la diferencia entre las sumas de las coordenadas parciales y la diferencia de las coordenadas al orígen de sus extremos, $X - X'$ é $Y - Y'$, estará representado, según la teoría de las probabilidades, por la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los distintos errores ó sea llamando á estos

$$\varepsilon_x, \quad \varepsilon'_x, \quad \varepsilon''_x \ \ldots \ \varepsilon^n_x; \quad \varepsilon_y, \quad \varepsilon'_y, \quad \varepsilon''_y \ \ldots \ \varepsilon^n_y; \qquad \text{por}$$

$$Sx - \Delta X = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x'^2 + \varepsilon_x''^2 \ldots + \varepsilon_x^{n\,2}}$$

$$Sy - \Delta Y = \sqrt{\varepsilon_y^2 + \varepsilon_y'^2 + \varepsilon_y''^2 \ldots + \varepsilon_y^{n\,2}}$$

Estas fórmulas, como todas las del cálculo de probabilidades, no pueden tener otro carác ter que el de aproximadas; las poligonales se deben formar ordinariamente por lados cuya di rección no se separe mucho de la recta que une sus extremos y de longitud no muy diferent por lo tanto sin apartarnos mucho de la verdad posible podemos suponer iguales todos l errores parciales y en este caso las fórmulas precedentes se convierten en estas otras mas sen cillas

$$S\,x - \Delta X = \sqrt{n\,\varepsilon_x^2} = \varepsilon_x \sqrt{n}$$

$$S\,y - \Delta Y = \sqrt{n\,\varepsilon_y^2} = \varepsilon_y \sqrt{n}$$

y como los errores ε_x y ε_y dependen del cometido en cada lado y la importancia de su long tud, resulta que el error final de las abscisas y ordenadas puede considerarse proporcional á longitud de los lados de la poligonal y repartirse racionalmente entre ellos el error de cierre e proporción de la magnitud de cada uno á la total, aunque mas ordinariamente se hace por pa tes iguales sino es muy distinta la longitud de los lados y esto se hace modificando indudabl mente el valor que de las fórmulas precedentes se deduce para los errores medios parciale porque el de estos depende del signo diferente que en cada lado puede tener el error y no sien do posible conocerle y aplicarle se han de suponer todos iguales ó proporcionales para anul el de cierre, que en distancia es $= \sqrt{(S\,x - \Delta X)^2 + (S\,y - \Delta Y)^2}$

Compréndese fácilmente que cuanto menor sea el número de lados tanto más se evitará influencia de los distintos errores entre sí y más nos acercarémos á la verdad hasta el extrem de que si la poligonal se compusiera de un solo lado desaparecería completamente el error; p consiguiente *conviene reducir lo mas posible el número de lados de cada poligonal, ó mejor dic combinar las operaciones de manera que se pueda combinar y corregir la magnitud de los lad integrantes de aquella con toda seguridad.*

Veamos ahora como influyen en las coordenadas planimétricas los errores de los ángulo

Sea e' el que se cometa en el rumbo de un lado; resultará para las coordenadas planimétr cas de su extremo, en lugar de

$$x = D.\ \text{sen.}\ \theta \quad \text{é} \quad y = D.\ \cos.\ \theta$$

$$x' = D.\ \text{sen.}\ (\theta \pm e') = D.\ (\text{sen.}\ \theta \cos.\ e' \pm \text{sen.}\ e' \cos.\ \theta)$$

$$y' = D.\ \cos.\ (\theta \pm e') = D.\ (\cos.\ \theta \cos.\ e' \mp \text{sen.}\ \theta\ \text{sen.}\ e')$$

pero por ser e' muy pequeño, pues ordinariamente no excede de 2 centígrados, podemos con siderar Cos. $e' = 1$, con lo cual las precedentes fórmulas se convierten en

$$x' = D.\ (\text{sen.}\ \theta \pm \text{sen.}\ e' \cos.\ \theta) = D.\ \text{sen.}\ \theta \pm D.\ \cos.\ \theta\ \text{sen.}\ e' = x \pm y\ \text{sen.}\ e'$$

$$y' = D.\ (\cos.\ \theta \mp \text{sen.}\ \theta\ \text{sen.}\ e') = D.\ \cos.\ \theta \mp D.\ \text{sen.}\ \theta\ \text{sen.}\ e' = y \mp x\ \text{sen.}\ e'$$

y por consiguiente

$$x' - x = \pm y\ \text{sen.}\ e'$$

$$y' - y = \mp x\ \text{sen.}\ e'$$

Estos resultados ponen en evidencia que el error angular produce otros en la abscisa y la ordenada del lado correspondiente que, si bien dependen indudablemente de su magnitu no están en razón directa de ella, ni de las correspondientes coordenadas, como indica la i misción de una en el error de la otra y la contrariedad del signo y como estos y el valor d seno del error angular no son los mismos si los rumbos de los lados sucesivos cambian de cu drante y por otra parte las coordenadas finales se obtienen con la suma de las parciales y co siguientemente en ellas los errores de aquellas se han de combinar de muy distintas maner es incuestionable que no se puede corregir racionalmente en las coordenadas el error de cier

consiguiente á los que en los ángulos se cometen y es por consiguiente necesario combinar las observaciones de manera que se descubran y corrijan separada y directamente los errores angulares antes de calcular las coordenadas parciales y generales de cada poligonal.

Esto es tanto mas necesario, cuanto que si así no se hace la combinación de los errores con los consiguientes á las distancias complican de tal modo el análisis del error de cierre, que es de todo punto imposible descubrir la causa ó causas de que procede, aunque se utilicen los ingeniosos procedimientos propuestos á tal efecto, ni tampoco repartir racionalmente el error de cierre, porque no es proporcional á la longitud de los lados ni á la magnitud de las coordenadas del punto final con relación al de partida.

ARTÍCULO SEGUNDO

TEORÍA DE LOS PROCEDIMIENTOS MODERNOS

66 — Clasificación. Casos principales que pueden ocurrir.

El fin, que los procedimientos modernos se proponen, es conseguir con la mayor facilidad, economía y precisión posibles el *plano numérico;* esto es, las coordenadas ortogonales de todos los puntos característicos del terreno con relación á un mismo orígen, ya que por su medio se puede representar gráficamente y mediante sencillos cálculos resolver todas las cuestiones que puedan ocurrir.

A tal efecto, utilizando la medición indirecta de las distancias, se determinan por masas las coordenadas polares de sus puntos característicos desde otros de estación relacionando estas entre sí para deducir sencillamente las ortogonales de todos á un mismo orígen en la forma explicada en el número 62.

No implica que el sistema de medición indirecta de las distancias sea uno ú otro de los explicados en el Artículo segundo del Capítulo III de la segunda Parte del volúmen I; pero como hemos considerado preferible el llamado de la estadia y este es el más generalmente utilizado, á él haremos referencia.

Es de advertir, que como por su medio no se consigue la medición de las alturas con la precisión propia de las buenas nivelaciones por visuales horizontales, ni la situación planimétrica de los puntos principales con la que se alcanza mediante las formales triangulaciones, la Moderna Topografía no excluye, como algunos se figuran, estas ni aquellas de sus procedimientos y por eso ademas de lo dicho sobre los primeros en el Capítulo II de la Parte anterior, en la siguiente nos ocuparémos de la teoría y la práctica de las triangulaciones topográficas, tal como ahora se realizan y darémos idea de las nivelaciones de grande precisión.

Tampoco deja de utilizar todos los procedimientos antiguos, ni siquiera la medición directa en pequeños detalles: pero reduce considerablemente esta y emplea los métodos de perpendiculares, medición é intersecciones solo en casos especiales, lo que no empece sino que facilita la aplicación de sus propios procedimientos.

Estos consisten:

en el de *radiación* desde cada estación para medir las coordenadas polares de los puntos característicos determinables desde cada una y

en el *poligonal* para relacionar estas entre sí facilitando la determinación de las coordenadas ortogonales de todos aquellos puntos;

pero, para disminuir el número de estaciones, descubrir las equivocaciones, impedir la acumulación de los errores inevitables y corregirlos racionalmente, se combinan de distintas maneras las observaciones segun los casos y por esto para darlos á conocer sencillamente nos ocuparémos de los siguientes, que son los principales que pueden ocurrir.

Primer caso: en que las condiciones del terreno permitan medir cómodamente y con la precisión deseable las coordenadas polares de todos sus puntos característicos desde una sola estación.

Segundo caso: en que para conseguir el mismo objeto sea necesario utilizar dos estaciones, cuya distancia entre sí pueda medirse con una sola observación y sean visibles una de otra.

Tercer caso: en que la distancia entre las dos estaciones indicadas sea mayor que la medible con una sola observación y menor que el duplo de su límite.

Cuarto caso: en que el terreno objeto del plano consista en una zona de grande longitud y poca anchura exigiendo muchas estaciones sin ó con puntos de comprobación préviamente determinados.

Quinto caso: en que el terreno siendo de considerable extensión en todos sentidos no alcance la que exija una especial triangulación y

Sexto caso: finalmente, en que siendo de muy grande extensión, sea necesaria una previa triangulación ó deba referirse á la general del territorio de que forme parte.

67 — Primer caso.

El enunciado, que de este caso hemos consignado en el número anterior, es y no puede menos de ser indeterminado, porque no se fija la distancia máxima á que pueden hallarse los puntos característicos del de estación, para que desde ella se midan cómodamente las coordenadas polares de cada uno, y esta indeterminación, indicada con la frase *precisión deseable* allí consignada, motivaría seguramente en los principiantes dudas y vacilaciones, que conviene desvanecer; por lo que hemos de hacer algunas consideraciones que permitan fijar las ideas y formar criterio exacto y concreto.

Los mayores errores, que en los planos de esta clase se pueden cometer, proceden principalmente de los consiguientes á la medición de las distancias, y como los de estas son proporcionales á su longitud y, á igualdad de potencia de los anteojos disponibles, en razón inversa del ángulo diastimométrico utilizable, y el mayor de estos generalmente empleado es el de 2 centímetros por metro ó $^1/_{50}$, no siendo fácil disponer de mas de 3 metros de mira, es consiguiente que la *distancia máxima* á que los puntos podrán hallarse del de estación, cuando se quieran medir con menos error de $^1/_{1000}$, en cuyo caso es necesario utilizar aquel ángulo diastimométrico, ha de ser de 150 metros realizando las observaciones con las oportunas precauciones.

Si la precisión requerida no pasara de $^1/_{500}$ y se dispone de anteojo que permita leer claramente los centímetros y los números de la mira parlante á 300 metros de distancia, utilizando el ángulo diastimométrico de 1 centímetro por metro, ó sea el de $^1/_{100}$, podrían los puntos característicos hallarse á tal distancia del de estación haciéndose las observaciones con las recomendadas precauciones.

Finalmente, si solo fuera necesaria la precisión de $^1/_{200}$, disponiéndose de miras de dos planchas, con un taquímetro regular podrían hallarse los puntos característicos á 500 metros del de estación utilizando las precauciones que se hicieron constar en el número 210 del volúmen I y un ángulo de 5 mm. por metro ó $^1/_{200}$.

Claro es que en los tres casos referidos se supone que el terreno sea de tales condiciones que desde la estación se vean todos los puntos característicos sin dificultad y con menos inclinación de 20^c, porque con otras mayores y con estorbos, especialmente si son matas y árboles ú otros semejantes, tales distancias se han de reducir considerablemente, pues con ellos no se puede leer la mira ó se hace en muy malas condiciones.

Con el primer supuesto, el plano determinable desde una sola estación puede alcanzar la superficie de 7 hectáreas; con el segundo la de 28 hectáreas y con el tercero 78 hectáreas y, si bien esto se consigue á expensas de la precisión, es digno de tenerse en cuenta para poder hacer apli-

cación del que mas convenga en cada caso, ya que la reducción de las estaciones á una sola produce grande economía en los trabajos de campo y en los de gabinete, y esto con tanto mayor motivo cuanto que disminuyendo la precisión se reduce tambien el número de puntos característicos, porque no son necesarios tantos para el objeto que se propone y la escala en que el plano se ha de construir, ya que el objeto ó destino del trabajo, la precisión y el plano gráfico deben concordar, aunque no depender los dos primeros del último, como muchos suponen olvidando los errores propios del graficismo y la variabilidad muchas veces de la escala del mismo destino principal del trabajo, por lo que es preferible el *plano numérico*, que permite resolver todas las cuestiones libremente de tales errores y construir los gráficos que sean necesarios con las mismas condiciones, dentro de los límites de la precisión admitida para el levantamiento.

Esto consignado, debemos hacer constar que el *procedimiento* que se ha de seguir en este primer caso es el de *radiación* en una forma análoga á lo dicho para el antiguo método de este nombre en el número 5; pero como en este solo se trataba de determinar la proyección horizontal de los límites y principales accidentes planimétricos y con el moderno nos proponemos conseguir tambien el relieve del terreno, claro es que se han de determinar todos los puntos característicos en ambos conceptos y hacer para cada uno la observación completa, de manera que se obtengan las coordenadas polares, θ, φ y R, ó mas bien g, necesarias para deducir de ellas las ortogonales x, y, z ó mas bien las de esta clase á un orígen exterior é inferior X, Y y Z, que siendo todas positivas nos permitan resolver fácilmente todas las cuestiones, que sobre tal terreno puedan ocurrir.

Veamos cómo á tal efecto se ha de proceder:

Colocado el aparato bien corregido, nivelado y centrado sobre el punto de estación, despues de medir la altura á que sobre él se encuentra el eje de muñones del anteojo, de que se toma nota al lado de la inicial *i*, se hace la coincidencia del *cero* de los nónius A y B respectivamente con los extremos del diámetro 0^c 200^c del limbo azimutal apretando, una vez conseguida aquella, el tornillo de unión de los dos platos; se afloja despues el del movimiento general y se hace girar toda la parte superior del aparato hasta que el extremo azul de la aguja magnética, en completo reposo y libre en lo posible de extrañas influencias, coincida con el *cero* del limbo de la brújula ó de la declinatoria, en cuyo caso se aprieta el tornillo del movimiento general para conservar durante toda la operación la coincidencia del diámetro 0^c 200^c con la meridiana magnética del punto de estación, y para mayor seguridad se materializa sobre el terreno colocando en su dirección por medio del anteojo una banderola á 150, 200 ó mas metros.

Si fuera conocida la meridiana geográfica del punto de estación ó por ella pasara una línea que debiera servir de eje de las ordenadas, el movimiento giratorio antedicho se haría hasta que la visual dirigida por el anteojo coincidiera con cualquiera de estas direcciones asegurando en ella el movimiento general para que el diámetro 0^c 200^c coincida con la elegida y se tomaría nota del rumbo que señalara la aguja, el que, en el primer caso, sería su declinación y en todos los sucesivos arrumbamientos habría de resultar la misma diferencia aproximadamente entre la graduación señalada por el nónius A y la de la brújula, sirviendo esta, como siempre, de testigo; pero como es algo molesto tener en cuenta tal diferencia, si la brújula es declinable se hará la oportuna corrección desde luego para hacer inmediatamente en cada caso la comprobación.

Colocada despues la mira bien vertical y de frente al aparato en el punto primero, aflojando el tornillo de unión de los dos platos, se la dirige la visual enfocando con todo cuidado y haciendo que el hilo ó trazo horizontal axial coincida exactamente con una división de decímetros, por ejemplo la señalada 150 ó 200 en las miras graduadas al centímetro, con las de 80 ó 100 en las que lo están al doble centímetro y despues de rectificar la enfocación para evitar todo error de paralaje, que es el mas molesto y peligroso, y leer con seguridad, se ven y dictan las graduaciones coincidentes con los hilos extremos tomando ordenadamente nota de las tres alturas de mira en las casillas correspondientes del registro general, que puede tener la forma

del que insertarémos al ocuparnos en el Artículo siguiente de los trabajos de campo, que en esta parte es igual al inserto en el número 210 del volúmen I; hállanse inmediatamente despues las diferencias de la graduación del hilo axial á las de los extremos, que deben ser iguales y la suma de las alturas de los segundos al duplo de la primera y con ellas, teniendo en cuenta el ángulo diastimométrico utilizado y las divisiones de la mira, se deduce el número generador g y la altura de mira m en metros, que despues han de servir para calcular la distancia el primero, y el segundo, para hacer la corrección $i - m$ de las cotagentes para obtener las alturas, z.

Léense inmediatamente despues los ángulos azimutales y zenitales señalados por cada par de nónius A, B y I, II, y se anotan en sus correspondientes casillas, observando si respectivamente difieren en 200^c justos ó con la tolerancia propia del aparato.

Con estos datos se tendrán, con la comprobación correspondiente á la repetición, los valores de las coordenadas polares θ, φ y g, la altura del instrumento, i, y de la mira m, y por consiguiente cuanto es necesario para calcular las coordenadas ortogonales del punto visado relativamente al de estación, lo que se hace despues en el gabinete aplicando las fórmulas desarrolladas en el número 62:

$$D = g \text{ sen.}^2 \varphi \qquad (1.^a)$$

$$x = D \text{ sen. } \theta = g \text{ sen.}^2 \varphi \text{ sen. } \theta = g' \text{ sen. } \varphi \text{ sen. } \theta \quad (1) \qquad (2.^a)$$

$$y = D \text{ cos. } \theta = g \text{ sen.}^2 \varphi \text{ cos. } \theta = g' \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \theta \quad (1) \qquad (3.^a)$$

$$z = D \text{ cot. } \varphi + (i - m) = g \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi + (i - m) \qquad (4.^a)$$

Esta *observación*, que se llama *completa* para distinguirla de la que se hace sobre algunos puntos, en que por estar muy léjanos no se puede leer la mira y por consiguiente se limita á determinar los valores de los ángulos θ y φ, se hace para cada punto característico en cualquiera de los dos conceptos planimétrico ó altimétrico, y con ellos y el cróquis del terreno, que se hace previa ó simultáneamente, queda terminada la operación del levantamiento del plano en el caso de que se trata.

Pero si entre los detalles hubiera alguno, como edificios, puentes ú otros análogos, que por sus pequeñas dimensiones en algun sentido ó por no verse desde la estación alguno de sus vértices no fuera fácil determinar con la precisión necesaria, en lugar de hacer al efecto una ó varias estaciones especiales, sería preferible determinarlos en todo ó en parte por perpendiculares ó medición directa con relación á una de las visuales dirigidas al vértice mas próximo del polígono general ó á un punto característico notable, y esto mismo conviene hacer relativamente á otros puntos próximos entre sí y lejanos de la estación para evitar que los errores residuos en los ángulos y en las distancias, tolerables en la que respectivamente los separa de la estación, no deformen la figura de los detalles, como mas claramente explicarémos en el Artículo siguiente, que justifica lo que dejamos dicho sobre que la moderna Topografía no rechaza el auxilio que de los antiguos procedimientos puede recibir.

Teniendo en cuenta la suma rapidez y suficiente precisión con que las distancias se miden con el anteojo, se comprende fácilmente porqué el método de radiación, que con la medición directa era rara vez aplicable, sea el característico de los procedimientos modernos y en el los hasta su defecto de falta de comprobaciones desaparece, porque desde luego se consiguen mediante la repetición de los valores de las coordenadas polares y las mas completas que sin mucho trabajo se pueden tener en el caso de que nos ocupamos haciendo una segunda estación en un punto determinado desde la primera, orientando con su dirección, como luego dirémos, y visando desde aquella los puntos principales vistos desde la primera, lo que es recomendable

(1) Debemos recordar que g' es el radio vector ó sea la parte de mira comprendida por el ángulo diastimométrico cuando aquella es perpendicular al eje de colimación del anteojo.

cuando se quiera tener completa seguridad en el resultado del trabajo, pues determinando las coordenadas ortogonales de todos los puntos vistos desde cada una con referencia á un mismo orígen, los dobles valores que se obtienen para las coordenadas de los puntos vistos desde las dos estaciones darán una comprobación completa.

El mismo resultado se obtiene, aunque con mas pena, midiendo directamente la distancia entre los puntos determinados por radiación, v. gr., las líneas de fachada en los edificios, lo que se hace generalmente en los planos de las poblaciones, porque al mismo tiempo se determinan algunos pequeñísimos detalles interesantes y que no pueden apreciarse desde las estaciones respectivas; pero, como esto implica un trabajo muy molesto y costoso, solo se hace en casos muy especiales.

Hemos supuesto que para todos los puntos se leyeran y anotaran los dos ángulos azimutales señalados por los nónius A y B; pero como en la generalidad de los aparatos, en todos menos en los Clepes excéntricos de Porro, esto obliga á dar media vuelta alrededor del aparato, y esto es molesto y llega á marear al operador, que trabaja con rapidez, realmente no se hace mas que para los puntos principales, contentándose para los demas con leer con cuidado el ángulo indicado por el nónius A y el de la brújula, que sirve de testigo para evitar las equivocaciones, lo que sin molestia ni pérdida de tiempo puede hacerse con las de limbo móvil, por lo que tanto las recomendamos; pues como las ordinarias exigen tambien cambio de posición del operador, muchas veces no se observa el rumbo que señalan y las equivocaciones se producen.

Puesto el aparato en observación y orientado y la mira en el punto, la observación completa se puede realizar en diez segundos, y por consiguiente si se dispone de dos ó tres miras con peones bien adiestrados y dirigidos y de un escribiente que apunte los datos que le dicte el observador, se comprende con cuanta rapidez, comodidad y precisión se puede levantar el plano completo de un terreno semejante y cuan grandes son las ventajas que sobre los antiguos procedimientos tienen los modernos, ó mejor dicho la medición óptica de las distancias sobre la directa, porque de esta condición provienen aquellas.

68 — Segundo caso, ó sea cuando para medir las distancias cómodamente y con la precisión deseada, sea necesario utilizar dos estaciones visibles una de otra y cuya distancia pueda medirse con una sola observación.

Representando por *C* y *D* (figura 82) las dos estaciones y por los círculos, á que sirven de centro, el terreno determinable desde cada una, la figura pone en evidencia que todo el comprendido en la parte comun, *C a D b*, puede determinarse, segun mas convenga, desde una ú otra de dichas estaciones ó de las dos para tener comprobaciones.

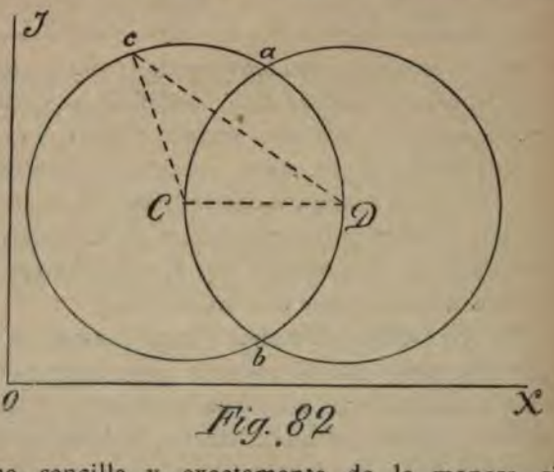


Fig. 82

Para medir las coordenadas polares de los puntos comprendidos en el círculo *C*, estacionando en este punto, se procede enteramente como se ha dicho para el primer caso, calculando las ortogonales con referencia á la misma estación y al orígen O, segun se explicó en el número 62.

Para hacerlo con las de los puntos del círculo *D*, no determinados desde *C*, se necesita estacionar en *D* con la misma orientación utilizada en *C*, y esto se consigue sencilla y exactamente de la manera siguiente:

Como desde *C* se hizo sobre *D* la observación completa midiendo el rumbo ó azimut con

ius A y B, es evidente que si se hace coincidir el cero del nónius A con la gradua-
da por el de B en aquella observación y se dirige la visual á la estación *C*, el diáme-
0^c resultará paralelo á la posición que en esta tenía y la orientación se conservará
a precisión que permita el aparato.

cir, que si desde *C* resultó para *D* el rumbo de $125'37^c$ señalado por el nónius A, ha-
incidir su cero con la de $325'37^c$, que allí señalaba el nónius B, y asegurando los
en esta posición se dirige la visual desde *D* á *C*, el diámetro $0^c - 200^c$ será en *D* per-
te paralelo á su posición en *C*, y por consiguiente la orientación del aparato en la
será enteramente igual á la de la primera estación, y midiendo las coordenadas pola-
dos los puntos determinados desde *D*, calculando las ortogonales con relación á ella y
n comun *O*, segun se dijo en el número 62, serán comparables las coordenadas ortogo-
todos los puntos determinados desde las dos estaciones y por su medio podrán calcu-
distancia entre dos cualesquiera, su diferencia de altura y el rumbo de la recta que los
r las sencillas fórmulas consignadas en el número 64.

sta *referencia* de dos estaciones consecutivas se llama *directa*, en contraposición á la *indi-*
de Porro, muy elegante, pero enojosa, y la *mixta*, de que luego hablarémos, debida á
ni, atribuyéndose la primera á Moinot, si bien en el caso de que nos ocupamos todos la
an empleado, y en los generales, en que sea necesario utilizar muchas estaciones, tiene el
nveniente de aumentarlas por la sobreposición del terreno determinable desde cada dos
ecutivas; pero tambien las ventajas de que se consigue la máxima precisión en todos los
tos de la zona y de prestarse á las comprobaciones antes indicadas.

Hemos supuesto que se conserve la orientación mediante el limbo azimutal por ser lo mas
cillo y exacto; pero debe hacerse con cuidado y viendo si la brújula confirma los rumbos
la segunda estación, porque una equivocación mayor ó menor en la coincidencia de los nó-
us A y B en la estación *D* con los inversos de los mismos observados desde *C* para *D*, produ-
ría una desorientación funestísima, no precisamente en los rumbos observados en la segunda
tación, pero sí en todos los demas que despues se hicieren en los casos de muchas de estas,
ue suponemos bastante distantes entre sí; las grandes equivocaciones fácilmente se descubren
or las indicaciones de la brújula; pero no las de fracciones de grado, y por lo tanto se debe
poner especial cuidado en la trasmisión de la orientación, lo cual no motiva mucha molestia
ni exige mas de un minuto de tiempo y da gran seguridad en el trabajo.

Casi todos los Autores, sin embargo, siguiendo á Porro, aconsejan que en cada estación se
oriente con la aguja imanada, rectificando despues los rumbos leídos con la diferencia de orien-
tación determinada por el inverso leído en el limbo para la estación precedente; pero no se
hacen el cargo de que si esto es hasta cierto punto procedente cuando se utilizan los Clepes y
demas aparatos desprovistos de nónius, no lo es con los que los tienen, porque es poco razona-
ble medir los rumbos evidentemente erróneos para despues con bastante molestia corregirlos,
lo que implica la necesidad de modificar los datos del registro, cuando con poquísimo trabajo
se pueden evitar todos estos inconvenientes, y es ademas de advertir que las comprobaciones,
que consiguen en los estados especiales de rectificación solo comprueban las operaciones pro-
pias de ella y de ningún modo los datos de la observación: ni aun con los Clepes consideramos
necesario trasmitir la orientación en esta forma y sí mas conveniente hacerlo con el limbo me-
diante los pequeños tanteos, que al efecto exigen tales aparatos para conseguir el resultado, que
directamente se obtiene con los nónius.

La observación completa que de la estación *C* se hace sobre *D* se comprueba con la que
desde la segunda estación se hace sobre la primera, y es consiguiente que no resultando com-
pletamente iguales las coordenadas polares, se aumenta su precisión tomando para los cálculos
el término medio, porque la referencia entre las dos debe hacerse con la mayor precisión posi-
ble dentro de las condiciones de la tolerancia en cada caso exigida, ya que sus errores influyen
en todos los puntos característicos con cada una relacionados y con las sucesivas, si son mu-
chas, como irémos viendo en los casos siguientes.

69 — Tercer caso, en que la distancia entre las dos estaciones necesarias sea mayor que la medible con una sola observación y menor que el duplo de su límite.

Los dos círculos de la figura 83 representan este tercer caso y ponen de manifiesto que si la superficie del terreno determinable es bastante mayor que el anterior, en cambio algunos puntos, como *a* y *b*, no podrán ser observados con el mismo ángulo diastimométrico, y por consiguiente con igual precisión que los que se encuentran dentro de cada uno de aquellos y es mas general que el terreno, cuyo plano se desea levantar, tenga la forma poligonal que los comprenda, que la circular que los deja fuera.

Además, si bien suponiendo que desde la estación *C* se vea la *D* se podrán observar sobre esta los ángulos θ y φ, y por consiguiente trasmitir la orientación como en el caso anterior, no podrá medirse la distancia con la precisión deseable, no pudiéndose hacer la observación completa de *C* á *D*, ni de esta á aquella con tal condición, y por eso todos los Autores proponen que se limite la observación á la incompleta, midiendo la distancia como muy pronto vamos á

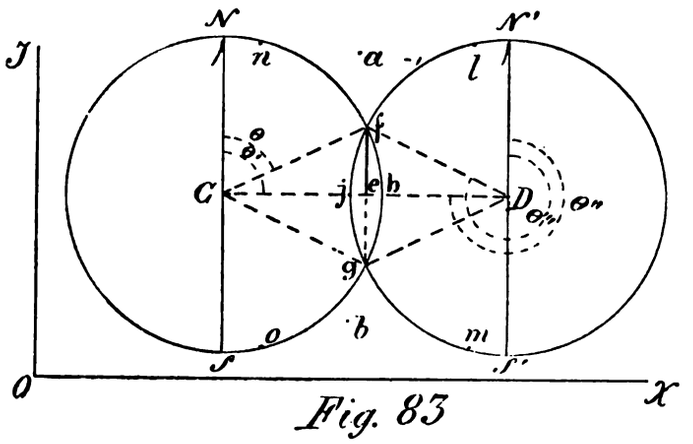


Fig. 83

explicar: no creemos esto conveniente; parécenos mejor que si se dispone de retículo compuesto de varios ángulos diastimométricos y de una mira de dos planchas, se mida con ella la distancia de *C* á *D* y *D* á *C*, completando así la observación, pues sino es de esperar se obtenga con toda la precisión deseable y conseguible con el mayor ángulo diastimométrico, sí con la suficiente para tener una excelente comprobación de los resultados del procedimiento, que se utilice para la medición de la distancia entre las dos estaciones con la precisión deseable.

Esto se consigue de varias maneras:

La primera consiste en fijar hácia el medio de la distancia y en la alineación *CD* un punto, tal como *e*, sobre el que puede hacerse observación completa desde *C* y *D*, y por consiguiente la distancia buscada será igual á $Ce+eD$, y de la altura de *e* con relación á cada estación se deducirá la de estas entre sí; pero este procedimiento tiene el inconveniente de no ofrecer comprobación haciendo, como aconsejan los Autores, incompleta la observación entre las estaciones; pero sí la tendrá si se completa con la medición de la distancia mediante la mira de dos planchas, como aconsejamos, pues teniendo esta repetida, aquella suma de las distancias parciales quedará bien comprobada.

Para evitar la dificultad indicada proponen algunos que en lugar de uno se observen dos puntos, tales como *h* y *j*, y es claro que haciendo sobre cada uno observación completa desde cada estación, la distancia entre ellos estará dada por $Ch+hD$ y por $Cj+jD$, comprobándose.

Este sencillo procedimiento no es muchas veces aplicable por no encontrarse en la alineación *CD* dos puntos de las condiciones necesarias, y para evitar esta dificultad el ilustre Villani utilizaba el siguiente:

En la región media de la distancia, y no lejos de la alineación CD, se eligen dos puntos visibles desde cada estación, que, siempre que sea posible, deben ser hitos, cabeceras de puente, esquinas de edificios ú otros semejantes bien determinados en el terreno, y sobre ellos se hace observación completa desde cada estación, con lo cual se tienen todos los datos necesarios para calcular dos veces la distancia buscada.

En efecto: si f es uno de ellos, suponiendo bajada desde él la perpendicular fe á la CD, en el triángulo rectángulo Cef se tendrá $Ce = Cf \cos. fCe$, y como Cf se mide directamente y $fCe = \theta' - \theta$, datos todos que se tienen en el registro, se puede determinar el valor de Ce.

Igualmente en el triángulo fDe, se tiene $eD = Df \cos. (\theta''' - \theta'')$, cuyos datos tambien constan en el registro, y por consiguiente se tendrá una primera medición de la distancia con la suma $Ce + eD$.

De la misma manera se procederá para el otro punto, g, y se conseguirá otra medida de la misma distancia comprobándose.

Aunque en la figura aparecen los puntos f y g sobre la misma perpendicular á la CD, se comprende que no es esto necesario, y con tal que sean visibles desde las dos estaciones y no se separen mucho de su alineación para evitar que su distancia respectiva á cada una de ellas sea demasiado larga, pueden tener cualquiera posición y se eligen como queda antes indicado, pues ofrecen buenos puntos de referencia en los replanteos.

El cróquis de la figura resultante en cada caso y los sencillos cálculos indicados se ponen en el ámplio margen de nuestros *Registros generales* para que todos allí consten, y en caso necesario se puedan descubrir y corregir las equivocaciones.

Se llama *mixta* á esta clase de *referencia* entre las estaciones, porque la de orientación se hace directamente é indirectamente se miden la distancia y la diferencia de las alturas, porque es claro que si se conoce la que existe entre f y C y f y D, se deducirá fácilmente la que haya entre C y D, y lo mismo se consigue comprobándolo relativamente al otro punto, g.

Los dos sistemas de referencia explicados tienen el inconveniente de que exigiendo determinar la situación de la segunda estación antes de concluir las observaciones de la primera, muchas veces se elige aquella por un porta-mira ó á lo mas por un Ayudante, dando lugar no pocas á que no reuna las condiciones necesarias, y para evitar esta traba y dejar al operador en completa libertad de elegirla como mejor le pareciere despues de terminada la primera, el eminente Porro propuso el sistema de *referencia indirecta*, muy elegante, pero poco práctica por los enojosos cálculos, que con ella se han de hacer, por cuyo motivo es muy poco utilizada; sin embargo, creemos oportuno dar de este procedimiento idea suficiente por si alguno quisiera aplicarle en algun caso.

Con él no es necesario que desde una estación se vea la otra; pero si que desde ambas se vean dos puntos en condiciones tales que sobre ellos pueda hacerse la observación completa desde cada una de aquellas.

La orientación en cada estación pudiera ser completamente arbitraria; pero se utiliza la aproximada que da la aguja imanada en la brújula ó declinatoria del aparato por resultar de esta manera menores diferencias y mas fácil corrección.

Ahora bien: si A y B (figura 84) son las estaciones y c y d los puntos observados y, como en la figura aparece, se suponen trazadas las coordenadas planimétricas con referencia á los ejes que pasan por cada estación, es evidente que si el ángulo i, que la recta que los une forma con la meridiana en la primera estación, A, ó con su paralela cc'' es igual al i', que forma con la de la segunda, B, las dos meridianas serán paralelas, la orientación igual en ambas y por consiguiente ninguna modificación habrá que hacer en los rumbos medidos en la segunda estación; si aquellos ángulos fueran desiguales sucedería lo contrario y la corrección, que habría de hacerse en los rumbos de la segunda estación para tener los correspondientes á la misma orientación que en la primera, sería $i - i'$.

Para tener tal comprobación ó conocer la corrección necesaria es preciso deducir de las

coordenadas polares medidas desde cada estación las ortogonales correspondientes x, y, x', y', lo cual, si es sencillo, exige algun tiempo y molestia, y despues deducir de ellas el valor de cada uno de los ángulos, *i* é *i'*, lo que se obtiene resolviendo las fórmulas

$$\text{Tang. } i = \frac{\Delta x}{\Delta y} \text{ y Tang. } i' = \frac{\Delta x'}{\Delta y'}$$

como fácilmente se deduce de la misma figura recordando las propiedades de los triángulos rectángulos.

Es de advertir que si bien las coordenadas x, y, x' y' se pueden conseguir sin error sensible, el de sus diferencias puede influir bastante en el del ángulo que por su medio se deduce, como

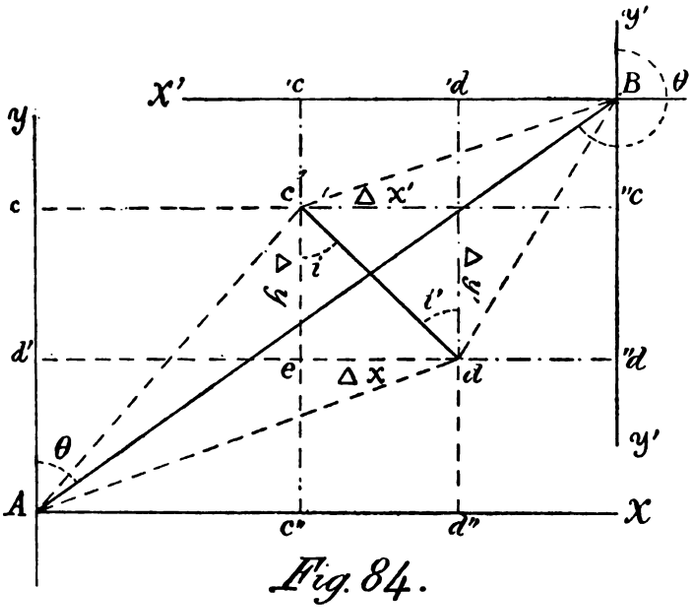


Fig. 84.

se comprende fácilmente suponiendo una de aquellas diferencias muy pequeña, y para evitar esta duda es necesario calcular por su medio la distancia *c d* entre los dos puntos con unas y con otras y el ángulo deducido por las fórmulas

$$c\,d = \frac{\Delta x}{\text{sen. } i} = \frac{\Delta y}{\text{cos. } i} \text{ y } c\,d = \frac{\Delta x'}{\text{sen. } i'} = \frac{\Delta y'}{\text{cos. } i'}$$

que deben ser iguales; pero si no lo son dejan en la duda, que no es fácil desvanecer.

Conseguida la comprobación de la orientación ó corregida la de la segunda estación y con ella calculadas las coordenadas ortogonales de los dos puntos con relación á la 2.ª estación, se deducen las de esta relativamente á la 1.ª con comprobación, pues es claro que deben ser iguales la suma de las abscisas de *c* con relación á *A* y *B* y la de las calculadas para *d* y lo mismo sucederá con las sumas de las ordenadas.

Esto conseguido, el rumbo y la distancia *A B* se calculan por las fórmulas conocidas.

$$\text{Tang. } \theta = \frac{X}{Y} \qquad \text{y}$$

$$D = X \text{ sen. } \theta = Y \text{ cos. } \theta \text{ ó bien } D = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Con esto queda comprobado cuanto dejamos consignado; pues si la *referencia indirecta* ofrece algunas ventajas, tambien el grave inconveniente de exigir muchos cálculos, aunque sencillos, muy molestos, por lo que, como hemos antes dicho, rara vez se utiliza, siendo preferidas la *mixta* ó la *directa*, segun las condiciones del terreno; pero siempre mas la segunda que la primera.

70 — Cuarto caso, en que el terreno objeto del plano consista en una zona de grande longitud y poca anchura, exigiendo muchas estaciones sin ó con puntos de comprobación préviamente determinados.

En los dos casos precedentes se ha podido ya observar cuanta mayor trascendencia tienen los errores que se cometen en la referencia de las estaciones, que en la de cada una de estas los de los puntos desde ellas determinados, porque los segundos solo afectan á la situación de los puntos mismos, en cuya determinación se cometieron, mientras que los primeros hacen errónea la situación de todos los puntos vistos desde la estación mal determinada y los siguientes.

Esto implica la necesidad de hacer la referencia de las estaciones con todo cuidado para conseguir la mayor precisión y seguridad posibles, haciendo al efecto las combinaciones necesarias para tener frecuentes y seguras comprobaciones, que descubran las equivocaciones y nos permitan conocer la calidad é importancia de los errores, dándonos medios seguros para corregirlos mediante una racional distribución.

La poligonal formada por la unión sucesiva de las estaciones necesarias en el caso de que se trata, se denomina, con razón, *base de operaciones*, porque á ella se ajustan y de ella dependen principalmente las buenas ó malas condiciones de situación de todos los puntos característicos del terreno, y por esto el *sistema poligonal ó de recorrimiento* forma parte muy esencial de los procedimientos de la Topografía moderna.

Pero esta no se concreta, como antes se hacía, á conseguirlas gráficamente con algunas comprobaciones gráficas tambien por intersecciones á ciertos puntos, sino que, calculando sencillamente las coordenadas ortogonales de sus vértices y haciendo combinaciones oportunas, no solo evita la complicación de los errores del graficismo, sino que aisla y localiza los inevitables cometidos en los ángulos y las distancias, corrigiéndolos racionalmente para aproximarse á la verdad matemática tanto como pueda desearse en cada caso.

Para dar á conocer este sencillo y excelente procedimiento, supongamos *en primer lugar* que se trate de levantar el plano de una zona en que no existan puntos previa y exactamente determinados, á los que se pueda referir la *base de operaciones*, como frecuentemente ocurre en el estudio de proyectos de pequeñas vías de comunicación, canales y deslindes parciales de montes y términos municipales y otros semejantes.

Si suponemos que la longitud de la zona alcance, v. gr., á 5 kilómetros, y que para conseguir la precisión deseable hayamos de colocar las estaciones á lo mas á 150 metros para hacer la *referencia directa* y á 250 metros para la *mixta*, según dejamos explicado en los núms. 68 y 69, serán necesarias por lo menos de 20 á 30 estaciones, y se comprende sin dificultad que por mucho que sea el cuidado con que se hagan las observaciones, los pequeños errores resíduos en los ángulos y las distancias, si bien podrán compensarse fortuítamente, tambien acumularse y combinarse de manera que desde la estación sexta los errores fueran cada vez mas notables, y si las condiciones del terreno obligaran á hacer alguna ó algunas estaciones á cortísima distancia, como no pocas veces sucede, la consiguiente desorientación daría lugar á errores muy considerables, como se deduce de lo que sobre el particular dejamos expuesto en el número 65, 2.ª consideración.

Pero todo esto y la inconvenientísima combinación de los errores en los ángulos y en las distancias, se evita con el siguiente procedimiento, que, como verémos en los trabajos de campo, ha producido ya excelentísimos resultados.

Al reconocer el terreno se eligen y señalan provisionalmente con banderolas ó jalones algunos puntos que, hallándose, en cuanto sea posible, en la parte media ó axial de la zona, reunan buenas condiciones para servir de estaciones; que sea cada uno fácilmente visible del anterior y siguiente, y que disten entre sí lo mas posible dentro de los límites propios, para que uno á otro pueda referirse mediante 3 ó 4 ó á lo sumo 5 estaciones intermedias determinables con observación completa; esto es, en el caso ahora supuesto, distantes entre sí de 500

á 1 000 metros próximamente, quedando por consiguiente dividida la zona en secciones, cuyo número podría variar de 5 á 10.

Es consiguiente que si por utilizarse el ángulo diastimométrico de un centímetro por metro y permitirlo las condiciones del terreno pudieran colocarse las estaciones á la distancia de 300 á 500 metros, los puntos aludidos podrían fijarse á la de 1000 á 2000 metros, porque *la condición que debe servir de norma para la elección de estos puntos, es que entre ellos no haya de haber mas de 3 á 5 estaciones, al objeto de evitar en lo posible las funestas compensaciones fortuítas*, que, cuando son aquellas muchas, ocurren con frecuencia, engañando al operador.

Estos puntos, como ya digimos en el número 56 del volúmen I, se designan en los cróquis y registros con números romanos rojos y constituyen los vértices de la *poligonal base de comprobación*, y como son utilísimos para la reposición de las demas estaciones y para el replanteo de los proyectos que se hagan sobre el plano, despues se marcan con hitos ó fuertes estacas, como tambien se dijo en el citado número.

Cuando conviniere estudiar una variante, se establece para ello otra base de comprobación especial de análogas condiciones y relacionada con la general, de suerte que con parte de esta forme un polígono cerrado.

Es muy conveniente para operar despues sin vacilaciones, repetir el reconocimiento del terreno para fijar y marcar definitivamente los vértices de la base ó bases de comprobación y aun los de todas las estaciones intermedias con sus referencias á puntos próximos y estables, y asimismo tomar nota de los interiores ó exteriores de la zona, que hayan de situarse por intersección, indicando las estaciones desde donde deberán observarse, con el objeto unas veces de ilustrar el plano con ellos, y otras de utilizarlos como comprobación geométrica ó analíticamente; pues no es difícil muchas veces conseguir de esta manera una red triangular muy interesante y económica: el cróquis general, que se haga en el primer reconocimiento, se rectificará y completará en el segundo, fijando especialmente la situación de los vértices de las bases y los puntos que convenga determinar por intersección, prescindiendo de detalles que los complicaría inútilmente y que solo conviene y pueden hacerse constar en los *cróquis especiales de cada estación* ó sección, lo que se hace sencilla y muy exactamente con los *circulares*, que daremos á conocer al ocuparnos de los trabajos de campo; de manera que en tales cróquis solo deben constar los vértices de las bases de operaciones y comprobación con sus referencias especiales, los puntos principales que desde sus vértices se han de fijar por intersección, la red triangular que con esta combinación se pueda conseguir en determinados casos y los accidentes mas notables, que den idea general de las condiciones del terreno.

Puede suceder que el Topógrafo encargado del trabajo haya de realizarle con una sola brigada por él dirigida ó que disponga de otras detallistas; como la poca importancia del plano supuesto no exige mucho tiempo y personal, supondrémos lo primero, que será lo mas frecuente y tambien en tales casos lo mas económico, porque determinándose simultáneamente las bases de operación, de comprobación y los detalles, como sin confusión puede hacerse con nuestros *registros generales de campo*, y la designación de los distintos puntos, según digimos en el número 56 del volúmen I, se evita la repetición de las puestas en estación del aparato, que se hace indispensable cuando la brigada del director solo se ocupa de la base de comprobación; sin embargo, esta economía queda muy ampliamente compensada con las ventajas de la división del trabajo en los planos de terrenos muy extensos y complicados, en que pueden y deben operar simultáneamente varias brigadas detallistas, que han de ser dirigidas y vigiladas por el encargado principal del trabajo.

Esto consignado para evitar equivocadas apreciaciones y realizado el señalamiento definitivo de los vértices de las bases, se procederá, en el caso supuesto, de la manera siguiente.

Colocado el aparato bien corregido, nivelado y centrado en el vértice I (figura 85), se mide y anota la altura á que sobre el suelo se halla el eje de muñones y se orienta en la forma descrita en el número 67, pero para conseguir esto último con toda seguridad, se repetirá la observación, invirtiendo el anteojo para afinar la orientación, comprobándolo otra

vez con la nueva inversión del anteojo para hacerle tomar la primera posición; de las pequeñas diferencias que resultaren en las graduaciones señaladas por el cero de los nónius A y B en sus distintas posiciones relativamente á las de 0ᶜ y 200ᶜ del limbo, que respectivamente deben señalar en la primera y tercera posición y la inversa en la segunda, se tomará nota para tenerlas en cuenta, sino mereciera la corrección inmediata del aparato por exceder del duplo de la apreciación real del mismo.

Despues, bien asegurado el tornillo del movimiento general y suelto el de presión que une los dos platillos, se hará girar la alidada ó parte superior hasta que la cruz filar coincida con el eje de una esfera de un decímetro de diámetro, que se habrá fijado á altura determinada de la banderola clavada en el punto II, y así sujeta la alidada, se leerá y anotará el azimut señalado por el nónius A y comprobado por el B; invirtiendo el anteojo y haciéndolos coincidir exacta y respectivamente con las graduaciones que señalaban en tal posición mirando la banderola que marca la dirección de la meridiana, se vé si con ella coincide, y en caso necesario,

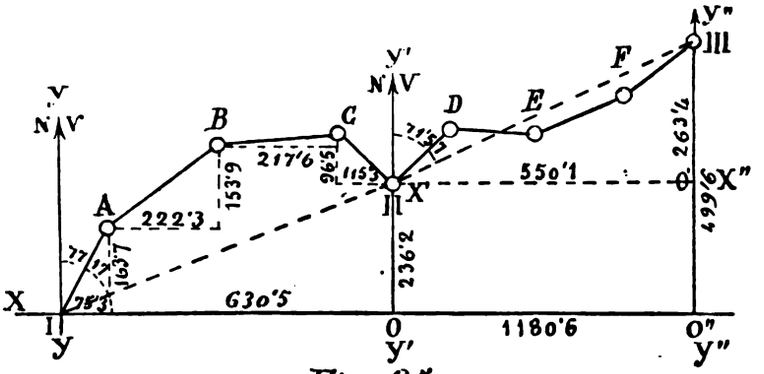


Fig. 85.

si es pequeña la diferencia, se afina la coincidencia, y si es intolerable, indicando que fué errónea la observación anterior, se repite esta, y despues se hace girar la alidada hasta que la cruz filar coincida con la banderola puesta en II, con lo cual se tendría un nuevo valor del azimut de I-II con comprobación directa; finalmente, invirtiendo de nuevo el anteojo, se hace análoga observación con las mismas precauciones sobre las dos banderolas antedichas, terminando la observación; por cuyo medio se consiguen tres valores del azimut I-II con el nónius A y otros tres con el B, cuyo término medio general nos dará el valor del verdadero con mayor precisión que la real del aparato y con toda seguridad.

Aunque en la descripción precedente nada hemos dicho relativamente á los ángulos zenitales, se comprende que en cada visual dirigida á la banderola colocada en el vértice II se leerán y anotarán las graduaciones señaladas por los nónius I y II consiguiéndose seis valores, cuya media nos dará el de z' con mucha precisión y con ella deducirémos el de z de I - II, puesto que directamente se miden en cada caso los de i y m; precisamente para que en todas las inclinaciones sirva el mismo punto de la banderola y se vea á grandes distancias utilizamos la esferita unida á ella, ya que en todas aquellas aparecerán perpendicularmente á la visual círculos iguales, cuyo centro será el de la esfera y siempre es fácil hacer coincidir con él la cruz filar.

Hemos extremado las precauciones para que puedan utilizarse en caso necesario, lo cual no implica mucha pérdida de tiempo: pero ordinariamente, estando bien corregido el aparato, ni siquiera una inversión del anteojo se hace contentándose con la apreciación inmediata del nónius A y comprobación con el nónius B ó la media de ellos resultante; pero, como tiene mucha trascendencia la exacta medición de estos azimutes, aconsejamos que se utilicen las observaciones con dos inversiones del anteojo y la comparación de lo que señale cada nónius en las mismas posiciones mirando á cada banderola y no las medias de los dos, que hacen variar

algo las azimutes respectivos en algunos casos: la comparación de las medias de los tres valores de cada uno darán idea exacta del estado de corrección del aparato y de la precisión con que queda medido el azimut, cuyo valor será la media general reduciendo naturalmente todos los ángulos inversos á directos mediante la sustracción ó adición de 200^c.

Así realizada la observación incompleta del lado respectivo de la base de comprobación, sin tocar el aparato de la estación I, se determina por referencia directa ó mixta la estación inmediata *A* con la mayor precisión posible y siempre con uno ó dos puntos intermedios de comprobación, aunque se utilice la referencia directa y despues se determinan como queda explicado en el número 67 todos los puntos característicos que se encuentran alrededor del vértice I y se miden los azimutes de los puntos señalados para serlo por intersecciones, con lo cual queda terminada la operación en la primera estación.

Trasladado el aparato á la inmediata *A* se centra y nivela con cuidado, se mide la altura, i, del eje de muñones; mediante el limbo se orienta con referencia á la anterior, midiéndose la distancia A-I por el procedimiento de referencia directa ó mixta; se hace observación completa sobre los puntos intermedios elegidos, aun con la primera, para tener siempre comprobaciones; si procediere se hace observación incompleta sobre los puntos elegidos para ser intersectados y despues se determinan por observación completa la estación inmediata, *B*, y todos los puntos característicos que se hallaren en buenas condiciones alrededor de la estación *A*, cuidando al determinar la siguiente, *B*, de medir el azimut con los dos nónius y de elegir uno ó dos puntos intermedios para comprobación, aunque se utilice la referencia directa y á medida que todo esto se hace se completa el cróquis del terreno de la estación, con lo cual queda en ella terminada la operación que le es propia.

Trasladado el aparato sucesivamente á las estaciones *B* y *C* en ellas se opera en la misma forma explicada para la *A* y suponiendo que desde *C* se vea en buenas condiciones la estación II, desde aquella se determina como cualquiera otra estación.

Colocado en ella el aparato centrado y nivelado, se mide como siempre la altura, i, del eje de muñones y se orienta con relación al azimut *C*-II; inmediatamente se dirige la visual á la banderola que se habrá colocado en el vértice I en cuanto en él terminó la operación y *es evidente que si el azimut II-I es igual al inverso de I-II quedará demostrado que en las estaciones intermedias se conservó bien la orientación y por consiguiente no habiendo habido error en los ángulos, si alguno se ha cometido, lo habrá sido en las distancias.*

Para comprobar esto se procede de la manera siguiente:

Supongamos que los rumbos y distancias medidos son los que aparecen en las casillas segunda y tercera del estado que ponemos á continuación, excepto la distancia consignada para I — II, que por ser deducida se escribe con tinta diferente, azul v. gr., dejando la roja para las correcciones.

De las coordenadas polares se deducen las ortogonales de estación á estación y, como ya sabemos y de la figura resulta claramente, las del vértice II relativamente al I serán las sumas de aquellas, esto es, X = 630'5; Y = 236'2.

Direcciones	Azimutes	Distancias	COORDENADAS CALCULADAS			
			x		y	
	θ	D	+	−	+	−
I — II	77'17	673'3				
I — A	27'45	180'2	75'3	»	163'7	»
A — B	61'45	270'4	222'3	»	153'9	»
B — C	95'60	218'1	217'6	»	15'1	»
C — II	144'37	150'4	115'3	»	»	96'5
Sumas parciales			630'5	»	332'7	96'5
			»	»	96'5	»
Sumas finales			630'5	»	236'2	

Ahora bien: si las coordenadas de II relativamente á I, así deducidas, son exactas, no habrá habido tampoco error en las distancias y en tal supuesto el valor de θ de I-II deducido de aquellas debe ser igual el medido directamente.

Así en efecto sucede *comprobando toda la operación,* porque:

$$\text{Cot. } \theta = \frac{y}{x} = \frac{236'2}{630'5} = 0'3746 = \text{cot. } 77'18^c \text{ (1)}$$

que sensiblemente coincide con el azimut medido directamente.

En este caso se deduce la distancia I-II por una de las fórmulas

$$\text{D de I-II} = \frac{x}{\text{sen. } \theta} = \frac{630'5}{0'93644} = 673'3$$

ó

$$D = \frac{y}{\cos. \theta} = \frac{236'2}{0'35083} = 673'3 \text{ metros}$$

que se anota en el estado como queda dicho, y con ello se tienen perfectamente comprobadas las coordenadas polares y ortogonales planimétricas del vértice II con relación al I y así mismo las de las estaciones intermedias.

Con el valor de D de I-II y el ángulo zenital medido desde I y comprobado desde II y las alturas del instrumento y del punto observado en cada banderola en ellas colocadas, se calcula la diferencia de altura, z, que, corregida del nivel aparente y de la refracción del aire (número 50 del volúmen I), debe coincidir sensiblemente con la suma de las alturas parciales entre las estaciones, dando una nueva comprobación de todo el trabajo y especialmente de las distancias, porque de ellas depende principalmente, si se cuida de medir con cuidado los ángulos zenitales.

Pero supongamos ahora que el valor de θ de I-II así deducido difiera bastante del medido directamente, indicando la existencia de errores en las distancias.

Lo primero que se ha de hacer en tales casos es comprobar los cálculos utilizados para determinar las coordenadas ortogonales parciales y sus signos, pues muchas veces depende aquello de equivocaciones ocurridas en estos.

Si resultaran tales cálculos exactos, se comprueban las distancias entre las estaciones mediante los puntos intermedios observados al efecto, y es indudable que de esta manera se descubrirán las equivocaciones ó errores notables que se hubieran padecido quedando los pequeños inevitables, que siendo tan pocas las estaciones intermedias y tan reducidos estos errores en la media de las dos ó cuatro mediciones de cada distancia, no pueden tener mucha influencia en las coordenadas del vértice II, y para corregir los de estas bastará aumentar ó disminuir las distancias por tanteos, calcular las coordenadas correspondientes y deducir el valor de θ hasta que este coincida con el obtenido directamente.

Estos tanteos deben realizarse ordenadamente para no aumentar los verdaderos errores cometidos en la medición de las distancias y al efecto se probará primero el resultado que se obtiene aumentando cada una un decímetro por cada 100 metros aproximadamente, luego disminuyendo igual cantidad se comparan los resultados y se elige el que mas se aproxime al valor de θ medido directamente.

Si la diferencia fuera aun intolerable, en el caso de que no se exigiera en el plano grande precisión, se podrán repetir las pruebas aumentando y disminuyendo dos decímetros por cada 100 metros; pero si ni aun así se consiguiera el objeto, lo que rarísima vez sucederá si se procedió con las precauciones aconsejadas, se repetirán las observaciones de estación á estación

(1) En este caso se obtiene directamente el valor de θ; pero esto no se conseguiría si no apelando á los medios explicados en los números 8 del volúmen I y 64 del presente si el vértice II se encontrara en distinto cuadrante y no deben olvidar esto los principiantes.

hasta encontrar la equivocación ó la causa del error: lo cual, si es algo molesto, no tanto como á primera vista parece, porque son pocas las estaciones y fácil averiguar en cual de ellas pudo cometerse el error.

Si al observar el azimut II-I, despues de orientar con relación á la estación C, se encontrara una diferencia tolerable comparándole con el inverso de I-II, se distribuiría por partes iguales entre los de las estaciones intermedias; se calcularían con estos azimutes modificados las coordenadas ortogonales de estación á estación y con las resultantes para II se haría la comprobación de las distancias como en el caso anterior, que si resultaran aceptables nos permitiría dar por terminado el levantamiento del plano de la primera sección, *pero la orientación de la siguiente no sería la correspondiente á C-II, si no la de II-I inversa de I-II*, á cuyo efecto se corregiría antes de medir el azimut II-III y de esta manera los errores en los ángulos se localizan y reparten en cada sección evitando las fatales consecuencias de los lados cortos y de los errores en la orientación de los lados de la poligonal, base de operaciones, sustituyéndola por la de comprobación de grandes lados con los ángulos medidos con la precisión de las medianas triangulaciones topográficas y calculadas las distancias con toda seguridad y mas que suficiente precisión; pues que se anula ó al menos disminuye mucho la posible acumulación de los errores inevitables y las funestas compensaciones fortuítas.

Si la diferencia entre el azimut de II-I medido con la orientación de II-C y el inverso de I-II fuera notable, demostraría la existencia de equivocaciones ó errores intolerables en la orientación del aparato en las estaciones intermedias y se deben buscar desde luego examinando con cuidado el registro de campo y el cróquis; si así no se encuentran, debe fijarse la atención en los lados cortos, porque, como digimos en el número 65, segunda consideración, en ellos se pueden cometer grandes errores de orientación con pequeños de puntería ó descentración del aparato; por consiguiente, si se tiene seguridad de haber orientado el aparato con cuidado en todas las estaciones, es casi indudable que el error procede de la desorientación del pequeño lado, si este existiere, y bastará corregirle en él y variar consiguientemente las orientaciones sucesivas.

Si, por ejemplo, ha habido necesidad de admitir entre dos estaciones una distancia de 20 metros y resulta en II la desorientación de 10 centígrados, es muy probable que en su mayor parte sea debida á descentración y mala puntería de aquel lado, porque basta que estas sean de 15 milímetros en distinto sentido, ó sea en total 3 centímetros, para producir aquella desorientación: por consiguiente, si se tiene seguridad de haber orientado con cuidado en todas las estaciones, casi siempre bastará para corregir el error final modificar aquella orientación y consiguientemente las sucesivas; pero, como esta corrección no es segura, se comprobará al mismo tiempo que las distancias calculando las coordenadas de las estaciones con estos azimutes modificados y con las deducidas para II relativamente á I por medio de la fórmula

$$\text{Tang. } \theta = \frac{x}{y} \text{ ó Cot. } \theta = \frac{y}{x}$$

Si este valor de θ coincide sensiblemente con el medido desde I puede admitirse la corrección; en otro caso la diferencia de orientación se distribuye por partes iguales entre las estaciones intermedias, si es tolerable, y sino se vuelven á medir los ángulos tomando en el ó los lados muy cortos todas las precauciones oportunas para que la centración y puntería sean lo mas exactas posible.

Aunque procediendo con el debido cuidado casi nunca dejarán de comprobarse los ángulos y las distancias, hemos creído oportuno suponer que no suceda esto para indicar lo que en tales casos se debe hacer y los medios de comprobación que ofrece este procedimiento, que por esto designamos con el nombre de *poligonación con comprobaciones sucesivas*.

La comprobación de los azimutes por el inverso de I-II se hace directamente en el campo sin pérdida de tiempo ni interrupción de los trabajos; las demas antes consignadas, como quiera que exigen varios cálculos, que aunque sencillos interrumpen la marcha de la operación,

pueden hacerse en el campo ó dejarlos para el gabinete y como cuando solo existe la brigada del director, que es el caso de que ahora nos ocupamos, motivarían la paralización de los trabajos, lo mejor es aplazarlos para hacerlos en casa á no ser que la diferencia entre el azimut de II-I determinado con la orientación de II-C y el inverso de I-II sea intolerable, pues en este caso debe desde luego buscarse la causa que la motiva para en caso necesario repetir la medición de los ángulos ó la de estos y las distancias de la base de operaciones y, en caso necesario, las de algunos puntos característicos principales para mayor seguridad.

Terminados los trabajos de la primera sección, estando el aparato colocado en el vértice II se orienta mediante las diferentes medidas del azimut observado desde I enteramente lo mismo que en este se hizo con referencia á la banderola que señalaba la meridiana con la sola diferencia de observar en las tres posiciones del anteojo los ángulos zenitales y en la misma forma que se determinó el azimut y zenital de I-II se mide el de II-III, y sucesivamente la estación siguiente, D, los puntos de intersección y los característicos alrededor de II, continuándose despues la operación en D y demas estaciones intermedias entre II y III y haciéndose las comprobaciones lo mismo que se hizo en II para las estaciones de la primera sección.

Las sucesivas se determinan enteramente lo mismo que la primera; pero si se cree conveniente estudiar una variante á partir, v. gr., desde el vértice IV, al determinar desde este el V de la base de comprobación general, se mide el azimut del IV^{a}, primero de la especial de la variante cuidando de determinar tambien desde aquel vértice la primera estación, A', de la variante con las mismas precauciones que desde I se determinó la estación A.

Continúase despues el trabajo por las bases de comprobación y de operaciones principales hasta el vértice v. gr., VIII, en que se supone terminará la de la variante y al estacionar en este vértice se determina el último, IVe, v. gr., de la correspondiente base de comprobación y la última estación, F', v. gr., de la propia de operaciones, siguiendo despues hasta el fin de la zona de estudio, en cuyo caso se realiza el de la variante, que por formar polígono cerrado con las bases de comprobación de IV á VIII y la correspondiente de operaciones, ofrece las comprobaciones consiguientes y que expondrémos mas adelante.

Debe tenerse presente que si desde una cualquiera de las estaciones se vé otra lejana, conviene medir con toda precisión el azimut de la recta que las une, porque con él se comprobarán los de las estaciones intermedias y sus distancias respectivas en la misma forma que se deja dicho relativamente á los de la base de comprobación, por lo que, en cuanto el terreno lo permita, deben elegirse los vértices de esta de manera que no solo se vean el anterior y siguiente, si no los mas lejanos para aumentar las comprobaciones del conjunto.

Hasta ahora hemos supuesto que una sola brigada realizara todo el trabajo; *veamos como este se distribuiría cuando la del director se ocupara solo de la base y puntos de comprobación y otra detallista de todos los demas.*

En cuanto la primera haya medido el azimut I-II con las precauciones antedichas y los correspondientes á los puntos que hayan de determinarse por intersección ó á lejanas estaciones cuyos azimutes servirán de comprobación en la misma forma que los vértices de la base de este nombre, quita de allí el aparato para trasladarle á la II y en ella hacer análogas observaciones sobre la III y demas puntos que hayan de servir de una ú otra manera para comprobación y como sus observaciones incompletas no exigen mucho tiempo, aunque se hagan con todas las precauciones recomendadas, es indudable que podrá hacer 5 ó 6 estaciones en el tiempo que la detallista termina sus trabajos en las tres primeras de la sección I-II y por consiguiente puede acudir á ella, tomar los datos de la base de operaciones y preparar los cálculos, para que, cuando la segunda llegue á colocarse en la estación II, puedan realizarse en poco tiempo todas las comprobaciones antes indicadas.

En cuanto la brigada del director levanta su aparato de la estación I, la detallista coloca el suyo bien centrado y nivelado, mide la altura del eje de muñones, orienta el diámetro 0^{c}-200^{c} del limbo azimutal con la meridiana observando los dos nónius, A y B, pero sin inversión del anteojo; mide y anota el azimut I-II con las mismas condiciones y despues de hacer la obser-

vación completa sobre la estación A por referencia directa ó mixta y siempre con dos puntos intermedios, determina los característicos y hace el cróquis detallado de la estación I, quitando su aparato y colocando en ella una banderola con esfera fija á altura determinada (1) para que desde II pueda observarla el director del trabajo, que, como tendrá tiempo sobrado, puede detallar sus instrucciones sobre la manera como, según las condiciones del terreno, ha de proceder el encargado de la brigada detallista en la sección I-II.

Trasladado el aparato de esta á la estación A y orientado con el inverso de I-A, medirá esta distancia, situará la B y todos los puntos característicos que rodean aquella y lo mismo hará en las estaciones sucesivas hasta que en la II se haga la comprobación de los ángulos en la forma antedicha en presencia del director del trabajo, que completando los cálculos con los datos de C-II y II-C hará todas las demas comprobaciones y determinación de las distancias y coordenadas ortogonales de I-II sin interrumpir los trabajos de la brigada detallista, que entretanto realizará todos los correspondientes á la estación II despues de haber rectificado, en caso necesario, la orientación de C-II con el inverso de I-II.

En la misma forma se realizarán los trabajos en todas las demas secciones, haya ó no variante, hasta llegar al fin; pero como, según el supuesto, no hay en la zona puntos previa y exactamente determinados, que sirvan para comprobar los resultados, conviene extremar las precauciones indicadas para tener especiales comprobaciones y á tal objeto medir desde las estaciones los azimutes de todas las que desde cada una se vieren, lo cual no dá apenas mas trabajo que el de marcarlas con banderolas.

En casos como el de que ahora tratamos, siempre que el terreno lo permita, conviene formar la red triangular, que hemos antes indicado, visando cada uno de sus vértices desde el mayor número posible de estaciones, por de contado en buenas condiciones, porque sirven para comprobar su situación y á este efecto no han de estar muy lejanos de la base de operaciones,

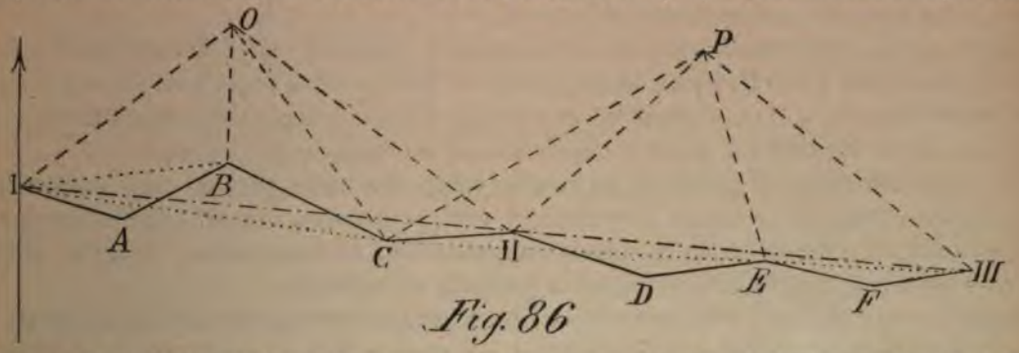


Fig. 86

para que ciertos lados de los triángulos no resulten muy grandes y ademas sea fácil á la brigada del director medir los terceros ángulos haciendo estación en tales puntos.

Para que pueda utilizarse este medio cuando conviniere, creemos oportuno indicar su solución analítica, porque la gráfica, bien conocida, no debe inspirar mucha confianza.

Sean (figura 86):

I-A-B-C-II-D-E-F-III... la base de operaciones;

I-II-III... » » » comprobación;

O un punto visto desde I, B, C y II;

P otro » » » C, II, E y III;

Supongamos que desde I no se vean B y C y desde II el E y finalmente que se hayan medido los azimutes de O B, O C y O II, orientando en O con el inverso de I O y los de P C, P E y

(1) Esta esfera, como ya hemos antes dicho, debe tener un decímetro de diámetro y estar pintada de rojo una mitad y de blanco la otra para que se vea á largas distancias; taladrada en el sentido de un diámetro para que entre la banderola con holgura y haciendo un pequeño taladro perpendicular al otro y agujeros á distintas alturas en la banderola, á ella se sujeta con un pasador á la que se crea mas conveniente en cada caso.

Puede ser de madera ligera ó de otra materia cualquiera que resista la influencia del sol y de la lluvia.

P-III orientando en P con el inverso de II-P; desde luego estos azimutes comparados con sus inversos nos darán una comprobación de la orientación del aparato en las estaciones correspondientes, porque es evidente que si el azimut O C, v. gr., coincide con el inverso de C O, esto justifica que en C se conservaba bien la orientación de I y así de los demas y tambien queda así comprobada su verdadera situación; pero vamos á ver como esto se corrobora con la resolución de los triángulos formados por la unión de cada dos de las estaciones utilizadas y las visuales desde ellas dirigidas.

En el triángulo I B O, aunque desde I no se vea B, como de las coordenadas polares medidas se deducen las ortogonales de B relativamente á A y por consiguiente á I, por las conocidas fórmulas

$$\text{Tang. } \theta = \frac{x}{y} \text{ ó cot. } \theta = \frac{y}{x}$$

y

$$D = \frac{x}{\text{sen. } \theta} = \frac{y}{\cos. \theta}$$

se deducirá fácilmente el azimut de I B y la magnitud de este lado y del primero y el de I O el valor del ángulo O I B; el I O B de la diferencia de los azimutes O I y O B y el O B I de la de los de B O y B I, se conocerán por consiguiente los tres ángulos y un lado y se podrá calcular el valor de los otros dos I O y O B con bastante precisión, porque los pequeños errores cometidos en la medición de I A y A B no es probable que se hayan acumulado; ademas, esto y las equivocaciones que se hubieran podido cometer, se descubrirán resolviendo el triángulo B O C, en que se hallará el valor de sus tres ángulos por la diferencia de los azimutes de sus lados, uno de estos B C, se conoce por medición directa, y el O B por la resolución del triángulo anterior y deduciéndole por la del segundo se tendrán dos valores, que comprobarán los datos del precedente y en su consecuencia las coordenadas de A, B y C.

Lo mismo se puede hacer mediante los dos valores deducidos para O C de la resolución de los triángulos B O C y C O II, y finalmente, con la del I O II, en que conociéndose los tres ángulos y los dos lados I O y II O, se deducirá el valor de I-II con repetición comprobando la situación de II con relación á I, y por consiguiente sus coordenadas ortogonales.

Se vé por esto con toda evidencia las muchas comprobaciones que, en caso necesario, se pueden tener utilizando el medio propuesto, y aunque no sean ordinariamente necesarias, porque bastan las conseguidas en la base de comprobación, no estará demas poderlas utilizar para resolver dudas, siendo fácil conseguir la indicada triangulación.

Parécenos que en vista de lo expuesto no puede quedar duda de que, *aunque no existan en la zona puntos previa y exactamente determinados*, por el procedimiento explicado se puede tener la seguridad de no cometer errores apreciables é intolerables en el levantamiento del plano de un terreno de las supuestas condiciones.

En el caso de que tales puntos existieren, comprendiéndolos como vértices de la base de operaciones ó de la de comprobación ó refiriéndolos exactamente á ellas, la comprobación que suministren y la diferencia que se encontrare entre sus coordenadas antes calculadas y las deducidas por la poligonación realizada, nos permitiría repartirlas muy racionalmente, haciéndolo primero entre las estaciones de la base de comprobación proporcionalmente á su magnitud, y las de estas entre las intermedias de la base de operaciones, lo cual rara vez será necesario, porque procediendo como dejamos explicado, los errores finales serán completamente despreciables.

71 — Quinto caso, en que el terreno siendo de considerable extensión en todos sentidos, no alcance la que exige una especial triangulación.

Sin pecar de exagerados en ningun sentido, podemos afirmar que para conseguir con regular precisión y seguridad el plano de un terreno de 1000 hectáreas con los antiguos procedimientos, aunque se utilicen numerosas trasversales é intersecciones gráficas, ya sería necesario

realizar una especial triangulación, porque si bien tales medios indican algunas veces la importancia y lugar de las equivocaciones y notables errores, no pocas con los propios de ellos y las funestas compensaciones fortuítas, á que tanto se prestan los procedimientos gráficos, engañan y confunden al operador, por lo que este necesita las comprobaciones mas seguras que le suministren los vértices de una triangulación.

No sucede lo mismo utilizando el *procedimiento numérico de poligonación con comprobaciones sucesivas*, de que nos venimos ocupando; porque cubriéndose por su medio el terreno, cuando estorbos especiales no lo impiden, con una red poligonal densísima, constantemente comprobada y rectificada en sus diferentes mallas, satisface muy cumplidamente el objeto de las triangulaciones topográficas ordinarias al par que relaciona entre sí con seguridad y la precisión deseable todos los puntos característicos del terreno; de manera que procediendo con las precauciones en el número anterior aconsejadas y en tanto los estorbos del terreno no lo impidan, podría decirse que, hasta para planos de 8 ó 10.000 hectáreas, no sería necesaria una triangulación especial; pero si tales estorbos existieran, no permitiendo formar fácilmente las bases de comprobación en sencillos polígonos cerrados, ya sería necesaria la triangulación especial en extensiones mucho menores, cuyo límite, en condiciones medias, no bajaría de 2 á 3000 hectáreas, como fácilmente se deducirá de la consideraciones que vamos á exponer.

Para hacerlo con mas facilidad supongamos que se trate de levantar el plano de un terreno en forma de cuadrado de 10 kilómetros de lado ó de 10.000 hectáreas, en que los estorbos y accidentes naturales no impidan establecer las bases de operaciones y comprobación de la manera que se crea conveniente y que el personal encargado de la operación esté distribuido en tres brigadas: la del director destinada á la dirección y comprobaciones y dos detallistas.

El *ideal del procedimiento* está indicado en la figura 87, en que aparece subdividido el te-

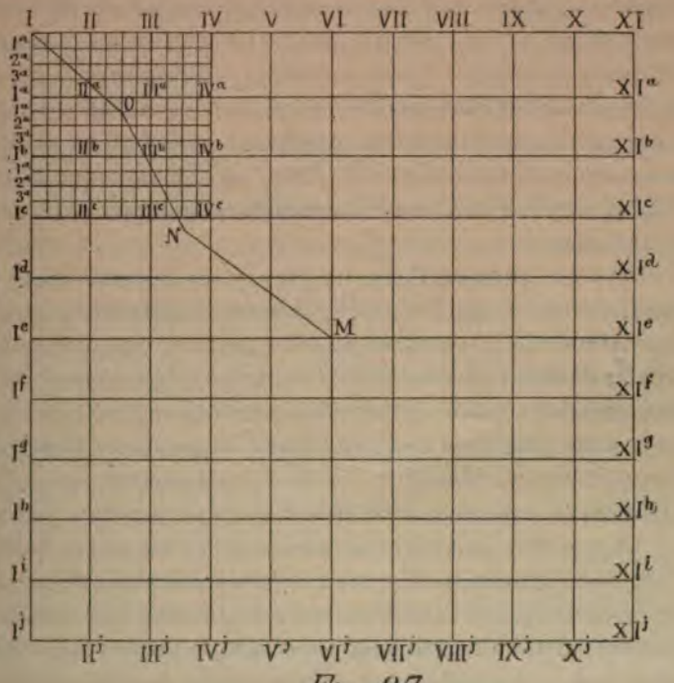


Fig. 87.

rreno en 100 cuadrados de 100 hectáreas cada uno mediante las bases de comprobación, cuyos vértices sucesivos distan entre sí 1000 metros y los de cada una son visibles de los correspondientes de la anterior y siguiente en ambos sentidos; á estos *cuadrados* los llamarémos *polígonos de comprobación*.

Como se indica en los nueve primeros de la figura, cada dos estaciones inmediatas de comprobación, I, II... están referidas mediante tres intermedias, y desde cada una de las com-

prendidas entre I y I^a; I^a y I^b, etc., parten bases de operaciones, que, aunque no directamente, se comprueban en los lados II-II^a, III-III^a, IV-IV^a, etc., de los cuadrados de comprobación; de manera que suponiendo que desde cada una de estas estaciones se pueda hacer observación completa directamente ó mediante los puntos intermedios relativamente á las próximas en todos sentidos, cada cuadrado de comprobación quedaría dividido en 16 de 6'25 hectáreas cada uno, y como forman polígonos cerrados, considerándolos de uno en uno, de dos en dos, etcétera, y su conjunto en el cuadrado de comprobación, se tendrán tantas como se quisieran y seguras, sin necesidad de puntos previamente determinados, porque las coordenadas de todas las estaciones se referirían á las que se supusieran á la primera, pudiéndose corregir los pequeños errores con todas las probabilidades de acierto; como lo indicado para el primer cuadrado de comprobación se puede hacer para cada uno de los demas y agruparlos como mejor parezca formando siempre polígonos cerrados de pocos lados, es indudable que se descubrirán y corregirán localmente todos los errores dando completa seguridad al trabajo; tambien se conseguiría todo esto, aunque no con tanta facilidad y seguridad, sino pudiera realizarse el último supuesto de que desde cada estación se vieran las inmediatas en todos sentidos y si solo la anterior y siguiente de la poligonal correspondiente, en cuyo caso cada cuadrado de comprobación quedaría dividido en cuatro rectángulos de 1000 metros de base por 250 de altura y los errores de la primera, que se descubrirían en los lados del cuadrado de comprobación y en el cierre, se podrían repartir racionalmente, con tanto mayor motivo cuanto que siempre será fácil ver alguna estación mas ó menos lejana de otras poligonales, que suministren otras comprobaciones por el sistema utilizado para las bases de este nombre.

Compréndese desde luego que para realizar un trabajo de esta importancia con buen éxito y sin funestas confusiones, se ha de proceder con mucho órden en la designación de las estaciones, en su señalamiento y determinación; véase el que nos parece mas oportuno.

Practicado el reconocimiento general del terreno por el director acompañado de los jefes de las brigadas detallistas, de buenos guías prácticos y de algunos de los peones portamiras, para realizar el definitivo con señalamiento de las estaciones de las bases de comprobación, que se ha de hacer por partes, se reunirán en el vértice I, marchando unidos de I á I^a y de este á I^b, marcando las estaciones intermedias 1.ª, 2.ª y 3.ª al objeto de que el director dé sobre el terreno á los jefes de las brigadas detallistas instrucciones bien precisas sobre la manera de elegirlas, marcarlas y referirlas.

Esto hecho, el director se situa en I^a con un guía y un portamira; el jefe de la primera brigada detallista en I, y el de la segunda en I^b, cada uno acompañado por un guía y un portamira, y los tres provistos de las banderolas, jalones y estacas que se han de fijar; las *banderolas* servirán para señalar de una manera visible los vértices de las bases de comprobación; los *jalones*, que pueden consistir en cañas ó varas de un metro aguzadas en un extremo para que se puedan clavar en el suelo y abiertas en el otro para asegurar un papel con la designación correspondiente, para señalar visiblemente las estaciones intermedias, orígen de las bases de operación; las *estacas grandes* para marcar de una manera permanente los vértices de las bases de comprobación, y las *pequeñas* para las otras estaciones en las que se habrá puesto en casa la letra y número correspondiente con moldes claros y tinta permanente; las de los vértices de las bases de comprobación se designarán con los números romanos indicados en la figura, y como el reconocimiento definitivo y marcación se limitará por de pronto á los seis primeros cuadrados, solo se llevarán al campo convenientemente ordenadas las doce primeras estacas de esta clase.

Las de las otras estaciones se designarán todas con las letras mayúsculas, distinguiendo las de la 1.ª base de comprobación con los números I-II... puestos sobre las letras; las de la 2.ª con I^a-II^a..., las de la 3.ª con I^b-II^b..., y así sucesivamente; si despues faltan letras para designar esta clase de estaciones, se repetirán ordenadamente las del alfabeto, pero poniendo encima de ellas VIII-IX..., por ejemplo, si en el vértice VIII se hubieran aquellas concluído.

Las estaciones de las bases de operaciones intermedias se designarán con las mismas letras mayúsculas con los acentos exponenciales ' para las de la 1.ª, " para las de la 2.ª, ''' para las de la 3.ª, poniendo encima I-I^a, I^a-I^b, I^b-I^c... para indicar entre que bases de comprobación se encuentran; siguiendo estas indicaciones no puede haber equivocación en la designación de las estaciones en los registros y cróquis, ni dudas sobre la estación, que indique una estaca del terreno, y para evitarlas tambien al colocarse en ellas los portamiras, conviene que el papel de las cañas ó varas de las estaciones intermedias de las bases de comprobación sea *blanco*; *blanco y rojo* el de las estaciones de la base de operaciones 1.ª, *blanco* y *azul* el de las de la 2.ª y *blanco y negro* el de las de la 3.ª, etc.

Aunque á muchos parezcan nímias é improcedentes estas indicaciones, estamos seguros que los prácticos en complicados trabajos de campo las considerarán muy necesarias para evitar funestísimas equivocaciones.

Despues de dejar clavada una banderola en cada uno de los vértices I, I^a y I^b, marchan las tres brigadas por su respectiva base de comprobación, señalando con los indicados jalones y marcando con las correspondientes estacas las estaciones intermedias hasta que llegan á los vértices de la base de comprobación II, II^a y II^b, fijándose bien en sus condiciones, marcandolos con las estacas correspondientes y refiriéndolos á puntos estables, si es posible, y sino á accidentes notables del terreno en que se clavarán estacas apropiadas haciendo de todo un cróquis detallado.

Los jefes de las brigadas detallistas marchan desde II y II^b á la estación II^a y II^b marcando las intermedias y dan cuenta al director de todo lo hecho, volviendo despues á sus estaciones respectivas II y II^b para continuar la operación en la misma forma hasta la base de comprobación III-III^a-III^b y despues hasta la IV-IV^a-IV^b, en que por de pronto se puede dar por terminado este trabajo preliminar. Molesto es y algun tiempo exige este detallado reconocimiento del terreno y marcación de las estaciones; pero seguramente quedará todo ampliamente compensado con la seguridad y desembarazo con que despues se opera el levantamiento del plano.

Como en los terrenos de la extensión del que ahora consideramos ya es notoria la convergencia de los meridianos de los puntos extremos, segun se deduce de los datos consignados en el número 13 del volúmen I, (página 44), para reducir la desorientación consiguiente, en lugar de orientar el aparato en la estación I con el meridiano que por ella pasa, se hace con el del punto medio del terreno, á cuyo efecto se determina y marca en este y se traslada muy sencillamente á aquel de la manera siguiente:

Sea M, figura 87, el punto elegido para determinar el meridiano medio; hecho esto como dirémos en la *Tercera Parte*, se mide con cuidado el azimut de M N á un punto lejano N; se estaciona en este y orientando con el inverso de M N se mide el azimut de N O y desde O el de O I, con lo cual por medio de su inverso se orientará en I con la meridiana de M; eligiendo los puntos N, M y O en sitios lejanos y elevados, esta trasmisión de la orientación se puede hacer pronto y bien y si se pueden elegir al efecto vértices de uno de los cuadrados de comprobación serán preferibles, porque suministrarán despues medios sencillos para comprobar la orientación de aquellos.

Esto hecho, el director con su brigada hace estación en I midiendo con las precauciones señaladas en el número anterior el azimut de I-II y el de I-I^a; se traslada á I^a y mide con referencia al inverso de I-I^a los de I^a-II^a y I^a-I^b y mientras las brigadas detallistas levantan respectivamente el plano de los cuadrados de comprobación I-II^a y I^a-II^b, el director haciendo sucesivamente estación en II^b, II^a, II, III, III^a, III^b, IV^b, IV^a y IV mide y comprueba todos los azimutes de los seis primeros cuadrados de comprobación y los demas á puntos notables, que convenga determinar por intersección, y tomando los datos de las estaciones intermedias que habrán medido las brigadas detallistas, hace los cálculos de comprobación de las bases de este nombre y con relación á estas por polígonos cerrados las intermedias hasta que terminado el trabajo de cada *cuadrado de comprobación* se corroboran las hechas con la que el conjunto de este permite fácilmente, y despues los dos, los cuatro y los seis terminados.

¿Quien puede poner en duda que procediendo así, con tal que se haga la referencia de las estaciones con cuidado y las precauciones recomendadas, se conseguiría el plano de grandes extensiones sin error sensible?

Ciertamente que en la práctica nunca podrá conseguirse la supuesta regularidad en las bases de operaciones y de comprobación, en la distancia entre las estaciones y la posibilidad de verse desde cada una todas las demas, que la circundan; pero como no es indispensable aquello para que las bases de comprobación cumplan bien su objeto, ni la última condición para que se formen fácilmente gran número de polígonos cerrados de pocos lados bien comprobados y de no mucha extensión, que estén comprendidos en otros mayores y estos en otros hasta llegar á la total del plano, es indudable que, cuando la mucha irregularidad del relieve y los estorbos del terreno no lo impidan, procediendo con órden, con las precauciones aconsejadas y utilizando los medios indicados, se pueden por el procedimiento explicado levantar con mucha precisión y seguridad el plano de terrenos de grande extensión sin necesidad de previas y especiales triangulaciones.

Estas serán necesarias en extensiones menores cuando la irregularidad del relieve y los estorbos del terreno obligaran á situar las estaciones á distancias muy cortas, á intercalar muchas entre los vértices de las bases de comprobación y á formar polígonos de muchos lados, porque con tales condiciones son mas frecuentes las desorientaciones y la acumulación de errores; pero como se pueden utilizar los puntos interiores ó exteriores determinados analíticamente por intersección dando medios supletorios de comprobación, siempre serán con estos procedimientos menos necesarias las triangulaciones propiamente dichas, que con los antiguos.

72 — Sexto caso; finalmente, en que siendo el terreno de muy grande extensión, sea necesaria una previa triangulación ó deba referirse á la general del territorio de que forme parte.

Como se deduce de las consideraciones que en el número anterior dejamos expuestas, la necesidad de una triangulación especial, no depende solo de la extensión del terreno, sino tambien de las condiciones de su relieve y de los estorbos que presente á las necesarias para realizar bien la polígonación con comprobaciones sucesivas, cuyo éxito se funda naturalmente en la exacta medición de los ángulos y las distancias.

Cuando esto no pueda verificarse de una manera completamente satisfactoria, es indudable que los vértices de la triangulación ofrecerán base necesaria para comprobar, dirigir y localizar los errores.

A tales efectos se pueden ordenar los trabajos de dos maneras distintas.

La primera y mas generalmente utilizada por los que desconocen el sistema de comprobaciones sucesivas en la forma sencilla y concluyente, que hemos dado á conocer, consiste en realizar con todo cuidado poligonales de primer órden entre cada dos vértices de la triangulación separándose lo menos posible de la recta que los une y corrigiendo la diferencia resultante de azimut mediante su distribución por partes iguales entre los de la poligonal; en calcular las coordenadas ortogonales de las estaciones intermedias con sus azimutes corregidos y distribuir el error resultante para ellas en su comparación con las del vértice extremo por partes iguales ó proporcionales á la magnitud de los lados; en determinar y corregir en forma análoga las poligonales de segundo órden, que uniendo un vértice de la triangulación á otro de las de primer órden se acerquen á las líneas características principales del terreno y finalmente hacer lo propio con las poligonales de tercer órden relacionando dos vértices de primer órden ó uno de los de estos y otro de los de segundo órden ó dos de estos para acercarse á los límites de los predios y parcelas y demas líneas características del terreno; es decir, que apoyándose en los vértices de la triangulación se subdivide el terreno en polígonos de mayor á menor.

Utilizando el sistema de comprobaciones sucesivas este órden en las operaciones dará buenos resultados; pero no en otro caso, porque el gran número de lados de que se componen or-

dinariamente las poligonales de primer órden sin más comprobación que en su término, facilita la acumulación de los errores y, lo que es peor, las compensaciones fortuítas haciendo que las correcciones no sean racionales, ni los anulen y como sus vértices han de servir de base á las de segundo órden, estas tambien resultarán defectuosas y por la misma razón las de tercer órden y consiguientemente lo será la situación relativa de los puntos y líneas característicos á ellas referidos.

La segunda manera de ordenar los trabajos es la explicada en el número anterior, en que se opera por *sencillos polígonos cerrados de comprobación*, que la encuentran completa en sí mismos, en su acumulación y finalmente en los vértices de la triangulación localizando, comprobando mas y corrigiendo mejor los errores, porque se evita la posibilidad de su acumulación y las funestas compensaciones fortuítas y si bien esto es debido á las ventajas características del sistema de poligonación con comprobaciones sucesivas, es indudable que ni con él se conseguirán tan buenos resultados con la primera que con la segunda manera de ordenar los trabajos, porque con esta se comprueban y localizan mas los errrores y se pueden correjir mejor.

No está esta nuestra opinión enteramente conforme con el principio admitido de que en Topografía se debe proceder de lo grande á lo pequeño y es natural que así sea, porque se exagera sin razón la trascendencia de este principio aun tratándose de triangulaciones, como veremos oportunamente, y es porque no se tienen en cuenta los procedimientos y aparatos con que ahora se realizan las operaciones.

Entre una poligonal de primer órden tal como se aconseja proceder y el cuadrado ó sencillo polígono de comprobación que hemos descrito, si hay alguna diferencia entre sus elementos es favorable á los segundos y su combinación es sin género de duda muchísimo mejor que las de aquellos para comprobar, localizar y corregir los errores, con la circunstancia de que en ultimo término útilizan estos la comprobación única de aquellas.

Esto es indudable cuando el terreno permite formar en las condiciones indicadas los sencillos polígonos de comprobación; pero si esto no sucede y sí que se puedan realizar las poligonales de los tres órdenes expresados multiplicando las de segundo y especialmente las de tercer órden, entonces deberá preferirse la primera manera de organizar los trabajos, pero sin dejar, en cuanto sea posible, de aplicar el sistema de comprobaciones sucesivas.

Finalmente: cuando las condiciones del terreno permitan hacer fácilmente la triangulación minuciosa con lados de 300 metros como las proponían Rabbini y Rozas, será algunas veces oportuno realizarlas y utilizar, como el segundo lo hacía, sus vértices como estaciones, á que en caso necesario se podrán referir las auxiliares que fueren precisas, pues calculando las coordenadas de aquellos se conseguirá con seguridad su situación y consiguientemente el plano topográfico fijando con relación á ellos todos los puntos característicos en la forma indicada para el *primer caso*, número 67.

ARTÍCULO TERCERO

TRABAJOS DE CAMPO

73 — Clasificación.

Para desarrollar la compleja materia de este Artículo ordenadamente, hemos de ocuparnos con separación de los *trabajos preparatorios* y de *los de ejecución del procedimiento*, que en cada caso se considere mas adecuado.

En los primeros hemos de comprender:

1.° *la comprobación y corrección de los aparatos* goniométricos y estadimétricos necesarios;

2.° *la preparación de los medios de señalamiento y marcación de los puntos, de los registros y cróquis;*

3.° y finalmente la *organización de las brigadas é instrucción de los portamiras* y demas peones auxiliares.

En los segundos comprenderémos:

1.° *el reconocimiento general y especial del terreno;*

2.° *el órden y condiciones con que deben realizarse las observaciones, manera de hacerlas y sus tolerancias inmediatas;*

3.° y finalmente las *comprobaciones directas mediante sencillos cálculos*, que pueden y deben hacerse sobre el terreno, y *tolerancias* que han de servir de norma.

Como de muchos de estos puntos nos hemos ocupado en diferentes partes de este libro, para evitar enojosas repeticiones harémos unas veces solo indicaciones con las oportunas referencias y otras detallarémos mas para evitar dudas y presentar reunidas las instrucciones que considerémos oportunas, aunque mas ó menos directamente incurramos en alguna repetición.

74 — Comprobación y corrección de los aparatos goniométricos y estadimétricos necesarios.

El número y condiciones de los aparatos necesarios depende naturalmente de la importancia del trabajo y de las brigadas que le han de realizar; pues cada una ha de tener por lo menos un goniómetro estadimétrico, una ó dos cintas buenas de hilo de 10 ó 20 metros para determinar las referencias de las estaciones y algunos detalles difíciles de precisar por radiación desde ellas y otra de dos metros para medir la altura del instrumento en cada una, sí al efecto no se prefiriera, segun algunos proponen, utilizar una regla como la representada en la figura 88, que, si permite medir aquella con mas precisión, es de manejo y trasporte bastante molesto, por lo cual rara vez se hace uso de ella.

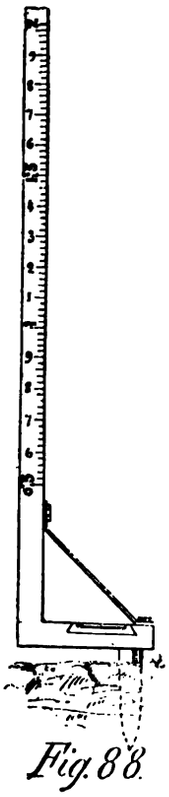


Fig. 88.

Ademas, para el servicio de todas las brigadas se necesita una buena cinta de acero ó tres reglones de 3 ó 4 metros graduados, aquella ó estos bien comprobados y conservados al objeto de medir en el sitio mas oportuno una distancia de 50 á 100 metros con mucha precisión para comprobar frecuente y periódicamente el ángulo diastimométrico de los aparatos y las cintas de hilo, á cuyo efecto se marcarán con estacas los extremos de aquella distancia y los 10 y 20 primeros metros.

En los planos de terrenos con edificios diseminados, rodales de árboles y otros obstáculos, será tambien necesario tener á disposición de las brigadas alguna escuadra de reflexión para determinar por su medio algunos detalles y en los de grande extensión una brújula de bolsillo y uno ó dos barómetros aneroides bien comprobados para utilizarlos en los reconocimientos; finalmente cuando se deseara conseguir la altura relativa de las estaciones con mucha precisión se debe tener un buen nivel de anteojo dedicando á la nivelación de aquellas una brigada especial.

Aunque todos los aparatos y utensilios, que en cada caso se consideren necesarios, se han de examinar, comprobar y corregir con todo cuidado antes de salir de la residencia habitual de los Topógrafos, debe esto repetirse al fijar la eventual que exija la ejecución de los trabajos, porque no pocas veces se descorrigen y hasta se inutilizan con las grandes sacudidas y golpes que reciben en los trasportes y el Topógrafo director no debe por ningun concepto encargar esta comprobación á los Ayudantes, porque no siendo estos responsables lo hacen muchas veces mal por descuido ó impericia, comprometiendo el éxito del trabajo.

La comprobación y corrección de los taquímetros se hará en la forma prevenida en los números 180 y 184 á 189 del volúmen I, teniendo presente lo dicho en el número 153 del mismo volúmen, especialmente en sus primeras condiciones y las propias de cada aparato.

Si se pretendiera utilizar las brújulas y planchetas taquimétricas, se tendrá en cuenta lo dicho para ellas en su lugar oportuno comprobando el ángulo diastimométrico con la distancia medida con la cinta de acero ó los reglones, con cuyos 10 ó 20 primeros metros se comprobarán tambien periódicamente las cintas de hilo cuidando de observar la tensión mas conveniente para que concuerden con la distancia tipo.

75 — Preparación de los medios de señalamiento y marcación de los puntos, de los registros y cróquis.

Como ya digimos en el número 71, los vértices de la base ó bases de comprobación se señalan con banderolas y se marcan con fuertes estacas con la inscripción de los números romanos correspondientes; los de las estaciones respectivamente con jalones y estacas menores con las letras mayúsculas y los números romanos de los puntos entre que se hallan y finalmente los puntos característicos solo se señalan momentáneamente con las miras y á lo sumo, y esto es muy conveniente, se marcan con un punto ó con una cruz de lechada de cal, que llevan los portamiras en cantíploras colgadas del cinturón.

Cuando el reconocimiento detallado del terreno se hace en la forma descrita en el número 71, en los grandes trabajos serán á lo sumo necesarias para proceder con toda holgura 16 ó 18 *banderolas*, que se fijarán en los vértices de la base ó bases de comprobación, en los de la trasmisión de la orientación central y en algun punto notable, á que se quiera dirigir desde otros muchos visuales de comprobación, aunque realmente no sea esto necesario: las brigadas detallistas no necesitan en este caso banderola alguna.

En los planos de pequeña y mediana extensión la brigada pocas veces necesita mas de cuatro banderolas, que se cambian de lugar segun las circunstancias.

Como siempre que se quiera tener en cuenta los ángulos zenitales para determinar las alturas, conviene dirigir las visuales á puntos de una bien determinada de las banderolas, se han de modificar las ordinarias abriendo en sus astas barrenos desde la altura de 1'50 ó 2 metros de 2 en 2 decímetros para colocar una esfera de uno de diámetro á la que se crea mas conveniente mediante un pasador y como ya se llevarán así preparadas, en el lugar de los trabajos solo se colocará la esfera á la altura, que mas convenga en cada caso, tomando nota de la que le corresponda al hacer el señalamiento.

En las comarcas abundantes en cañas, árboles ó arbustos que produzcan varas rectas, sobre el terreno se harán con ellas excelentes y económicos *jalones* y se prepararán los papeles de distintos colores con la designación correspondiente, aunque ordinariamente esto ha de hacerse á medida que se fijen las estaciones por las escuadras detallistas, que al efecto llevarán un haz de ellos con los que cada día puedan necesitar, que no llegarán á 10.

Si en la comarca no hubiera cañas ni varas rectas, se sustituirían con jalones de madera de pino de las mismas dimensiones, que cuestan y abultan poco.

Cuando los vértices de la base ó bases de comprobación se hayan de señalar con hitos, estos deben tener 15 centímetros de escuadría y 75 de largo enterrándose al menos 50 y en su centro se abrirá un agujero cilíndrico de 20 centímetros de profundidad, en que pueda despues colocarse una banderola: como esto resulta caro y tardío, ordinariamente se sustituirán con estacas de madera fuerte de 4 á 5 centímetros de escuadría y 1 metro de largo, que se clavarán en el suelo no dejando fuera mas de 20 centímetros y con un taladro en el centro para fijar despues una banderola: tales hitos ó estacas se referirán á tres puntos estables próximos ó en su defecto á tres estacas numeradas, y cuando siendo muy necesario conservar su situación se temiera que las hicieran desaparecer, podría enterrarse verticalmente á la profundidad de un metro un tubo de barro cocido disponiéndole de modo que su eje se encuentre en la vertical del punto.

Las *estacas* para las estaciones pueden hacerse de 15 milímetros de espesor, 3 ó 4 centímetros de ancho y 35 á 40 de largo, lo que se consigue fácilmente con listones de cualquier made-

ra, sustituyendo perfectamente las de la forma de la figura 89, que algunos proponen y costando mucho mas no satisfacen mejor á su objeto, porque la mir debe colocarse en la entalladura como dicen, si no en el suelo por v motivos.

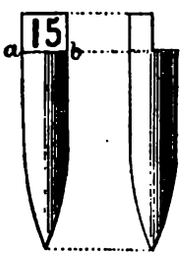


Fig. 89

Los jalones de caña y varas y las estacas los pueden hacer los pe mientras los Topógrafos comprueban y corrigen los aparatos y despu los ratos que los trabajos les dejan libres y en los días de mal tiempo: l signación la harán tambien bajo la inmediata dirección de los Jefe brigada á medida que se vayan necesitando y conociendo cual debe aunque se pueden desde luego pintar las letras seguidas del alfabeto yúsculo aplazando el resto de la designación para cuando se hayan de uti

PREPARACIÓN DE LOS REGISTROS

Como sería muy molesto hacerlos á mano en cada caso, generalmente se utilizan imp ó litografiados en cuadernos apropiados á la importancia de los trabajos.

En el comercio se encuentran de variadísimas condiciones; véase en las páginas 215 y s general que hemos preparado y que á la venta se halla en cuadernos de 11, 21 y 26 pliegos mente litografiados en rojo con cubierta de papel fuerte de color (1), *en cuya cara exterior s* cuentran ordenadamente dispuestas las correspondientes inscripciones para hacer const número de la libreta, la provincia, partido y término municipal, en que se halla enclava terreno objeto del trabajo, que despues se describe, la designación del registro y finalmen año en que se levanta aquel; en la cara interior se detallan separadamente los instrum empleados para la medición de los ángulos, de las distancias y para el cálculo de las coord das; el método general del levantamiento y el de construcción del plano y finalmente la servaciones generales, entre las que debe figurar en primer lugar si para la orientación se ta el meridiano magnético, ó el geográfico ú otra dirección cualquiera y si se trasmite de ción á estación mediante la aguja ó el limbo azimutal.

En las 1.ª y 4.ª página del primer pliego consta la explicación que copiamos en las nas 217 y 218.

En los registros general y de comprobación de las coordenadas de las estaciones h procurado que con la mayor sencillez y claridad posible consten siempre todos los datos t dos sobre el terreno, los cálculos hechos y los resultados obtenidos, con las modificacione hicieren necesarias las correcciones procedentes, á fin de que en todo tiempo puedan com barse y descubrirse las equivocaciones que pudieran ocurrir: utilizar á tal efecto diferente gistros y papeles sueltos es muy molesto y expuesto á que se pierdan algunos datos, cálcu resultados integrantes del plano numérico; mientras que pegando al fin de cada cuadern registro general las hojas del de comprobaciones y guardando en la misma carpeta con ell cróquis con las oportunas referencias, cualquier Topógrafo puede reconstruir un plano riorado ó perdido y conocer en todo tiempo las condiciones de precisión del representad méricamente por las coordenadas al origen consignadas en el registro general.

La única objección que á estos se hace, es que por sus dimensiones no se pueden lle

---

(1) Litografiados de color rojo en papel de hilo superior se venden en Madrid en casa de Recarte Hij rrera de San Gerónimo, 15), en Zaragoza en la de D. Amado Laguna, constructor de instrumentos de preci en Barcelona en la tienda de Biosca y Compañía, antigua de Rosell (plaza de Palacio, 13) á los precios de:

1'75 pesetas los de 11 pliegos y 2 especiales de comprobaciones
3'00 id. los de 21 id. y 3 id. id.
3'75 id. los de 26 id. y 4 id. id.
1'00 id. cada 5 pliegos sueltos de ambos registros
1'00 id. id. 5 id. del general con instrucción
1'00 id. id. 5 id. de cubiertas.

Folio

Angulos		Distancias		Corrección de z'
nutales	zenitales	horizontales	verticales	
Θ (12)	φ (13)	D (14)	z' (15)	$i - m$ (16)

ordenadas á la estación y al origen

y	x	X	Y	Z

Observaciones

ESTACIONES

Folio

S Y CORREGIDAS

—	X	Y	Z

OBSERVACIONES

denadas de las estaciones

de poligonación con comprobaciones sucesivas, en la casilla 1.ª se hacen los cálculos de los valores de *d*, ξ', ξ, *x* é *y* de cada estación y consignando ordenadamente estos tres últimos valores para las estaciones comprendidas entre cada dos de comprobación (I-II) en una hoja del *registro de comprobaciones*, se hacen las de cada sección de la poligonal y despues la de las distintas secciones para toda ella relativamente á los vértices de la triangulación, que sirven de término ó para el polígono cerrado, por cuyo medio se hacen las correcciones oportunas y se determinan los valores de las coordenadas al orígen de las estaciones, consignándolas despues en los *espacios rayados* correspondientes de las casillas 11 á 16, en frente de cada estación.

En la hoja del registro de comprobaciones deben hacerse constar las diferencias resultantes; las admisibles, segun la tolerancia prefijada, y los medios de corrección de las *x*, *y*, ξ y hacer de ello alguna indicación en la casilla 1.ª del registro general, para que este revele la bondad del trabajo, aunque á este registro se han de unir al final las hojas del de comprobaciones y á la carpeta los *cróquis ordinarios*, que se llevarán en cuadernos apropiados, y los *circulares* que se utilizaren en las estaciones complicadas.

Al pasar de tinta por la noche, ó en los días de mal tiempo, los datos del registro general y de los cróquis, se deben dejar en lápiz la mitad de los comprendidos en las casillas 6.ª, 7.ª, 12.ª y 13.ª y los de la 11.ª, no sólo porque no son indispensables y se ahorra trabajo en aquellas horas, sino para evitar las equivocaciones funestas y frecuentes de tomar una cifra por otra; despues, cuando se disponga de mas tiempo y mejores condiciones, se comprueban rápidamente todos y se pasan de tinta *siena ú otra*, tambien para evitar equivocaciones en los cálculos siguientes.

Sin esperar á tener, en caso que así convenga, las coordenadas al orígen de las estaciones, se pueden calcular los valores de *d*, ξ', *i—m*, *x*, *y*, ξ de todos los demás puntos, mediante el Círculo ó la Regla logarítmica ó las Tablas especiales; en este último caso, los cálculos se escriben en la casilla 10.ª y siempre los resultados en la línea correspondiente á cada punto en las casillas procedentes y cuando se tienen consignadas aquellas coordenadas de las estaciones se deducen las finales para todos los puntos, mediante la suma algébrica correspondiente con las de la respectiva estación.

. . . . . .

la mano; pero no resulta atendible, porque para evitar los inconvenientes que tal proceder lleva consigo, utilizamos una pequeña plancheta de 50×40 centímetros, que sirve de atril al escribiente, quién apoyándose en ella de frente y cerca del observador oye, anota y repite cómodamente los datos, evitándose las muchas equivocaciones que se cometen no procediendo así, ya que el escribiente en este caso busca sitio en que poder sentarse de espalda al sol y sin conseguir la comodidad deseada muchas veces lo hace lejos y de espaldas al instrumento y no oye ni es oído claramente; de manera que escribe mal y se expone á cometer muchas equivocaciones: sobre la plancheta hace tambien el operador el cróquis general con mucha comodidad: siendo de pequeñas dimensiones, de madera blanca y con trípode sencillo con juego de nuez satisface perfectamente al objeto y no resulta de molesto trasporte de estación á estación.

PREPARACIÓN DE LOS CRÓQUIS

Para dibujar á ojo los ordinarios basta hacer un cuaderno con papel de barba numerando las páginas para hacer de ellas la referencia oportuna en el registro general y de las de este en aquel, á fin de relacionarlos fácilmente y para que no haya dificultad en la busca al construir el plano conviene pasar de tinta la designación de todos los puntos de estación y característicos al hacerlo de los datos correspondientes del registro comparándolos para que con la omisión de alguno no haya despues dificultades; al mismo efecto conviene en cada estación hacer ya esta comparación sin perjuicio de repetirla al pasarlos de tinta: sin estas comparaciones de comprobación, que no requieren mucho tiempo, ocurren despues muchas veces dificultades en la construcción de muy difícil solución; ademas en la 1.ª se vé al mismo tiempo si el cróquis detallado hecho por el Ayudante está ó no conforme con los datos del registro y con las formas del terreno: todo lo cual es muy importante.

Cuando en esta comparación ocurrieran dificultades ó la complicación de los detalles las ofrecieran para hacer á ojo *cróquis* bien claros, será conveniente utilizar los *circulares* de la forma del modelo, que insertamos á continuación, figura 90, con los que rápidamente se construye el plano aproximado en escala suficientemente grande resolviendo aquellas ó facilitando la construcción del cróquis detallado.

En el modelo, reducido á $^1/_2$ en la figura 90, se supone suficiente la escala de $^1/_{1000}$ y en tal concepto se fijan las distancias indicadas de 4 en 4 metros por las circunferencias y como los rumbos los señalan de 5^c en 5^c grados los radios, cuyo valor vá expresado en el cuadro exterior y por otra parte con los datos de la pequeña Tabla que en él consta se conoce aproximadamente lo que, segun el grado de inclinación de la visual, se ha de descontar por cada 100 metros del valor de g, resulta muy sencillo calcular aproximadamente la distancia horizontal y situar cada punto en su verdadera posición y uniéndolos como el terreno indique, se conseguirá mas que un cróquis un verdadero plano aproximado.

Supongamos que para el punto *a* se hayan medido:

$$g = 59'7; \quad \varphi = 10^c \text{ y } \theta = 17^c$$

En la tabla se vé que hay que rebajar 1'4 del valor de *g* para tener el de D, que será aproximadamente D = 58'3 y con este valor y el de $\theta = 17^c$ se sitúa desde luego en su lugar oportuno; lo mismo se hace con los demas, que unidos segun indica el terreno darán la figura representada.

Si esto se hace para resolver una dificultad del cróquis hecho á ojo, comparándolos quedará conseguido el objeto y si se hace para tener el cróquis directamente tambien y con alguna práctica se realiza en poco rato.

Estos cróquis se podrían hacer de doble tamaño que el modelo, generalmente no serán necesarios mayores; pero para poder adoptar en cada caso la escala mas conveniente se dejará la numeración de los radios para ponerla, en algunos al menos, en el momento de utilizarlos y haciendo de ellos un cuaderno y numerándolos se relacionarán fácilmente con los cróquis ordi-

narios y con los registros; tambien se facilitará la referencia por la consignación del día en que se hagan los cróquis y se tomen los datos correspondientes del registro, por lo que en todos se ha de consignar la fecha en que se opere, lo cual al propio tiempo sirve para comprobar el trabajo realizado cada día.

Finalmente, para que los datos consignados en los registros y cróquis resulten claros sin que se marquen fuertemente, ni ensucien el papel y se conserven en buen estado, es necesario utilizar buenos y bien afilados lápices y guardar aquellos en carpetas de cartón para librarlos de la humedad, etc., etc.

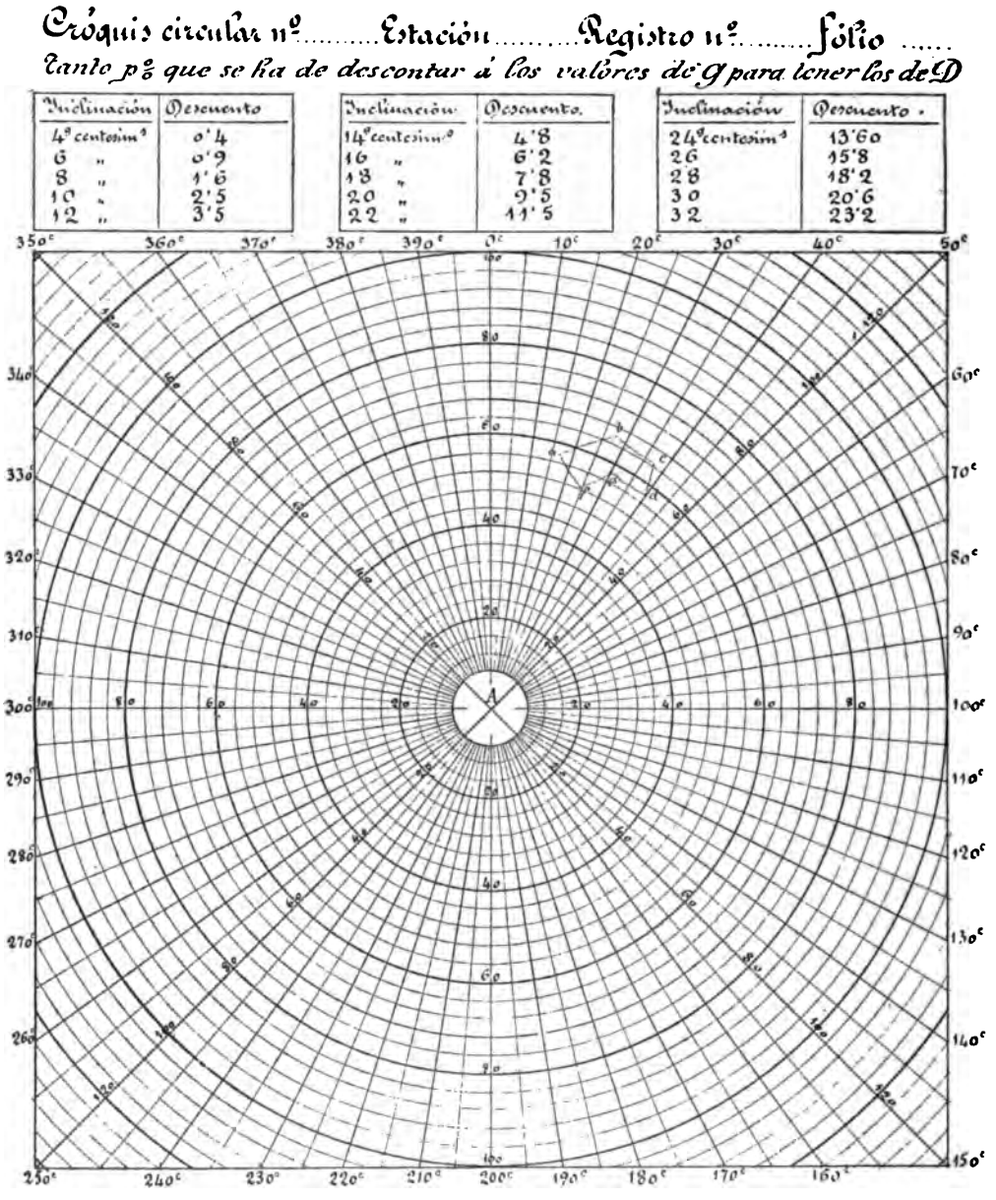


Fig. 90

Cróquis parciales } *notas*

76 — Organización de las brigadas é instrucción de los portamiras y demás peones auxiliares.

En los planos de terrenos de pequeña extensión la *brigada* puede reducirse al Topógrafo, un portamira y el peón portador del aparato y que sostiene el parasol durante la observación; pero en este caso se han de elegir y marcar préviamente la estación ó estaciones necesarias, señalar los puntos característicos y hacer el cróquis detallado con la designación que á cada uno corresponda, dando al portamira instrucciones precisas sobre el órden que se ha de seguir.

Como en este caso son pocas las estaciones y los puntos característicos, el Topógrafo mide y anota la altura del instrumento, los ángulos y los datos para determinar las distancias, cuidando en vista del cróquis que el portamira se coloque ordenadamente en cada punto.

En los planos de terrenos de mediana extensión, la *brigada ha de ser completa* componiéndose del Topógrafo director; de un Ayudante inteligente, que sepa elegir los puntos característicos, determinar algunos mediante sencillas operaciones con relación á otros ó á las visuales á ellos dirigidas y croquizar claramente; de un escribiente que lleve el registro con buena letra y cifras y que conociendo las comprobaciones inmediatas de los argumentos de las distancias y de los ángulos las haga rápidamente para advertir al observador sin pérdida de tiempo; de dos ó tres portamiras, segun las condiciones del terreno, inteligentes y celosos del cumplimiento de su deber; de un peón conocedor del terreno, que sirva de guía destinado al movimiento de banderolas, á clavar las estacas y quitar algunos estorbos, como ramas de árboles y arbustos, que muchas veces interceptan las visuales y finalmente otro peón portador del instrumento, que en cada estación cuide de que se mida su altura y sostenga el parasol durante la observación.

Pretender, como algunos lo hacen, suprimir por economía el escribiente es contraproducente, porque se retarda considerablemente la operación y se expone mucho á frecuentes equivocaciones en la consignación de los datos.

Algunos prefieren que el Topógrafo principal se encargue de dirigir á los portamiras y de hacer el cróquis detallado y el Ayudante del aparato; creemos mas conveniente lo contrario: porque de que las observaciones se hagan y anoten bien depende principalmente el éxito del trabajo y ademas puede así el Topógrafo dirigir y vigilar á todo el personal desde la estación: de nada servirá que los puntos característicos estén un poco mejor ó peor elegidos si se equivocan los datos observados en el aparato ó se consignan mal en el registro, como es muy frecuente no estando á la mira el encargado de la operación.

Finalmente en los planos de terrenos de grande extensión las brigadas detallistas se compondrán como en el caso anterior, y la del Topógrafo director, como encargada de las comprobaciones, si se ha hecho préviamente el señalamiento, marcación y referencia de los vértices de la base ó bases correspondientes, podrá componerse del Topógrafo director, de un buen guía, de un Ayudante para hacer los cálculos por duplicado y de un peón portador del aparato.

En el caso de que por no haber hecho préviamente el señalamiento, marcación y referencias de los vértices hubiera de hacerse esto sucesivamente, al personal indicado habría que agregar dos peones para el movimiento de banderolas y auxiliar en los demas trabajos.

Como el Ayudante debe conocer los procedimientos y prácticas topográficas, las instrucciones que en cada caso se le han de dar dependen de las condiciones del terreno y de las que en cada caso deba tener el plano.

Al escribiente con presencia del registro general se le ha de enseñar el órden en que se harán las observaciones, la manera de anotarlas y comprobarlas, ordenándole que repita siempre en alta voz los datos que se le dicten, que diga el resultado de las comprobaciones y que escriba en su lugar oportuno la designación de las estaciones, la altura del instrumento en cada una y todo lo demas que por el momento se ha de hacer constar en el registro, de cuyas casillas se

ha de enterar perfectamente, de la manera de orientar en cada estación consignando desde luego invertidos los azimutes para ella determinados desde la precedente, cuidando de que no se olvide algun dato necesario, como es bastante frecuente relativamente á la altura del instrumento, y de colocarse cerca del aparato de frente al observador para que se oigan uno á otro distintamente á fin de evitar equivocaciones en la consignación de los datos; de las que notare deberá dar aviso inmediato para su comprobación y corrección; siendo joven inteligente y celoso en pocas horas adquiere la práctica necesaria y es auxiliar muy importante; pero para evitar que se distraiga se ha de prohibir en absoluto á los demas peones que hablen durante la observación: no debe olvidarse que todas las precauciones son pocas para evitar equivocaciones.

Las *instrucciones á los portamiras* son distintas segun que sean estas parlantes ó de dos planchas.

Con las primeras han de cuidar de que el eje de la cara graduada se encuentre sobre el centro de la estaca ó hito que señale el punto ó sobre el suelo, segun los casos, bien vertical y de manera que dicha cara esté de frente al aparato, á cuyo efecto el portador ha de observar constantemente la aplomada y mirar por el canto de la mira á aquel, inclinándola notoriamente y pasando á otro punto en cuanto reciba el aviso de estar terminada la observación.

En ningun punto debe colocarse la mira hasta que el Topógrafo dé la señal de *alerta*, á fin de evitar que colocadas dos en su punto respectivo las advertencias que se hagan á uno las tome el otro como propias confundiéndose.

Si la mira no estuviera bien vertical y de frente al observador este lo indicará del modo siguiente ú otro análogo:

Volverla ó hacerla girar	hácia	la	derecha	extendiendo	el	brazo	correspondiente
»	»	»	la	izquierda	»	»	»
Inclinarla	»	»	la	derecha	moviendo	el	» derecho de arriba á abajo
»	»	»	la	izquierda	»	»	izquierdo » »

Observando la aplomada se evitará cuidadosamente que la mira se incline hácia delante ó hácia detrás, lo que el observador no puede notar mas que viendo que varía la parte de mira comprendida entre los hilos.

Cuando esté terminada la operación el Topógrafo lo indicará poniendo los brazos en + indicando al portamira que cambie de lugar; pero si despues de esto vuelve á llamarle, colocará la mira nuevamente en el mismo punto, pues es señal de haberse padecido alguna equivocación ú olvidado algo y que se ha de repetir la observación.

Para llamar la atención y avisar al portamira que ha de colocar la suya en observación, se puede utilizar un silbato de alarma ó una corneta; con un punto sostenido se indica el *alerta*; con uno ó dos siguientes el portamira á que se quiere observar; él con uno sostenido indica que está en el punto y con otro igual del observador le indica que está terminada la observación ademas de hacerlo con los brazos en cruz; la necesidad de repetirla se puede indicar con un trino precipitado.

Cuando se haya de utilizar la mira de dos planchas las instrucciones se acomodarán á lo dicho (número 209 y 210 del volúmen I) sobre su manejo; se comprende en su vista que el portamira ha de ser algo mas instruído y celoso en el cumplimiento de su deber con estas miras que con las parlantes.

Las instrucciones al peón encargado de trasportar el aparato, se reducen á que le lleve bien vertical evitando las ramas de los árboles y arbustos, que se cuide de advertir la medida de su altura en cada estación y de tener el parasol de manera que no toque al instrumento durante la observación.

Estas instrucciones se deben dar antes de empezar la operación para evitar entorpecimientos y con ellas quedan terminados los trabajos preparatorios del levantamiento del plano.

En los terrenos de grande extensión, en que no se haya hecho préviamente la triangulación, se ha de realizar el reconocimiento detallado, el señalamiento, marcación, y referencia de las estaciones, en cuanto sea posible, en la forma descrita en el número 71; no será fácil, ni es tampoco necesario, que las mallas de las redes de comprobación y de operaciones formadas por el enlace de las bases del mismo nombre sean cuadradas; pero si polígonos de pocos lados para hacer mas seguras las comprobaciones; tambien se hà de evitar en tales poligonales los lados muy cortos eligiendo para las estaciones los puntos dominantes, aunque despues sea necesario utilizar otras auxiliares para completar el detalle, porque lo que en primer término se debe procurar es evitar la acumulación de los errores y las compensaciones fortuitas, como así se consigue localizando los que se pudieran cometer con tales lados.

Esto equivale á dividir el polígono general del terreno en otros de bastante extensión para conseguir el objeto final del procedimiento de las comprobaciones sucesivas, que se completan en el cierre de aquellos con tanta seguridad como en los vértices de una triangulación y despues subdividir esos polígonos en otros y estos en otros hasta llegar á las menores parcelas y accidentes del terreno, que es la norma adoptada con muy buen éxito en lo renovación del catastro prusiano, si bien en él no se aplicó, porque no se conocia, el sistema de comprobaciones sucesivas, utilizándose en su lugar las densas triangulaciones y las mayores precauciones en la medición de los ángulos y las distancias, que se realizó dos veces con reglones.

Cuando en los terrenos de grande extensión se ha hecho una triangulación previa especial ó general y trabajos topográficos como los de relleno del mapa del país, v. gr., las hojas kilométricas del Instituto Geográfico y Estadístico español, es natural que se utilicen en los reconocimientos, porque simplifican considerablemente el trabajo permitiendo completarlos y organizar las operaciones de manera que los vértices de triangulación sirvan para ratificar las comprobaciones de las bases de este nombre.

78 — Orden y condiciones con que deben realizarse las observaciones, manera de hacerlas y sus tolerancias inmediatas.

Para dar cuenta detallada de esta compleja cuestión de la manera mas sencilla posible, creemos oportuno hacer referencia á los seis casos comprendidos en el artículo anterior, para que poniendo en consonancia las consideraciones teóricas allí expuestas con las correspondientes á su realización en la práctica, no ocurran en esta dudas.

Primer caso. Supongamos que la figura 91 es el cróquis del terreno de pequeña extensión cuyo plano deseamos y podemos levantar desde la estación, *A*, formado durante el reconocimiento y señalamiento de los puntos, á que hicimos referencia en el número anterior y así mismo que se hayan hecho los preparativos de que antes nos hemos ocupado.

Como en el número 67 ya describimos detalladamente la operación para cada punto y en el 210 del volúmen I la manera de colocar y observar las distintas clases de miras y de deducir las alturas de ellas necesarias para calcular por su medio la distancia y la altura relativa de cada punto respecto al de estación y por otra parte en el número 75 junto con el modelo de registro general se insertó la instrucción detallada para su uso, incurriríamos en enojosas repeticiones si aquí describiéramos con detalle la manera de hacer la observación sobre cada punto y de anotar los datos resultantes ó sean los valores de θ, φ, g é i-m, que directamente se consiguen.

Por consiguiente, determinando los valores de D, x, y, z y X, Y, Z, por las fórmulas consignadas en el número 62, como detallarémos al ocuparnos de los trabajos de gabinete, nos limitarémos ahora á consignar algunas observaciones complementarias.

1.ª El órden en que se han de observar los puntos está indicado en la figura por la sucesión de las letras del alfabeto.

2.ª Los puntos b', b'' y b''' determinantes de las revueltas del camino limitrofe se fijarán mediante perpendiculares al lado bc, porque si lo fueran desde la estación, siendo pequeña la

distancia que los separa, como es considerable la de ellos á la estación, aunque el error en estas fuera tolerable, podrían quedar desfiguradas las curvas.

3.ª No siendo posible fijar con buenas condiciones el edificio y sí una de sus fachadas, *e f*, sobre esta por medición ú otros medios sencillos podría construirse su perímetro.

4.ª Por ser el lado *g h* pequeño relativamente á la distancia de sus extremos á la estación conviene comprobar su situación midiendo su longitud, que puede utilizarse para repartir el error resultante.

5.ª La diferencia entre los dos ángulos azimutales y los dos zenitales, que se anoten para cada punto, no debe ser mayor del duplo de la verdadera apreciación (1) de los nónius correspondientes y si se lee y anota uno solo de los primeros y el rumbo de la aguja la diferencia no debe exceder de 5o' y si resultara mayor deberá comprobarse desde luego la orientación del diámetro 0ᶜ — 200ᶜ dirigiendo la visual á la banderola, con que se haya marcado la meridiana magnética ó geográfica, que se haya utilizado para la primera orientación del aparato; esta comprobación debe siempre hacerse despues de visar el último punto para convencerse de que no se ha movido el limbo durante toda la operación.

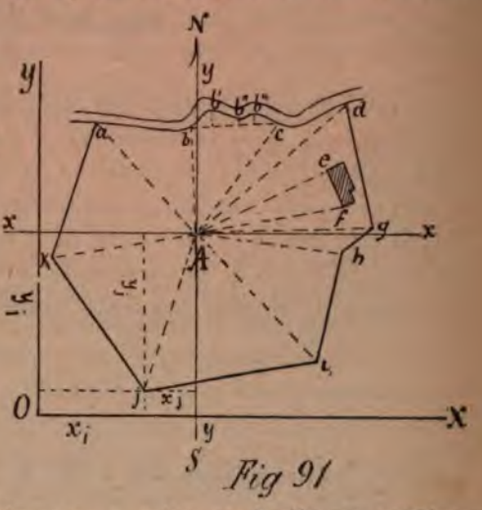


Fig 91

6.ª La diferencia entre las diferencias de altura de mira dadas por los hilos estadimétricos extremos y el axial no debe exceder de 2 mm. en distancias menores de 150 m. en visuales inclinadas de 0ᶜ á 10ᶜ con el ángulo diastimométrico de 2 centímetros y mira graduada en centímetros; pero en las mayores inclinaciones se tendrá en cuenta su influencia segun lo dicho en la nota de la página 642 del volúmen I sino se prefiere, como es justo, hacer la observación sobre la mira colocada normalmente á la visual con las precauciones recomendadas (página 220 del volúmen I) ó usar la de Viotti, cuidando en estos casos de anotarlo convenientemente en el registro para tenerlo en cuenta al determinar el valor de la distancia, que en este caso es

$$D = g \text{ sen. } \varphi$$

7.ª Finalmente al dirigir la visual á cada punto se ha de cuidar de que la burbuja del nivel del platillo azimutal esté centrada para que sean exactos los ángulos zenitales.

Procediendo con estas precauciones se puede tener la seguridad de haber levantado bien el plano; pero como no hay otras comprobaciones, si no se miden al efecto los lados del polígono ó sino se hace otra estación para determinar algunos de los vértices por duplicado, se deben hacer y repetir los cálculos subsiguientes con cuidado para evitar equivocaciones que pasarían desapercibidas.

Segundo caso. Como en el número 68 explicamos detalladamente la manera y precauciones con que debían hacerse las observaciones de los puntos vistos en buenas condiciones desde cada una de las dos estaciones, que este caso comprende, su referencia directa y la de sus coordenadas ortogonales á un mismo origen, solo nos resta añadir: que las comprobaciones que ya se consiguen por la observación completa de algunos de los puntos de la parte comun de las regiones observables desde cada una, se pueden aumentar con poca molestia dirigiendo visuales desde cada estación á algun punto de la región de la otra, en que al efecto se haya colocado un jalón; esta clase de comprobaciones pueden ser no solo gráficas, como á primera vista pare-

(1) Como ya digimos (número 62 del volúmen I) no debe confundirse la apreciación teórica de los nónius de los limbos con la verdadera ó real y á esta se ha de atener el Topógrafo, pues es la que debe servirle de base para elegir el aparato segun la precisión que en cada caso deseara conseguir.

ce, sino tambien numéricas, pues una vez que se hayan calculado las coordenadas ortogonales de las estaciones y de los puntos característicos á un origen, por su medio se calcula el azimut de la recta que une dos cualesquiera de ellos y comparando el resultado para una estación y un punto de los vistos desde ella en la región propia y exclusiva de la otra con el medido directamente, no solo se comprueba su situación relativa, sino tambien la de las estaciones, porque la del punto se ha calculado con referencia á la otra estación.

Es decir, que si desde la estación *D* (figura 82) se mide el azimut de *Dc* y despues de calculadas las coordenadas ortogonales de *D* y *c* se determina su azimut por la fórmula

$$\text{Tang. } \theta = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \quad \text{(5.ª del número 64) (1)}$$

si este valor de θ y el hallado por medición directa concuerdan, es claro que la situación de *c* con relación á *D* es la verdadera y como las coordenadas de *c* y de *D* se calcularon con referencia á la estación *C*, la situación de las dos estaciones queda comprobada.

Pero rara vez coincidirán completamente los dos valores de θ y es preciso conocer si la diferencia está dentro de los límites de la tolerancia y si bien si no excede, en el caso que consideramos, del duplo de la apreciación verdadera de los nónius del limbo azimutal ya se puede estar seguro de no haberla pasado, lo mejor es calcular la distancia por una de las fórmulas

$$D = \frac{\Delta X}{\text{sen. } \theta} = \frac{\Delta Y}{\cos. \theta}$$

utilizando los dos valores de θ y ver si la diferencia es menor de la tolerable segun los casos. (Véase número 9).

Finalmente, como la distancia entre las dos estaciones se mide realmente cuatro veces, si se utiliza el ángulo diastimométrico de 2 centímetros y la mira graduada al centímero, se observará si la media de las dos medidas directas y la de las dos inversas está comprendida dentro de los límites de la tolerancia señalada en el número 9 y si así sucede se admitirá la media de las dos medias comparadas, con lo cual se conseguirá el resultado que allí se dice; de no ser así se repite la medición entre las dos estaciones con todo cuidado desde la segunda y esta medida es la que se acepta como definitiva.

Tercer caso. Este solo difiere del anterior en que siendo imposible medir la distancia entre las estaciones con el ángulo diastimométrico considerado necesario para conseguir la precisión apetecida, se hace indispensable utilizar la observación á puntos intermedios, como digimos en el número 69, para referir con seguridad las estaciones; ciertos puntos, como los *a* y *b* de la figura 83, no se podrán determinar sino por medio de ángulos diastimométricos menores y en ciertos casos sin acudir á las miras de dos planchas, que, aunque no con tanta precisión, permiten medir distancias mucho mayores.

Todo esto demuestra que en estos casos, mas que en los del precedente, conviene hacer desde cada estación observaciones incompletas sobre algunos puntos de la región determinable de la otra, esto es, desde *C* (figura 83) medir los azimutes de *Cl* y *Cm* y desde *D* los *Dn* y *Do*, pues por su medio se podrán conseguir comprobaciones importantes como antes digimos relativamente al punto *c* (figura 82); con ello no se aumentan mucho los trabajos de campo y si bien se hace con los de gabinete las comprobaciones que proporcionan dan mucha seguridad á los resultados.

Teniendo en cuenta lo dicho sobre este caso en el número 69 y relativamente á los regis-

(1) Se utilizan las diferencias ΔX y ΔY, porque estas equivalen á las coordenadas de *c* con relación á *D*, que son las que se han de considerar en la fórmula y el valor verdadero de θ se ha de determinar teniendo en cuenta lo dicho en el mismo número 64.

tros de campo en el numero 75 ninguna duda puede ocurrir en la práctica de los trabajos de campo en el levantamiento del plano de esta clase de terrenos.

Cuarto, quinto y sexto caso. Como detalladamente explicamos en los números 70, 71 y 72, entra de lleno la aplicación del *sistema de poligonación con comprobaciones sucesivas* descrito en el primero y como en él no puede utilizarse la comprobación del cierre, aconsejamos y de nuevo recomendamos la formación de las triangulaciones de comprobación, que, sin formar propiamente una red, pueden suministrar suficientemente aquella con muy poco trabajo, segun digimos con referencia á la figura 86.

Indudablemente se conseguirá mas completa y segura en los terrenos á que se refiere el número 71 mediante los polígonos cerrados de pocos lados, como allí demostramos, permitiendo levantar planos de grande extensión sin necesidad de hacer una triangulación previa formal; pero si esta se realiza, como debe hacerse en los terrenos á que se refiere el número 72, se consigue una comprobación mas con el cierre de las coordenadas desarrolladas entre cada dos vértices, lo que no impide la formación de los polígonos sencillos de comprobación; pues basta formar con los lados de los mismos, que convenga, las poligonales directas y trasversales, que cómodamente se deducirán de aquellos; esto es, de la red poligonal que constituyen enlazando entre sí todos los puntos característicos y comprobando sucesiva y reiteradamente su situación, de tal manera que los errores inevitables se localicen y corrijan de una manera segura y racional.

Como quiera que en los números citados describimos detalladamente las operaciones que sucesivamente han de realizarse, solo dirémos ahora cómo en el campo pueden hacerse los cálculos de comprobación por la brigada directora y los resultados que ya se han conseguido con la aplicación del sistema en poligonales entre vértices de triangulación, pues aun no se ha aplicado, por no ser conocido, el de los polígonos cerrados de pocos lados, para que nuestros lectores se convenzan de lo que decíamos en el número 71, de que procediendo con cuidado y buenos aparatos se pueden levantar planos de grande extensión sin necesidad de hacer una previa y formal triangulación, que implica trabajo y gastos no despreciables.

Segun ya digimos en el número 70, cuando los trabajos del levantamiento se realizan por varias brigadas, la del director se encarga solo de hacer las observaciones de la base y puntos de comprobación y de calcular las coordenadas ortogonales de las estaciones para conseguirla inmediatamente sobre el terreno resolviendo asimismo los triángulos formados por las visuales dirigidas á puntos determinados para ratificar las comprobaciones.

Estos son realmente *trabajos de gabinete* y al ocuparnos especialmente de estos verémos cómo y con qué medios se ejecutan; pero en aquel caso conviene hacerlos simultáneamente para descubrir las equivocaciones y errores y en caso necesario poderlos corregir desde luego haciendo despues innecesario volver al terreno.

A tal efecto la brigada del director debe disponer de una plancheta, que le sirva de atril de campaña para trabajar con comodidad, y llevar preparado un cuaderno de la forma del modelo que se inserta mas abajo y otro de estados de comprobación de coordenadas de las estaciones; en el primero hace los cálculos para deducir las de cada una relativamente á su anterior y en los segundos toma ordenadamente nota de ellas para comprobarlas en el lado correspondiente de la base de comprobación y las de estos despues para hacerlo con el cierre del polígono de la misma clase ó entre dos vértices de la triangulación.

Para hacer los cálculos, pueden utilizarse la Regla ó nuestro Círculo logarítmico; pero consideramos preferible que se hagan con Tablas poco voluminosas como las nuestras, porque es mucho y molesto en el campo llevar libros de mucho volúmen y tener necesidad de hojear mucho, mientras que las multiplicaciones que aquellas exigen se hacen bien y fácilmente sobre la plancheta atril.

El Círculo se utiliza despues en el gabinete para calcular las coordenadas de los puntos característicos, pues se consiguen con mas que suficiente precisión y con grandísima rapidez, y sin molestia y puede tambien servir para comprobar los demas cálculos hechos en el campo y en el gabinete para evitar equivocaciones.

Cuando, como ocurre frecuentemente, los datos de la observación directa no son enteramente iguales á los de la inversa, conviene hacer los cálculos con ambos colocándolos en el cuaderno en la misma página, y si procediere, tomar el término medio para consignarle en el estado de comprobación de las coordenadas de las estaciones.

El cuaderno de cálculos debe conservarse en la misma carpeta de los registros y cróquis para que en todo tiempo se vea como se determinaron las coordenadas y puedan comprobarse; pero no es necesario pasarlos de tinta, lo que daría mucho trabajo innecesario en el gabinete.

MODELO DEL CUADERNO DE CÁLCULOS EN EL CAMPO

Registro ..... pág. ..... Cróquis ..... Estación A Punto visto B

Datos; $g = 153'4$ $\theta = 27'62^c$ $\varphi = 94'33^c$ $i - m = 0'07$ metros

Resultados $D = 152'34$ $z = 13'69$ $x = 63'98$ $y = 138'25$

Rectificaciones

D		z'		x		y	
153'4		152'34		152'34		152'34	
× 0'9931		× 0'0894		× 0'42		× 0'9075	
1534		60936		30468		76170	
4602		137106		60936		106638	
13806		121872		63'9828		137106	
13806		13'619196				138'248550	
152'34		+ 0'07					
		13'69					

Para las comprobaciones se utilizan estados como el modelo inserto en el número 75 ordedenándolas en la forma que aparece en el ejemplo práctico, que despues insertamos utilizando los datos suministrados con la correspondiente autorización por el Jefe de la Comisión del plano de Jaca y de los valles superiores los ríos Aragón y Gállego.

Antes empero de hacerlo se nos permitirá ya que tan ilustrada Comisión de Jefes y oficiales de Estado Mayor de nuestro Ejército fué la primera que ha hecho aplicación en grande escala del procedimiento de poligonación con comprobaciones sucesivas, tal como lo hemos explicado, que algo digamos del porqué y cómo se ha hecho, para que tan ilustrados Topógrafos reciban el galardón, que se merecen por su inteligente iniciativa.

En vista del sistema de *poligonación con interpolaciones sucesivas* del ilustre Villani, que Salmoiraghi explica en su excelente libro «*Les tachèométres-cleps*» se nos ocurrió el procedimiento explicado en el número 70, dándole á conocer en los cuadernos de Marzo y Abril de 1894 de la Revista *La Topografía moderna y el Catastro*, que entonces publicábamos.

Muchos de los suscriptores nos felicitaron por haber simplificado y completado tal procedimiento; pero seguramente ninguno le estudió y aceptó con el entusiasmo que el inteligentísimo entonces Teniente Coronel de E. M., D. Francisco Gómez Jordana, hoy Coronel y Ayudante de S. M. el Rey, que estaba encargado de una Comisión Topográfica en Ceuta.

Nombrado poco despues Sub-jefe de la del Alto Pirineo, en que se luchaba con las dificultades insuperables de aquel abrupto terreno, explicó el procedimiento al Jefe de la Comisión, ilustradísimo Topógrafo, hoy General D. Luis Moncada, que le aceptó también con entusiasmo y con la oportuna autorización hizo de él aplicación la Comisión con tan felices resultados, que todos los que en tales trabajos intervinieron y los que de ellos tuvieron noticia se declara-

ron entusiastas defensores del procedimiento, que hoy patrocina el esclarecido Cuerpo de E. M. de nuestro Ejército.

Amantes de la justicia creemos oportuno hacer constar aquí: que la gloria de tal descubrimiento pertenece al Ilustre Villani, que con el suyo nos le inspiró, á Salmoiraghi que nos le hizo conocer y al entusiasta cuanto inteligente Topógrafo, Coronel D. Francisco G. Jordana, que hizo una amplia y felicísima aplicación de nuestro procedimiento en el terreno mas escabroso del Alto Pirineo, en que no hubiera sido aplicable el de Villani, ni habría dado buen resultado el de Porro; así que en vista de los soberbios resultados conseguidos no es de extrañar que el Sr. G. Jordana y sus dignos compañeros sientan tanto entusiasmo por este sencillo procedimiento.

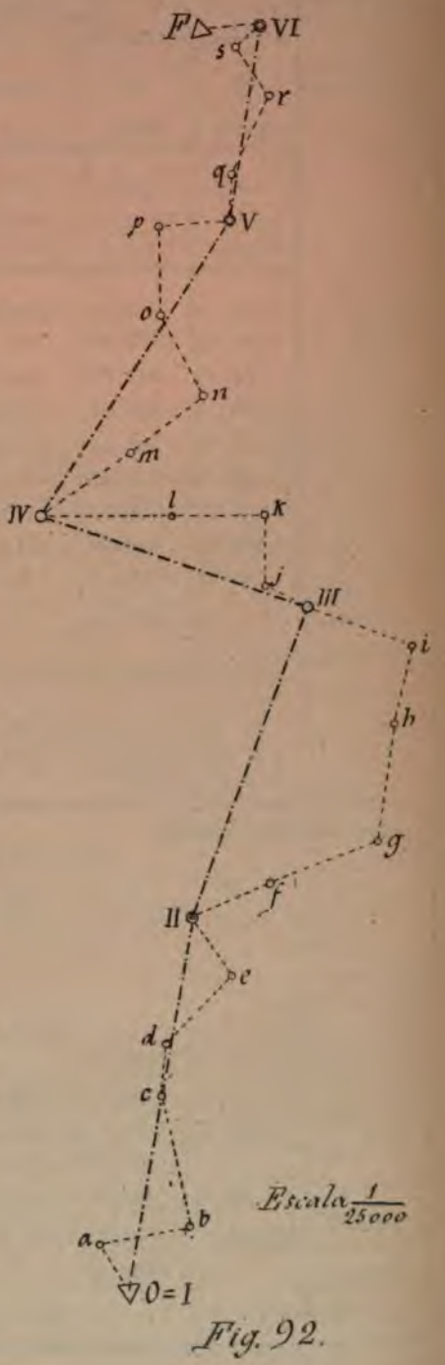


Fig. 92.

Es de advertir que las condiciones especialísimas de aquel escabroso terreno y el objeto final del plano obligaron á aquella inteligente Comisión á aceptar muchas veces el ángulo diastimométrico de $^1/_{200}$, á fijar las estaciones á distancias mayores de 500 metros y á separarse del lado de la triangulación, como se vé en la figura 92, que es el plano de la poligonal á que el estado se refiere y sin embargo, como en él aparece, el error de cierre fué solo de $^1/_{4831}$ muy inferior á los límites de las tolerancias mas exigentes.

Y no se crea que tan plausibles resultados se consiguieron en una sola poligonal por casualidad ó por compensaciones fortuítas; pues, segun nos decía el señor Jordana al remitir la que utilizamos, hizo copiar los datos de la que primero le vino á la mano, porque todas son de las mismas condiciones.

En el estado inserto en las páginas 230 y 231 sólo se hacen constar las coordenadas de las estaciones de la base de operaciones comprendidas en el primer lado de la de comprobación y el resúmen de las de estos entre dos vértices de la triangulación, porque no se necesita mas para comprender cómo se ha de proceder para conseguir la comprobación inmediata.

La corrección de las coordenadas y consiguientemente el cálculo de las correspondientes al orígen no puede hacerse hasta que se haya determinado el error de cierre y por consiguiente se calculan primero las coordenadas de las estaciones comprendidas en cada lado de la base de comprobación haciendo la procedente por el cálculo de la orientación mediante las sumas de las abscisas y ordenadas, como en el estado consta; si está conforme, se calcula la distancia entre los vértices sucesivos (I-II, II-III...) de la base de comprobación, cuyos resultados se escriben en el estado para que en él conste todo: esto se hace para cada uno de sus lados; despues el resúmen y comparando la diferencia de las positivas y negativas de cada clase con la que se deduce de las de los vértices de la triangulación, entre que se desarrolla la poligonal, ó con cero, si es en polígono cerrado, se tiene el error de cierre; si este es tolerable, segun lo dicho en el nú-

PLANO DE JACA, SUS ALREDEDORES Y DE LOS VALLES

REGISTRO ESPECIAL DE LAS ESTACIONES DE LA POLIGONAL Ó

DIRECCIONES	AZIMUTES θ Grados	DISTANCIAS D Metros	PUNTOS	COORDENADAS CALCULADAS x + Metros	x − Metros	y + Metros	y − Metros	z + Metros	z − Metros
			F	»	»	»	»	»	»
			O	»	»	»	»	»	»
			O = I	»	»	»	»	»	»
O = I - II	30 23	1577 6	II	»	»	»	»	»	51 16
I — *a*	384 73	218 83	A	»	52 0	212 7	»	»	15 45
a — *b*	106 34	378 75	B	376 9	»	»	37 7	»	7 72
b — *c*	5 26	543 11	C	44 8	»	541 3	»	»	70 56
c — *d*	28 36	219 17	D	94 4	»	197 8	»	18 52	»
d — *e*	67 74	396 87	E	347 0	»	192 6	»	17 20	»
e — II	381 27	309 50	II	»	89 8	296 2	»	7 93	»
II — I	230 23	» »	I	»	»	»	»	»	»
Sumas.		2066 23	»	863 1	141 8	1440 6	37 7	43 65	93 7 3
Diferencias				721 3	»	1402 9	»	»	50 08

Tang. $\theta_{I-II} = \frac{x}{y} = \frac{721'3}{1402'0} = 0'51415 =$ Tang. 30'235 c, que siendo igual al medido directamente comprueba que las coordenadas polares y ortogonales parciales y por consiguiente las distancias están bien medidas.

$$D_{I-II} = \frac{x}{\text{Sen. } \theta} = \frac{721'3}{0'4572} = 1577'6 \text{ metros.}$$

RESUMEN DE LA BASE

				O = I								
O = I - II	30 23	1577 6	II	721 3	»	1402 9	»	»	50 08
II — III	42 05	1370 4	III	840 1	»	1082 4	»	86 14	»
III — IV	339 89	1183 7	IV	»	958 9	693 7	»	134 19	»
IV — V	55 95	1465 4	V	1127 7	»	934 9	»	199 57	»
V — VI	29 23	837 5	VI	371 1	»	750 6	»	234 50	»
VI — F	314 »	253 3	F	»	246 7	57 8	»	34 16	»
Sumas.		6687 9	»	3060 2	1205 6	4922 3	»	688 56	50 08
Diferencias				1854 6	»	4922 3	»	638 48	»

Comparados estos resultados con las coordenadas deducidas por la triangulación resultan las diferencias siguientes: $\Delta X = -1$ metro; $\Delta Y = -1'2$ metros; $\Delta Z = +0'91$ metros, á los que corresponde un error de cierre de 1'8 metros en una poligonal de la base de operaciones de 8732 metros de desarrollo y en otra de comprobación de 6687'9 metros; de manera que el error en la primera es de $^1/_{4851}$ y en la segunda de $^1/_{3718}$ y siendo estos muy inferiores á las tolerancias señaladas en

Folio .....

SUPERIORES DE LOS RÍOS ARAGON Y GÁLLEGO

ITINERARIO DEL VÉRTICE O AL F DEL TRIÁNGULO VIII

COORDENADAS COMPROBADAS Y CORREGIDAS																		OBSERVACIONES
x				y				z				X		Y		Z		
+ Metros		− Metros		+ Metros		− Metros		+ Metros		− Metros		Metros		Metros		Metros		
»		»		»		»		»		»		55.860	2	24.427	5	1.549	28	
»		»		»		»		»		»		54.004	6	19.504	0	911	71	
				Diferencias								1.855	6	4.923	5	637	57	
»		»		»		»		»		»		54.004	6	19.504	0	911	71	
»		»		»		»		»		»		»		»				
»		52	0	212	7	»		»		15	45	53.952	6	19.716	7	896	26	
376	9	»		»		37	7	»		7	72	54.329	5	19.679	0	888	54	
44	8	»		541	4	»		»		70	58	54.374	3	20.220	4	817	96	
94	4	»		197	8	»		18	51	»		54.468	7	20.418	2	836	47	
347	0	»		192	6	»		17	19	»		54.815	7	20.610	8	853	66	
»		89	8	296	3	»		7	93	»		54.725	9	20.907	1	861	59	
»		»		»		»		»		»		»		»		»		
863	1	141	8	1440	8	37	7	43	63	93	75							
721	3	»		1403	1	»		»		50	12							

$z_{I\text{-}II}$ = D. cot. φ + i − m = 1577'6 × o'0327 + 1'23 = 52'817 m.

$z_{II\text{-}I}$ . . . . . = 1577'6 × o'0313 + o'45 = 49'829 »

Suma. . . . . 102'646 »

Media. . . . . 51'323 »

Restando por la diferencia del nivel aparente y refracción, segun la fórmula del número 50 del vol. I. . . . . o'164 »

Resulta para diferencia de nivel de I-II. . . . . — 51'159 m.

DE COMPROBACION

												54.004	6	19.504	0	911	71	
721	3	»		1403	1	»		»		50	12	54.725	9	20.907	1	861	59	
840	5	»		1082	6	»		86	09	»		55.566	4	21.989	7	947	68	
»		958	8	694	1	»		133	96	»		54.607	6	22.683	8	1081	64	
128	2	»		935	0	»		199	09	»		55.735	8	23.618	8	1280	73	
371	1	»		750	9	»		234	42	»		56.106	9	24.369	7	1515	15	
»		246	7	57	8	»		34	13	»		55.860	2	24.427	6	1549	28	
3061	1	1205	5	4923	5	»		687	69	50	12							
2855	6	»		4923	5	»		637	57	»								

el número 10 se procede á la distribución de las diferencias de cada coordenada, primero en la base de comprobación y despues en la respectiva de operaciones consiguiendo las corregidas á la estación y las definitivas al orígen, como aparecen en su lugar oportuno.

mero 10, se distribuye entre las coordenadas de los vértices de la base de comprobació cionalmente á las distancias y despues cada una de las correcciones hechas en estos s entre las coordenadas de los vértices de la base de operaciones intermedias entre los v aquella, lo cual se hará escribiendo las coordenadas corregidas en su lugar oportuno se determinan con ellas las definitivas al orígen por simples sumas algébricas, primer mente de la base de comprobación y despues las parciales de la de operaciones, con tendrán las coordenadas de todas las estaciones, que, como se verá en los trabajos de sirven para calcular las de los puntos característicos vistos desde cada una.

Si las condiciones del terreno y el objeto del plano hubieran permitido utilizar diastimométrico de 2 centímetros en distancias menores de 150 metros y los polígonc probación á que antes hemos hecho referencia, los resultados habrían sido todavía m rroborando la opinión antes emitida de que con el procedimiento de poligonación probaciones sucesivas se puede levantar el plano de terrenos de grande extensión sin de hacer una previa y especial triangulación, y como no complica los trabajos d gabinete implica una notable economía y un progreso digno de tenerse en cuenta.

ARTÍCULO CUARTO

TRABAJOS DE GABINETE

79 — Clasificación.

Aunque el objeto final de los procedimientos modernos es conseguir el *plano* esto es, las coordenadas ortogonales á un mismo orígen de todos los puntos caracteri terreno, no solo para hacer mas sensibles á la vista sus condiciones se construye por el plano gráfico, sino que tambien muchas veces se deja aquel incompleto por ec cálculos fijando geométricamente con las coordenadas mixtas la situación relativa de r nos puntos.

Esto implica la necesidad de deducir de las coordenadas polares medidas en el te mixtas y ortogonales y de construir por su medio el plano gráfico acotado ó con curv vel y como á tal efecto y para economizar tiempo y molestias se utilizan aparatos y Ta ciales y por otra parte en la copia, reducción y amplificación de los planos numérico cálculo de su superficie se pueden aplicar procedimientos diferentes de los explicado: tículo cuarto del Capítulo I de la *Primera Parte* relativamente á los simplemente grá tando en lo posible enojosas repeticiones nos ocuparémos sucesivamente:

1.° De las fórmulas topográficas mas usuales y consideraciones generales sobr sencilla aplicación;

2.° De los aparatos destinados á realizar mecánimente los cálculos, Reglas y Círc rítmicos y Cuadros gráficos;

3.° De las principales Tablas numéricas destinadas al mismo objeto;

4.° De los trasportadores especiales, cuadradores y coordinatógrafos;

5.° De la preparación y construcción de los planos levantados por los proce modernos.

6.° Del dibujado, copia, reducción y amplificación de los gráficos de los plan ricos;

7.° De la medición de la superficie de estos, y

8.° Finalmente de la comparación entre los planos simplemente gráficos, lo: numéricos y los numéricos con gráfico.

80 — Fórmulas topográficas mas usuales y consideraciones generales sobre su mas sencilla solución.

Como en diferentes ocasiones y muy especialmente en el número 62 hemos dicho, las fórmulas, que con gran repetición se han de resolver en la práctica de los modernos procedimientos, son las siguientes:

$$1.^a \quad D = g.\ \text{sen}^2\,\varphi$$

$$2.^a \quad z' = D.\ \text{cot.}\ \varphi = g.\ \text{sen.}\ \varphi\ \text{cos.}\ \varphi = g.\ \frac{\text{sen.}^2\,\varphi}{2} \quad (1)$$

$$3.^a \quad x = D.\ \text{sen.}\ \theta$$

$$4.^a \quad y = D.\ \text{cos.}\ \theta$$

que, como entonces digimos, sirven para deducir de las coordenadas polares medidas en el terreno las ortogonales integrantes del plano numérico objeto final de tales procedimientos.

Tambien con grande repetición se ha de hallar *una cuarta proporcional* á tres cantidades conocidas, especialmente cuando del plano acotado directamente conseguido con el numérico se desea representar su relieve por las curvas de nivel y *hacer multiplicaciones y divisiones de números entre sí ó de estos con funciones circulares,* cuando se quiere hallar por el cálculo la superficie de las distintas partes de un plano ó resolver los triángulos, que por cualquier concepto se formaren.

Consiguientemente á todo esto para obtener el plano numérico, y para resolver por su medio todas las cuestiones, se han de hacer, aunque sencillos, numerosos cálculos y si bien no puede ponerse en duda que los resultados han de ser así mas exactos que los que se consiguen geométricamente sobre los planos simplemente gráficos, son muchos los Topógrafos que á estos se atienen por suponer que aquellos cálculos les han de producir muchas mas molestias y exigir mucho mas tiempo.

Como harémos ver al comparar los planos simplemente gráficos con los numéricos, esta supuesta ventaja de los primeros no es cierta, cuando se comparan planos de análogas condiciones; pero de todos modos lo sería que tan repetidos cálculos motivarían muchas molestias y exigirían mucho tiempo si se realizaran por los ordinarios procedimientos y por eso se han inventado otros, que en gran parte evitan aquellos inconvenientes.

Conocidas son las ventajas que en los cálculos se consiguen con el empleo de los logaritmos, por cuyo medio se convierten las multiplicaciones y divisiones en sumas y restas; pero como ellos exigen la busca y anotación de los propios de los datos y despues de realizada la operación la busca y anotación de los resultados, siendo necesario hacer lo primero en lugares muy

---

(1) Para convencerse de que estos tres valores de z' son iguales, basta tener en cuenta; que si en el primero se sustituye por D su valor de la 1.ª y por cot. φ su valor $\frac{\cos\varphi}{\text{sen.}\ \varphi}$,

se tendrá: $z' = g\ \text{sen.}^2\,\varphi\ \frac{\text{cos.}\ \varphi}{\text{sen.}\ \varphi} = g.\ \text{sen.}\ \varphi\ \text{cos.}\ \varphi$

pero $\text{sen.}\ \varphi\ \text{cos.}\ \varphi = \frac{\text{sen.}\ 2\,\varphi}{2}$

luego tambien

$$z' = g.\ \frac{\text{sen.}\ 2\,\varphi}{2}$$

que algunos Ingenieros utilizan en Tablas y Reglas logarítmicas como verémos; sin embargo la mas conocida y generalmente utilizada es la primera, $z' = D.\ \text{cot.}\ \varphi$

Designamos la diferencia de alturas con z' y no con z, como se hace ordinariamente, porque para tener la correspondiente á los dos puntos del terreno, z, se ha de tener en cuenta la altura del instrumento, i, y la del punto de la mira coincidente con el hilo axial (m); es decir que

$$z = z' + (i - m)$$

distintos ó en diferentes Tablas, ordinariamente compuestas de muchas páginas, es indudable que la repetición de los cálculos ha de producir no pocas molestias y de exigir bastante tiempo en su realización; de manera que, especialmente en los cálculos sencillos, no resultan tan evidentes las ventajas del uso de los logaritmos sobre los cálculos ordinarios.

Esto se hizo tan notorio en cuanto Néper dotó á la ciencia de este importantísimo instrumento de cálculo en 1614, que 10 años despues el profesor Edmundo Gunther propuso sustituir las Tablas por una *Escala* logarítmica, que con la ayuda de un compás permitia realizar todos los cálculos mas sencilla y brevemente; pero como el uso del compás era algo molesto, despues (1657) Seth Partridge le suprimió mediante dos *Reglas logarítmicas* enteramente iguales, que á su vez lo fueron por el *Círculo logarítmico* en 1660 por Ouchtred Ætovens y despues muchos otros matemáticos las describieron y modificaron; pero, aunque las *Reglas de cálculo* imperaron generalmente entre los mecánicos, no se extendió su uso entre los Topógrafos hasta que en 1850 el ilustre Porro combinó unas *Escalas logarítmicas* perfectamente apropiadas á la resolución de las fórmulas antes consignadas, utilizando como Gunther el compás y adelante propuso un excelente *Círculo logarítmico*, que por su gran precio y otros inconvenientes no tuvo aceptación.

Es tan notoria la necesidad de apelar á estos medios para realizar con las menores molestias posibles los planos numéricos, que á medida que se han generalizado los procedimientos modernos, se ha buscado con afán el medio de resolver la dificultad combinando diferentes escalas, Reglas y Círculos logarítmicos y Tablas numéricas especialmente aplicables á la resolución de las fórmulas mas usuales, que dejamos consignadas; y como no es unánime en pró una la opinión de los Topógrafos, hemos creído oportuno dar idea de las principales para que cada uno elija el aparato ó Tabla que mas sean de su gusto, si bien es de advertir que aquella le parecerá de mas fácil manejo cuanto mas la hubiere utilizado y por consiguiente conviene antes de hacerlo elegir la que con menos molestia y gastos le pueda dar en los resultados la precisión necesaria en cada caso, porque no sería racional inutilizar la conseguida en la medida de los datos con la poca de los cálculos, ni exagerar está haciendo suponer tal precisión en los resultados que no sea proporcionada á la obtenida en aquellos, ni tampoco lo requiera el objeto final de los trabajos.

81 — Aparatos destinados á realizar los cálculos mecánicamente. Escalas, Reglas y Círculos logarítmicos y Cuadros gráficos.

Todos, excepto los últimos, no son otra cosa que la expresión geométrica de los logaritmos de los números y de las funciones circulares convenientemente ordenados para que combinados entre sí presenten desde luego á la vista del operador el resultado de su suma ó resta ó sea de la multiplicación ó división de los números y funciones circulares que representan.

A tal efecto se elige como *unidad logarítmica* ó sea de la característica, una recta ó arco de círculo de longitud suficiente para conseguir la precisión deseada y se la divide en partes proporcionales al valor de las mantisas de los números ó funciones circulares intermedias entre los que tienen por característica dos números consecutivos y escribiendo sobre las líneas de subdivisión, no su valor, sino el de los números ó grados, cuya longitud logarítmica representan, estos nos dirán desde luego el resultado de la operación, cuando se suman ó restan dos longitudes logarítmicas.

Es decir: qué si elegimos como unidad logarítmica 20 centímetros, sabiendo que la característica de 10 es 1 y la de 100 es 2, para tener las magnitudes logarítmicas de los números intermedios nos bastará ir señalando á partir del extremo marcado 10 las magnitudes en centímetros y mm. que resulten de multiplicar 20 por la mantisa de los números intermedios que hemos de marcar, pues es indudable que no lo podrán estar todos, y así tendremos:

				Diferencias
para el número	11	20 × 0'0414 = 0'828 centímetros.		
»	» 12	20 × 0'0792 = 1'584	»	0'756
»	» 13	20 × 0'1139 = 2'278	»	0'694
. . . . .				
. . . . .				
»	» 40	20 × 0'6021 = 12'042	»	0'214
»	» 41	20 × 0'6128 = 12'256	»	0'208
»	» 42	20 × 0'6232 = 12'464	»	

Hemos consignado la diferencia entre la magnitud logarítmica de los números sucesivos para que se vea que no puede ser la misma la subdivisión que de ellas se haga para expresar toda la posible con la suficiente claridad, condiciones ambas necesarias, y por eso en la escala de Porro, que adoptó esta unidad logarítmica, se subdivide en 10 partes cada una de las magnitudes logarítmicas comprendidas entre los números sucesivos de 10 á 20, en 5 las de los de 20 á 40 y en 2 las de los de 40 á 100 y lo propio hace en la escala de 100 á 1000 ó de característica de 2 á 3, que pone á continuación de la otra, porque es sabido que es idéntica la mantisa de los números décuplos, es decir, la de 11 que la de 110, la de 12 que la de 120, etc., y por consiguiente las subdivisiones que en la primera parte de la escala indican décimas, en la segunda lo hacen de las unidades; las que en la primera, quintos ó dobles décimas, en la segunda dobles unidades y las que en la primera, mitades ó cinco décimas, en la segunda cinco unidades; de manera que las dos partes de la escala solo difieren en los números correspondientes á las longitudes logarítmicas, que ordenadamente se escriben sobre ellas.

Las escalas de los senos y tangentes se subdividen por el mismo procedimiento y se clasifican las subdivisiones con arreglo á los mismos principios; pero, como los correspondientes á los arcos de 0^c á $0'64^c$ comprenden 8 unidades, se prescinde de ellos subdividiendo solamente los comprendidos entre las características 9 y 10 y considerando que en aquellos pequeños ángulos las mantisas son iguales á las de sus décuplos ó céntuplos, se utilizan estos con las escalas de característica de 8 á 9 ó de 9 á 10 y los resultados se dividen por 10 ó por 100 segun los casos; es decir que si se tuviera que utilizar en el cálculo el seno de 10' multiplicándole por 10 resultaría el sen. 1^c, que encontrándose en la escala de 8 á 9 de característica se podria utilizar, pero el resultado se dividiría por 10 y si aquel arco fuera solo de 5' se podria multiplicar por 100 y hallándose en dicha escala se conseguiria el resultado dividiendo por 100 el que en la escala se encontrare: esto se hace para simplificar el cálculo, pero, como conviene reducir en lo posible estos arcos supuestos, es preferible utilizar el menor múltiplo posible y así en este segundo caso se debe multiplicar por 20 en vez de hacerlo por 100.

Es de advertir que en estos cálculos, como en todos los logarítmicos, se ha de tener en cuenta la característica de los términos que se combinan y la manera como se hace para deducir el número de cifras del resultado, lo cual se hace de memoria muy fácilmente, y no olvidar que cuando entra en la combinación una ó dos funciones circulares, se ha de restablecer el radio de las Tablas; esto es, que si se suma la magnitud logarítmica de un número con la de un seno, v. gr., de característica 9, el resultado se ha de dividir por 10, porque realmente á aquel le corresponde —1 al restablecerse el radio de las Tablas y por 100 si aquel es de los comprendidos entre las características 8 y 9.

Para evitarse tener en cuenta estas y otras convenciones es por lo que muchos prefieren á los valores logarítmicos de los senos, tangentes, etc., los naturales ó sean los correspondientes al radio 1.

Debe tambien tenerse presente que la llamada escala de *Senos cuadrados* no es realmente de estos sino de la diferencia entre ellos y el cuadrado del radio de las Tablas y por consiguiente son magnitudes negativas, que se han de restar de las correspondientes á la del valor de g,

con que se combinan para deducir las distancias horizontales, puesto que siempre el radio es mayor que el seno, excepto cuando es de 100°, lo que expresa que la visual es horizontal y por consiguiente iguales el número generador, g, y la distancia.

Conviene hacerse bien cargo de esto, porque es muy general la falsa creencia que combatimos, y para ello basta resolver por logaritmos la fórmula á que se refiere, restableciendo el radio de las Tablas.

$$\text{De la fórmula } D = g.\ \text{sen.}^2\varphi$$
$$\text{resulta } \text{Log. } D = \text{Log. } g + 2\ \text{Log. sen. } \varphi - 20$$

y como 2 Log. sen. φ estará ordinariamente comprendido entre las características 19 y 20 y al sumarse con la magnitud logarítmica de Log. g, daría una extraordinariamente grande, mayor de 20 veces la unidad de la escala, lo que haría muy difícil su construcción y manejo, en lugar de hacer la suma de las dos primeras magnitudes logarítmicas y despues la resta indicada, se resta de la primera la diferencia 20 — 2 Log. sen. φ, que ordinariamente no llega nunca á la unidad logarítmica y así con una pequeña escala se consigue el mismo objeto sencillamente.

Podría hacerse lo mismo con las demas escalas utilizando los complementos logarítmicos; pero como habrían de contener los de todos los arcos, esto equivaldría á numerarlas al revés y es mas sencillo hacerlo directamente y tener en cuenta su característica para dividir el resultado por 10, 100... segun que esta sea de 9, 8... lo que equivale á restablecer el radio de las Tablas, que sabemos tiene 10 de característica.

En algunas ocasiones conviene utilizar los complementos y se utilizan por los que comprendiendo la teoría tienen alguna práctica en el manejo de las Escalas y Reglas logarítmicas, porque así consiguen el resultado en la parte de la Regla en que es mas fácil observarle y apreciarle con mayor precisión.

Esta depende principalmente de la magnitud de la unidad logarítmica utilizada, porque resultando proporcionales á ella las distintas subdivisiones, es natural que mejor se aprecien sus partes cuanto mayor sea aquella, dentro se entiende de los límites que puede alcanzar en tales aparatos.

Pero la precisión en la apreciación de las magnitudes logarítmicas no depende solo y exclusivamente de la correspondiente á la unidad, porque es indudable que en ello influye mucho la delicadeza de las líneas que limiten las diferentes porciones, en que pueda subdividirse y la manera de apreciarlas.

Si las líneas son gruesas ó las rayas profundas, aunque se tenga en cuenta que es su eje ó línea media la que ha de servir de límite á la magnitud que se considera, no podrán apreciarse sus partes como cuando aquellas son delgadas y poco profundas con tal que la vista las perciba claramente, pues quedando los intérvalos en iguales condiciones de visibilidad será mas fácil la subdivisión óptica.

Tampoco se apreciará con la misma precisión si la fracción está señalada con la punta de un compás que con una línea adyacente, que sin interceptar la magnitud apreciable permite comparar las dos porciones, en que queda dividida la señalada en la Escala ó Regla y ademas al penetrar mas ó menos la punta del compás ha de hacer variar la magnitud con él tomada ó trasmitida y por esto y por la mayor molestia que produce su uso ha sido abandonado.

Prescindiendo de estas influencias indeterminables y ateniéndose solo á la agudeza de la vista, que admite sea de 98″, el ilustre Salmoiraghi calcula (1) que la *precisión* que se puede conseguir con las reglas ordinarias de unidad de 125 milímetros es de $^1/_{318}$ y en esta proporción las que corresponden á las diferentes unidades, demostrando que la precisión es la misma en todas las partes de la escala siquiera sean muy diferentes las porciones en que se subdivide y como la precisión necesaria en los cálculos topográficos ordinarios debe ser de $^1/_{500}$ admite como suficiente la unidad de 20 centímetros utilizada por Porro; si bien debiera duplicarse para po-

(1) Istrumenti e metodi moderni... pág. 778.

der realizar por este medio los cálculos que exigen la precisión de $^1/_{1000}$ como ocurre, v. gr., en los de las bases de operación; pero como esto implicaría que las escalas ó reglas alcanzaran la longitud de 80 á 100 centímetros y ofrecerían mucha dificultad en su manejo, se sustituyen ordinariamente con Tablas especiales, aunque, como verémos luego, pudieran serlo en muchos casos por nuestro Círculo logarítmico de grandes dimensiones.

Todo esto consignado como antecedentes necesarios veamos en que consisten las principales Escalas y Reglas utilizadas.

ESCALAS DE PORRO

En las dimensiones de las que se destinaron al comercio las consigna Salmoiraghi en la lámina 15 de su excelente libro antes por nota citado.

La unidad logarítmica utilizada es de 20 centímetros. La escala inferior es la de *partes iguales*, en que los 40 centímetros ó dos unidades logarítmicas están subdivididas en dobles milímetros y dobles centímetros con las decenas escritas por debajo de estos de 0 á 200.

Esta escala sirve para formar las demas y para apreciar numéricamente la magnitud de las mantisas de sus partes.

Sobre la precedente se encuentra la *escala de los números*, en que constan las magnitudes logarítmicas de las décimas de 10 á 20, de las dobles décimas de 20 á 40 y de las medias unidades de 40 á 100 con la numeración de las unidades sucesivas en la primera porción, de las medias decenas en la segunda y de las decenas en la tercera, comprendiendo la primera unidad logarítmica de la escala.

Como ordinariamente los cálculos exigen dos unidades, á continuación se halla otra con subdivisión enteramente igual, por la razón antes consignada; pero con la numeración de las decenas seguidas de 100 á 200 en la primera parte, de 5 en 5 decenas de 200 á 400 en la segunda y de centena en centena de 400 á 1000 en la tercera.

Debajo se consignan las características colocándose 1 debajo del 10, 2 debajo del 100 y 3 debajo del 1000 con cifras góticas mas gruesas para que se distingan claramente.

Es de advertir que en ninguna de las escalas hay línea en dirección de la longitud de la unidad característica y que las magnitudes logarítmicas están determinadas por líneas de distinta longitud perpendiculares á la dirección de aquella, lo que, si da mas claridad, tambien expone á que no colocándose las puntas del compás en puntos que correspondan á la misma paralela imaginaria, resulta la distancia mayor que la verdadera motivando especial atención para evitarlo.

Encima de la misma escala se consignan los senos de los ángulos de $0'01^c$ y $199'99^c$ sobre la línea del número 10 ó sea en el extremo de la izquierda, de 50" sobre la del 15, de 2' y 98' sobre el 20, 3' y 97' sobre el 30, etc., la característica 7 sobre la división correspondiente al número 63'5, la 8 sobre la de 636, y finalmente 1^c y 199^c sobre la del 1000 motivando alguna confusión, pero al mismo tiempo grande uniformidad en todas las escalas.

La inmediatamente superior comprende las magnitudes logarítmicas de los senos de los ángulos de 1^c y 199^c á 100^c y los cosenos correspondientes que van escritos por debajo dejando á la derecha espacio bastante para la escala de sen.ª

En correspondencia con la escala de los números, en la de los senos de 1^c á 2^c se marcan las magnitudes logarítmicas de minuto en minuto; de 2^c á 4^c de 2' en 2'; de 4^c á 10^c de 5' en 5'; de 10^c á 20^c de 10' en 10', de 20^c á 40^c de 20' en 20'; de 40^c á 60^c de 50' en 50'; de 60^c á 90^c de grado en grado y de 90^c á 100^c, 5^c.

En la escala superior destinada á los *Tangentes* de 0^c á 50^c y los cotagentes de 100^c á 150^c se hace lo mismo hasta los 20^c y 80^c respectivamente y en el resto se marcan las magnitudes de 20' en 20' por no permitir otra subdivisión las magnitudes diferenciales dejando á la derecha espacio bastante para la escala de seno-versos naturales con R = 1.000.

Como la escala de sen.ª solo comprende 36'5 mm., de 120^c á 140^c solo se señalan los 50', de 107^c á 120^c los grados enteros y de 105^c á 100^c nada.

Fig. 93

Finalmente para evitar equivocaciones en los signos de las funciones circulares, sobre las escalas van indicados los que corresponden á los senos y cosenos, tangentes y cotagentes segun el cuadrante en que terminan los arcos correspondientes.

Dice Salmoiraghi que estas escalas han sido de uso muy general; sin duda esto habrá ocurrido en Italia; pero como no ha sucedido lo mismo en las demas naciones y consideramos de mas fácil manejo las reglas subdivididas por características enteras, si bien hemos creído oportuno describir aquellas en honor al eximio Porro, que apropió á los cálculos taquimétricos las ordinarias antes utilizadas dando la norma á las despues combinadas al mismo objeto, prescindimos de dar detalles sobre su uso por no alargar innecesariamente este Artículo.

REGLA LOGARÍTMICA ESTADIMÉTRICA CENTESIMAL

Damos este nombre á la de uso mas general entre los Topógrafos para distinguirla de las comunes de cálculo y otras especiales y por no saber con certeza, aunque lo atribuyen á Moinot, quien fué el que primero hizo su combinación, algo diferente de la adoptada por el eximio Porro en sus escalas.

En la de ¼ la representamos en la figura 93 con separación de sus partes para que se vean mejor las condiciones de cada una y las de las distintas escalas en ellas comprendidas.

La integran dos partes diferentes: una fija, *la regla*, representada en la figura *A* y la otra móvil, *la reglilla*, cuyas caras se representan en las figuras *B* y *C*: esta corre libremente dentro de aquella de manera que sus bordes coincidan exactamente con las partes laterales salientes de la primera y como en estas se encuentran dos escalas logaritmicas de los números de 10 á 1000 y en una de las caras, *C*, de la reglilla por un lado la de partes iguales y dos inversas de senos^a y en el otro la de las tangentes y cotagentes de característica de 8 á 10 ó sea de los arcos 0'638^c á 50^c y sus complementos y en la cara opuesta, *B*, otra de los números de 10 á 1000 enteramente igual á las dos de la regla y otra de los senos de 0'638^c á 100^c y sus complementos, se comprende fácilmente que se pueden combinar de manera que se sumen ó resten los logaritmos de los números con los complementos de los senos^a para calcular las distancias horizontales en función de g y sen.^{a} φ (fórmula 1.ª del número 80); los de los números con los de las tangentes ó cotangentes para resolver la 2.ª fórmula; los de los números con los de los senos y cosenos para resolver las fórmulas 3.ª y 4.ª, los de los números entre sí para hacer multiplicaciones y divisio-

nes y los demas cálculos logarítmicos y finalmente de los números con la de partes iguales para determinar el valor real de una mantisa cualquiera.

La unidad logarítmica es tambien de 20 centímetros comprendiendo dos unidades la regla y reglilla, que, para indicar la clase de cada escala, se alargan á la izquierda 21 mm. y 8 á la derecha. (1).

La numeración y subdivisión de las escalas de los números es la misma dicha para las de Porro y en las de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes se hace coincidir muy acertadamente las características 8, 9 y 10 con las líneas de las magnitudes logarítmicas de los números 10, 100 y 1000, lo cual hace mas sencillo el uso de las escalas, siquiera con ello no se correspondan con tanta homogeneidad las subdivisiones de las escalas respectivas como en las de Porro.

No creemos necesario entrar en mas detalles sobre las diferentes escalas integrantes de la Regla, á que nos referimos, suponiendo que nuestros lectores conocen bastante los logaritmos de los números y de las funciones circulares y que recordarán lo que hemos dicho (número 8 del volúmen I) sobre la manera de reducir las correspondientes á todos los ángulos ó arcos de 0^c á 400^c á las de los de 0^c á 100^c en los senos y de 0^c á 50^c en las tangentes; pero sí les hemos de aconsejar que antes de empezar á manejar la Regla logarítmica se enteren bien de lo que vale cada una de las magnitudes en que se divide y que hagan algunos ejercicios con ella para no incurrir despues en equivocaciones, así como tambien que al mismo efecto clasifiquen los cálculos de manera que hagan los de igual clase seguidamente; pues si se realizan los diferentes que exigen las coordenadas de cada punto sucesivamente, no solo se pierde mucho tiempo en el cambio de escala sino que obliga esto á fijar la atención de una manera muy molesta induciendo á equivocaciones; al mismo fin se ha de empezar por poner en los resultados el signo que les corresponda, lo cual no ofrece ninguna dificultad en vista de los valores de φ y de θ teniendo en cuenta lo que sobre este particular digimos en el antes citado número 8.

No podemos entretenernos en detallar el manejo de esta Regla explicando los casos que pueden ocurrir; con algunos ejercicios en que se comparen sus resultados con los conseguidos por logaritmos ó Tablas especiales (2) se resolverán fácilmente todas las dudas y se adquirirá una idea exacta sobre la precisión con que por su medio se realizan los cálculos y cuando conviene mas utilizar las magnitudes logarítmicas directas, las complementarias ó al revés, pero, para dar una idea de su manejo y consignar al propio tiempo algunas consideraciones críticas, determinarémos por su medio las coordenadas mixtas y ortogonales correspondientes á las polares medidas para un punto.

Sean estas: $g = 124'5$; $\varphi = 114'64^c$; $\theta = 382'17^c$ é $i—m = —0'37^m$

Para hallar el valor de D segun la fórmula 1.ª del número 80, teniendo en cuenta lo dicho sobre la interpretación que se le ha de dar y las magnitudes representadas en las dos escalas de senos cuadrados, que en sentido contrario aparecen en la cara *C* de la reglilla á continuación de la de partes iguales, se procederá de la manera siguiente:

Con la 2.ª, se hace coincidir su extremo de la derecha con la magnitud logarítmica del número 124'5, valor de g, y en frente de $114'64^c$ de la escala de senos² se aprecia en la de los números la distancia 118'1, que será el valor de D.

La coincidencia del extremo de la escala de senos² con 124'5 de la de los números se hace con bastante facilidad y precisión con buena vista; pero ya es mas difícil deducir la distancia 118'1 de la magnitud logarítmica del seno² de 114'64, porque, como esta no está marcada sino apreciada, esta coincidencia de dos apreciaciones molesta bastante y no se hace fácilmente.

(1) Estas indicaciones de las escalas, que aparecen en las Reglas del comercio, se han suprimido porque por su pequeñez no podrían leerse en la figura.

(2) En la Instrucción sobre nuestro Círculo logarítmico y doble trasportador se encuentran numerosos ejemplos de todos los cálculos que pueden ocurrir al Topógrafo con los resultados obtenidos con aquel y con las Tablas taquimétricas.

Con la 1.ª de las dos escalas de senos² se hace coincidir con la magnitud logarítmica de 124'5 en la escala de los números la de 114'64ᶜ en aquella y su extremo izquierdo señala en la de los números la distancia 118'1 y como se encuentra en la misma normal que la característica 9 de la escala de tangentes, esta coincide tambien en la otra de los números, que se encuentra en la parte superior de la regla con la misma distancia; de suerte que sin tocar la reglilla está dispuesta para determinar el valor de z' segun la fórmula 2.ª evitando la molestia de hacer una coincidencia y una apreciación, por lo que es la primera de las dos escalas de senos² la que ordinariamente se prefiere.

Las indicadas posiciones de las escalas de senos² con relación á la de los números expresan claramente que de la magnitud logarítmica del valor de g se ha restado el complemento logarítmico del seno² de φ, como debe hacerse, pues de la fórmula $D = g.\,sen.^2\,\varphi$ se deduce resolviéndola por logaritmos y restableciendo el radio de las Tablas,

$$Log.\ D = Log.\ g + Log.\ Sen.^2\,\varphi - Log.\ R^2 = Log.\ g. - (Log.\ R^2 - Log.\ Sen.^2\,g)$$

y como ya hemos dicho que las magnitudes logarítmicas comprendidas en las llamadas escalas de senos² son las correspondientes al segundo término de esta igualdad, queda resuelta con la resta hecha con la reglilla en la regla.

Resolviendo por logaritmos la 2.ª fórmula

$$z'\,(1) = D.\ cot.\ \varphi$$

y como se ha de restablecer el radio de las Tablas, se tiene:

$$Log.\ z' = Log.\ D + Log.\ Cot.\ \varphi - 10$$

por consiguiente conservando la reglilla en la posición que tomó al calcular el valor de D, con el que coincide la característica 9 de las tangentes, basta ver con que número de la escala de estos coincide la tangente de 14'64ᶜ para tener el valor de z' multiplicado por 10, porque se ha hecho la coincidencia de la magnitud de la distancia con la característica 9 de las tangentes sumándolas y hay que restar la de 10 correspondiente al radio; si se hubiera hecho aquella coincidencia con la característica 8, como se hace cuando el valor de φ es pequeño, habría que dividir por 100 el resultado, y la división sería inútil si la coincidencia se hiciera con la característica 10 ó extremo de la derecha de la escala de tangentes y cotangentes, porque tang. α = cot. (100 + α); el operador debe utilizar en cada caso la coincidencia que mas le convenga y obrar en consecuencia evitando equivocaciones.

En el caso de que nos ocupamos se puede hacer la coincidencia con las características 9 y 10 dando con la primera 276'2, que se reduce á 27'62, y con la segunda 27'62, cuya apreciación es mas sencilla en la última posición y menos expuesta á equivocaciones, de manera que, cuando sea posible utilizarla, debe preferirse por tener esto mas importancia que determinar con una sola posición de la reglilla la distancia y la tangente.

Hallado el valor de z', el de z será (2)

$$z = z' + i - m = 27'62 - 0'37 = 27'25 \text{ metros}$$

Para determinar los valores de x é y mediante las fórmulas 3.ª y 4.ª empezarémos por ver qué signos les corresponden y á que arcos del primer cuadrante hemos de reducir el valor de θ de conformidad con lo indicado en el número 8 del volúmen I y empezando por poner el signo — á las x y el + á la y utilizarémos despues para la primera el seno de 17'83ᶜ diferencia de 382'17 á 400ᶜ y para la segunda el de 82'17, que es igual al coseno de 182'17ᶜ

Para resolver dichas fórmulas por logaritmos se ha de restablecer el radio de las Tablas con lo cual se convierten en las siguientes:

---

(1) Para no confundir la tangente con la altura distinguimos la primera con la designación de z'

(2) Si el valor de φ fuera menor que 100c el de z' sería negativo y habría de cuidarse de poner el signo desde luego, porque en el cálculo solo se determinan los valores absolutos de las tangentes.

La 3.ª $x = D \text{ sen. } \theta$, en $\text{Log. } x = \text{Log. } D + \text{Log. sen. } \theta - 10$

La cuarta $y = D \text{ cos. } \theta$, en $\text{Log. } y = \text{Log. } D + \text{Log. cos. } \theta - 10$

y como los valores de θ que hemos de utilizar lo permiten, harémos uso de los complementos logarítmicos haciendo coincidir con la magnitud logarítmica de la distancia en la escala superior de los números el extremo de la derecha de la de los senos ó sea la característica 10 y en frente de los senos de 17'83 y 82'17 encontrarémos en aquella los valores absolutos de x é y.

Procediendo así se encuentran respectivamente 32'64 y 113'5 de manera que serán resumiendo

para $g = 124'5$; $\varphi = 114'64^c$; $\theta = 382'17^c$; $i-m = -0'37$

$D = 118'1$; $z = 27'25$; $x = 32'64$; $y = 113'5$

Dedúcese de lo expuesto que los dos primeros valores se pueden obtener con una sola posición de la reglilla y con otra de la misma invertida los otros dos; con un poco de práctica se hacen los cálculos rápidamente; pero como es necesario fijar bastante la atención y aguzar la vista para no incurrir en equivocaciones y apreciar las magnitudes coincidentes con la necesaria precisión, la vista y los nervios padecen bastante y muy especialmente con las Reglas de madera que hinchándose con la humedad corren mal y acaban con la paciencia del operador mas cachazudo al hacer las coincidencias; sin embargo esta Regla ha prestado y presta muy buenos servicios operando con cuidado.

En el comercio se encuentran de madera de boj, de madera con graduaciones sobre marfil y sobre celuloide y finalmente de metal blanco (maillchort); las primeras son las mas baratas (50 pesetas); pero ofrecen los inconvenientes indicados; las segundas son las mejores; pero por su mucho coste ya apenas se utilizan; las terceras, aunque no se conservan tambien, las sustituyen sin grandes inconvenientes y resultan económicas (70 pesetas) y las últimas, aunque tienen la graduación mas fina, no se lee tan fácilmente y molestan con sus reflejos resultando algo mas caras, (125 pesetas), pero cuando se graduan sobre plata mate con numeración y divisiones negras pueden competir bien con las de marfil.

Todas, empero, tienen el inconveniente de molestar mucho por la necesidad de apreciar pequeñas magnitudes en series de estas que perturban y fatigan la mente y dan ocasión á no pocas equivocaciones y errores no despreciables hasta que se adquiere buena práctica en su manejo.

REGLA Ó ARITMÓGRAFO CASTIGLIANO

Para conseguir mayor precisión en los cálculos sin hacer embarazoso el manejo de la Regla el ilustrado Ingeniero Castigliano adoptando la magnitud de 37 centímetros para la unidad logarítmica, redujo la suya á una sola escala de los números de 10 á 100 consignando las magnitudes logarítmicas de las décimas y los números de las unidades sucesivas de 10 á 25; las dobles décimas de las primeras y las medias decenas de los segundos de 25 á 50 y medias unidades y medias decenas respectivamente de 50 á 100, con lo cual las menores magnitudes tienen de 0'6 á 0'7 mm. y las mayores 1'5 mm. resultando la escala sumamente clara y de fácil apreciación (1).

Siendo la Regla de la misma forma que la antes descrita, la escala está gravada en el borde interno de la parte superior, con el que enrasa el canto de la reglilla, en que solo existen dos señales marcadas A y Z, que comprenden la unidad logarítmica; de manera, que cuando A coincide con la división 10, Z lo hace con la 100.

Abierta en su parte media la reglilla por ella corre y se fija á voluntad un indice, I, que sirve para fijar la magnitud logarítmica de uno de los factores y el producto sobre la escala

(1) En la lámina 15 del libro de Salmoiraghi «Istrumenti e metodi...» aparece en sus verdaderas dimensiones.

única, cuando en ella coincide la señal A ó Z con el otro factor, por cuyo medio utilizando las magnitudes logarítmicas directas ó complementarias y teniendo en cuenta la característica que corresponde al producto ó al cociente, los datos y resultados se encuentran en la escala única haciendo innecesaria la segunda utilizada en las dos antes descritas, pero esto implica alguna mas complicación y mayor atención.

En efecto: para multiplicar ó dividir números entre sí, es necesario hacer la coincidencia de las señales A y Z con los números 10 y 100 y correr el índice de la reglilla hasta que coincida con uno de los factores ó términos y despues de sujetarle á la reglilla, mover esta hasta que la señal A ó Z coincida con el otro factor ó término y despues interpretar el número que señale el índice, segun la operación que se haga, la señal que se haya hecho coincidir y el valor real de los factores ó términos, porque pudiendo suceder que no se hallen en la escala y si sus décuplos ó décimos y variando el valor del resultado segun que se haga la coincidencia con la señal A ó Z se ha de fijar la atención mas que en las escalas de dos unidades por no ser en estas tan frecuente la necesidad de las combinaciones convenientes.

Ademas, un pequeño descuido en apretar el índice I en su lugar oportuno da lugar á un error, que pasa desapercibido para el operador sino lo comprueba, como debe hacerse siempre volviendo á hacer coincidir las señales A y Z con los números 10 y 100 observando despues la indicación del índice I.

Todo esto se simplificará con la práctica del manejo de esta Regla y operando con cuidado; pero lo que no se puede evitar es la necesidad de buscar en una Tabla especial y anotar los valores naturales ó de radio = 1 de las funciones circulares, que entran en los cálculos taquimétricos y como con poca mas molestia se pueden encontrar en las Tablas apropiadas los resultados numéricos mucho mas exactos, no resulta el Aritmógrafo de grande utilidad en nuestro concepto y sin duda en el de muchos Topógrafos, porque no se ha extendido su uso tanto como la Regla antes descrita, aunque se la reconozcan los inconvenientes indicados y al Aritmógrafo las condiciones antes dichas.

REGLA TAQUIMÉTRICA DE SOLDATI

Teniendo en cuenta este ilustrado Ingeniero que era muy frecuente en los Topógrafos limitar el cálculo de las coordenadas ortogonales á las de las estaciones para hacer las oportunas comprobaciones y fijar la situación de los puntos característicos por rumbo y distancia calculando sus alturas con referencia á la de las estaciones respectivas y considerando que el cálculo de aquellas coordenadas debe hacerse con la mayor precisión y al efecto utilizar las Tablas taquimétricas y las distancias y alturas de los puntos característicos por medios rápidos, aunque no sean tan exactos, compuso su Regla, cuyo objeto es deducir estas últimas coordenadas en función de g y φ rápida y simultáneamente, eligiendo al efecto muy acertadamente de las fórmulas consignadas en el número 80 las siguientes:

$$D = g.\ \text{sen}^2\ \varphi$$

y

$$z' = g.\ \tfrac{1}{4}\ \text{sen.}\ 2\ \varphi$$

que por tener un factor comun se prestan fácilmente á ello.

Segun aparece en la figura E de la lámina 15 del excelente libro tantas veces citado, *Istrumenti e metodi...* del ilustre Salmoiraghi, esta Regla en su parte fija es enteramente igual á la generalmente utilizada antes descrita, si bien las dos escalas de números aparecen igualmente numeradas de 10 á 100 en lugar de estarlo la segunda de 10 á 1000; pero la reglilla es diferente; pues por un lado tiene dos de las llamadas escalas de senos^2 enteramente iguales de 50^c á 100^c y dispuestas de manera que cuando la línea de 100^c de la de la derecha coincide con la del número 100 de la segunda escala de la parte fija, la de la misma graduación de la otra escala de senos^2 lo hace tambien con el número 100 de la 1.ª y de aquí resulta que haciendo coincidir aquella graduación con la magnitud logarítmica del valor de g en frente de la que corres-

ponde al de φ, ó mejor dicho á su diferencia á 100^c, se encuentra el valor de D con repetición en las dos escalas.

Al otro lado de la reglilla enrasando con la otra escala de los números de la parte fija hay grabada otra escala con las magnitudes logarítmicas de ½ sen. 2 φ de los ángulos complementarios zenitales ó sean los comprendidos entre $0'638^c$ y $5o^c$ y $5o^c$ y $99'362^c$, que abarcan tambien dos unidades logarítmicas completas, cuyos límites se corresponden con el orígen de las dos escalas de sen.^{2} y coinciden con los de las escalas de los números en cuanto lo hacen dos cualesquiera.

De aquí resulta que al hacer coincidir el 100^c de la escala de sen.^{2} con la magnitud logarítmica del valor de g en la de los números superior, en la inferior coincide con el mismo la característica 10 de la otra escala y por consiguiente al par que en la primera el valor de φ señala la distancia, D, en la inferior el mismo indica el valor de z', de donde resultan conseguidos los dos con grande facilidad y rapidez, en cuyo concepto es esta Regla muy recomendable; pero tiene el inconveniente de no servir para otra cosa; pues ni se pueden hacer con ella multiplicaciones ni divisiones, ni determinar las coordenadas ortogonales planimétricas, que, hágase lo que se quiera, deben siempre calcularse para conseguir los planos numéricos por muchos conceptos preferibles á los en todo ó en su mayor parte gráficos y precisamente debe combatirse la corruptela á cuya generalización tiende el ilustrado Ingeniero Soldati con su Regla.

Esta podría competir con la ordinaria antes descrita solo con poner en la cara opuesta de la reglilla una escala de los números y otra de senos para que pudieran calcularse las coordenadas planimétricas, hacerse multiplicaciones y divisiones, etc., etc., facilitando la generalización de su uso, mientras que tal como hasta ahora se construye tendrá cada vez menos, pues se van comprendiendo mas cada día las grandes ventajas, que ofrecen los planos numéricos sobre los gráficos.

Creemos innecesario describir ninguna otra de las muchas Reglas construídas al mismo objeto, porque en nuestro concepto ninguna ventaja ofrecen á las descritas; pero el que deseare conocer algunas de ellas y los recursos que suministran puede leer con provecho el interesante cuanto pequeño libro del Ingeniero G. Pozzi titulado *Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche*, que el editor Hoepli de Milan ha publicado entre sus importantes manuales.

CÍRCULOS LOGARÍTMICOS DE PORRO

Construyó dos: uno todo de metal y otro de cartón; pero, por resultar demasiado caro (le vendía á 400 liras) el 1.° y estropearse pronto y no resultar muy claro el 2.°, no tuvieron grande aceptación.

El ilustre Salmoiraghi da en la lámina 15 de su citado libro la estampa del 2.°, que resulta bastante confusa y como no explica de que partes accesorias se compone, ni la manera de combinar las diferentes escalas que le integran, es imposible darse buena cuenta de su manejo, que habia de resultar mas molesto y expuesto á equivocaciones que la Regla generalmente adoptada y antes descrita, siquiera las unidades logarítmicas sean mayores que la utilizada en aquella.

CÍRCULO LOGARÍTMICO DE SALMOIRAGHI

En su tantas veces citado libro (página 788) le describe y en la figura 94 le representamos en escala de $^{12}/_{18}$

Como en ella claramente se nota, se compone de dos coronas circulares de metal, de las que, fijándose al tablero por medio de tres puntas la exterior, la interior gira dentro de ella y como en la región de la circunferencia de contacto están grabadas dos escalas logarítmicas de los números de 10 á 100, fácilmente se pueden sumar y restar las magnitudes logarítmicas ó sea multiplicar y dividir los números correspondientes.

Las coronas se construyen ordinariamente de latón niquelado mate y con la graduación sobre plata mate tambien para evitar en las lecturas el inconveniente de los reflejos.

Siendo la magnitud de la unidad logarítmica de cerca de 50 centímetros y no exigiendo la forma circular mas que una, equivale á una Regla de 1 metro, calculando el ilustre Salmoiraghi la precisión en $^1/_{1000}$

Pero tiene el inconveniente de presentar inclinados y hasta invertidos algunas veces los números y que hay necesidad de buscar y anotar los valores de las funciones circulares naturales para conseguir su producto con los valores de g ó de D en la resolución de las fórmulas consignadas en el número 80; lo primero no es un grande inconveniente, porque pronto se habitúa el operador á la lectura de los números inclinados é invertidos y aun parte de estos se

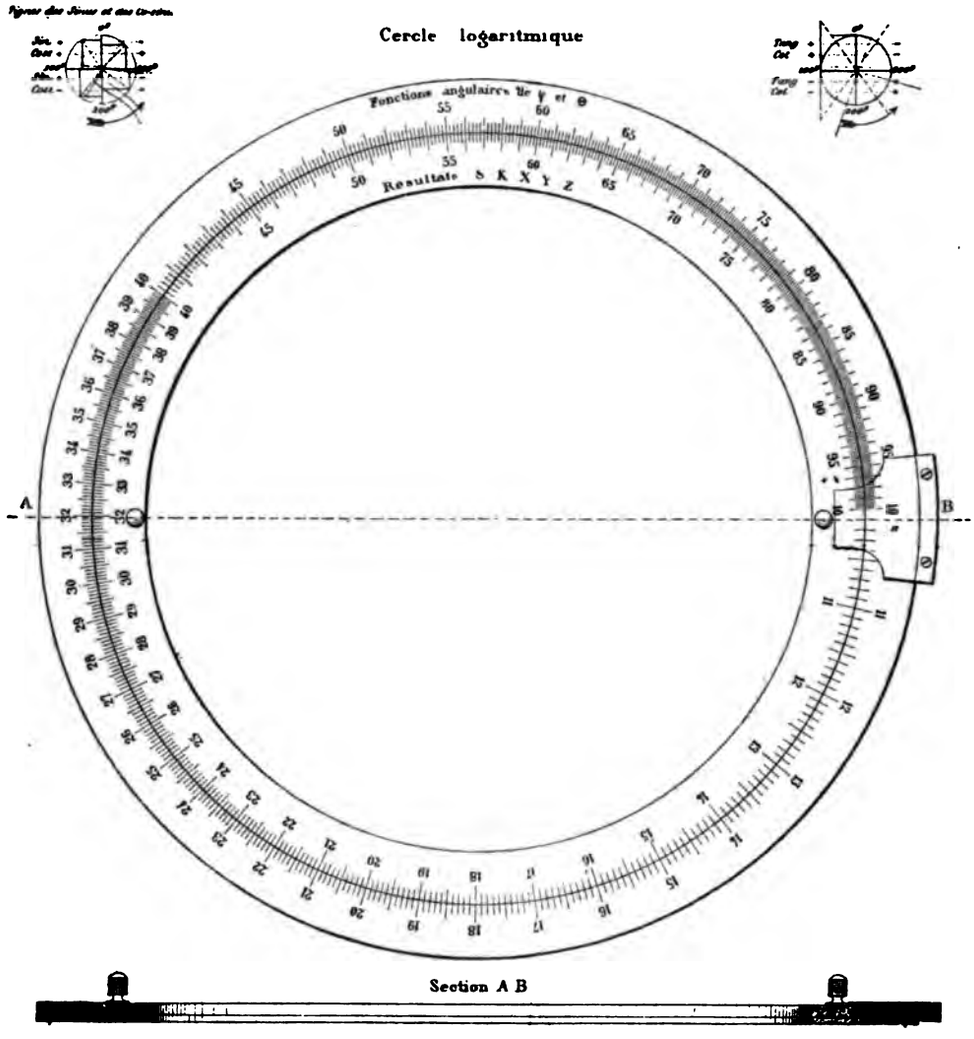


Fig. 94

pueden ya escribir de manera que no aparezcan así, pero lo segundo si lo es, porque exige poco menos tiempo en buscar el factor de la función circular que el que sería necesario invertir para buscar en Tablas apropiadas el resultado que se desea.

Para evitar en parte esto, Salmoiraghi en el pequeño folleto en que describe el aparato, inserta una Tabla de los valores naturales de los Senos y Cosenos, Tangentes y Cotangentes de 0^c á 100^c y otra de Senos cuadrados de 55^c á 145^c de 10' en 10' y un modelo de Registro, en que se consignan para cada punto todos los valores que se han de multiplicar y los productos, y como en las fórmulas taquimétricas ordinarias insertas en el número 80 hay un factor comun, en las tres últimas con una sola posición de la corona interior, una vez determinado el valor de

la distancia, D, se puede obtener el de las tres coordenadas x, y, z abreviando la operación y compensando en parte el tiempo empleado en aquella busca y anotación y poniendo en evidencia que no se gasta mucho mas tiempo en calcular todas las coordenadas que en hacerlo solamente de las de D y Z y por consiguiente que no está justificada la limitación que á estas hacen muchos Topógrafos relativamente á los puntos característicos para determinar despues su situación por rumbo y distancia, cuando mejor y mas fácilmente se hace con las coordenadas planimétricas, ademas de las otras muchas ventajas que ofrecen estas.

Por consiguiente el Círculo de Salmoiraghi puede utilizarse con provecho y no motiva gran gasto, pues el ordinario se vende á 50 francos.

CÍRCULO LOGARÍTMICO Y DOBLE TRASPORTADOR DE RUIZ AMADO

Las muchas molestias y daño á la vista que nos produjo el cálculo con la Regla logarítmica de las coordenadas de dos grandes planos, nos indujeron á sustituirla con otro aparato, que, al par que esto evitara, satisfaciera á otras dos necesidades muy comunes entre los Topógrafos; son á saber: 1.ª gran facilidad en la conversión de los ángulos sexagesimales en centesimales, para que los que tuvieran goniómetros con aquella graduación pudieran calcular sencillamente las coordenadas ortogonales mecánicamente y 2.ª que los que desearan situar los puntos característicos por rumbo y distancia con referencia á las estaciones préviamente situadas por

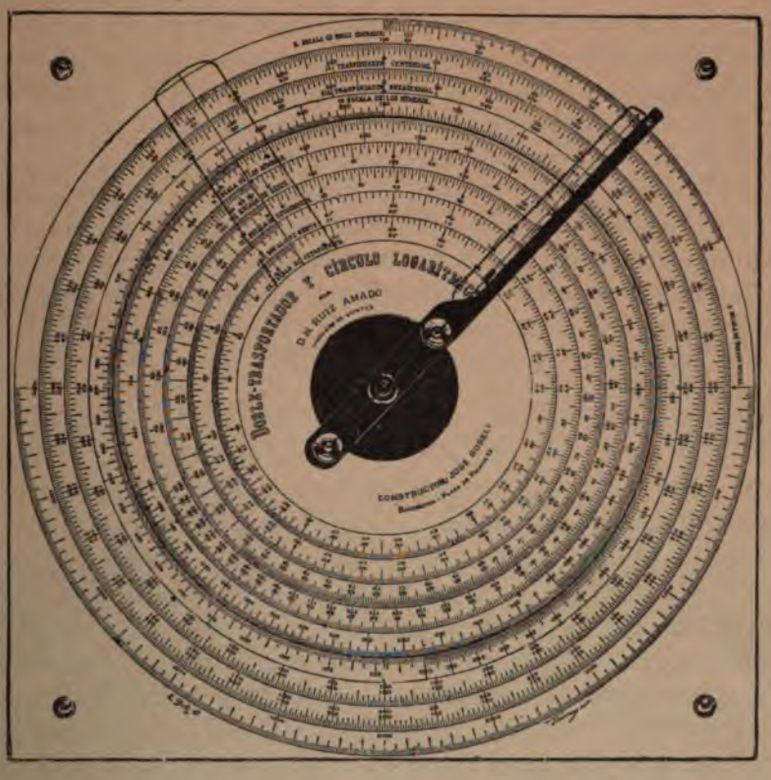


Fig. 95

us coordenadas planimétricas dispusieran de un trasportador sexagesimal y otro centesinal que les permitiera conseguir su objeto con mas sencillez y precisión de lo que se hace con los que se encuentran en el comercio, y para satisfacer estas múltiples necesidades con poco gasto compusimos el doble aparato de que ahora vamos á ocuparnos, si bien aplazarémos para el número 84 la descripción detallada del manejo del trasportador, y pues que al aparato acompaña una detalladísima Instrucción, en que se describen sus condiciones y manejo y se consignan numerosos ejemplos para que sirvan de ejercicio, nos limitarémos á copiar algunos párrafos de aquella y representar el aparato en la escala de $^1/_4$ en la figura 95; de manera que para ver sus partes en la verdadera magnitud basta observarlas con una lente de amplifica-

ción de 4 diámetros, si bien mirando al aparato con los dos ojos se ve aun mejor y mas claro por el distinto fondo de las subcoronas, que en la figura no aparece así, como tampoco la plancha y botón colocados al extremo del talco fijo, con que se hace girar al disco simplificando el manejo del aparato, como se explicó en el suplemento á la Instrucción, que á ella se unió en cuanto se hizo tan sencilla como útil modificación del primer modelo.

Dice así la Instrucción:

CÍRCULO LOGARÍTMICO

«En un tablero cuadrado de 41 centímetros de lado y uno de espesor, compuesto de diferentes cartones expresamente elegidos y bien encolados aparecen, sobre cartulina perfectamente pegada á aquel, *una corona* de 195 milímetros de radio exterior y 145 interior, fija y dividida en cuatro subcoronas, alternando su fondo de blanco ó rosa y siena para que mas fácilmente se perciban evitando se confunda una con otra, y *un disco giratorio* alrededor de un centro de metal, que atraviesa el tablero; cuyo disco tambien de 145 mm. de radio lleva cinco subcoronas de fondo distinto alternado como las precedentes y enrasando la exterior con la interior de la corona fija; en su centro está unido al disco precedente otro de metal de 40 mm. de radio, al que por medio de dos mordazas y tornillos con roldanas se puede fijar una alidada de metal con su correspondiente radio trazado sobre un talco á ella clavado y, en algunos ejemplares por el lado opuesto de la misma alidada, que puede girar con el disco ó independientemente de él apretando las roldanas, dos nónius de marfil, que se corresponden respectivamente con las circunferencias graduadas centesimal y sexagesimal; finalmente en el orígen de la graduación de todas las subcoronas del disco móvil va fijo un talco, en que aparece trazado el radio correspondiente, *para que en sus diferentes posiciones señale sobre las subcoronas de la corona fija la parte recorrida por el disco móvil, y para mover este sin apretar las mordazas de la alidada lleva en su extremo un botón soldado á una pieza de metal.*»

«En la *subcorona* exterior de la *corona fija*, fondo de siena, se halla la **Escala de los senos cuadrados, I,** y como ocupa una pequeña parte de la subcorona, se dedican los cuadrantes 2.° y 3.° á la **Escala de partes iguales, I,** que sirve solo para determinar los logaritmos de las magnitudes de las partes de las otras Escalas, y tiene poca aplicación. La graduación de la primera comprende:

de 100 á 102 grados una división
de 105 á 103 » otra »
de 103 á 110 » » » cada medio grado
de 110 á 125 » » » » 20 cts. de »
de 125 á 140 » » » » 10 » de »

permitiendo apreciar la cuarta parte de la última división en cada caso.»

«En la subcorona siguiente, fondo blanco ó rosa, se halla el **Trasportador centesimal,** dividido en medios grados, en que se pueden apreciar teóricamente dos céntimos de grado mediante el nónius de marfil y directamente cinco céntimos (1) sin molestia y con suma rapidez.

«En la subcorona siguiente ó 3.ª, fondo siena, encuéntrase el **Trasportador sexagesimal, III,** de análogas condiciones al precedente, siendo la apreciación teórica de su nónius 1′ y la directa 3′ lo menos. (1)»

---

(1) Para comprender la facilidad de conseguir esta apreciación, basta tener presente, que, en atención á el medio grado sexagesimal es de 1'5 mm. y el centesimal muy poco menos, se pueden distinguir con pocas hode ensayo el $^1/_2$ $^1/_3$ $^1/_4$ y $^1/_5$ del medio grado y aun en el caso poco probable de que se equivocaran estas partes cuotas, se tendrian las diferencias siguientes:

$$^1/_2 - ^1/_3 = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} = 5' \text{ ó } 0'08 \text{ de grado centesimal.}$$

$$^1/_3 - ^1/_4 = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} = 2'5' \text{ ó } 0'04 \quad » \quad »$$

$$^1/_4 - ^1/_5 = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20} = 1'5' \text{ ó } 0'025 \quad » \quad »$$

Con alguna práctica esta apreciación se hace instantánea y muy aproximadamente.

«En la subcorona 4.ª, última interior de la *corona fija*, fondo blanco ó rosa, se halla una **Escala de los números, IV**, con las magnitudes de la mantisa de los comprendidos entre 100 y 1000, señalándose:

de 100 á 300 las cinco décimas
de 300 á 600 la unidad, y
de 600 á 1000 la doble unidad,

pero permitiendo apreciar bien y pronto la *cuarta cifra*.»

«La subcorona exterior del *disco móvil*, fondo siena, comprende otra **Escala de los números, V**, exactamente igual á la precedente.»

«En la subcorona siguiente, fondo blanco ó rosa, se encuentra la **Escala de los senos, VI**, *de los ángulos comprendidos entre 6'37 y 100 grados ó sean los que tienen sus logaritmos comprendidos entre las caracteristicas 9 y 10, estando señaladas las divisiones*

de 5 en 5 centésimas de 6'37 á 20 grados
de 10 en 10 » de 20 á 40 »
de 20 en 20 » de 40 á 60 »
de 50 en 50 » de 60 á 80 »
de 1 en 1 grado de 80 á 100 »

pudiéndose apreciar generalmente la quinta parte de la última división.»

«En la subcorona siguiente, fondo siena, se halla la **Escala de cotagentes, VII**, *de los ángulos comprendidos entre 106'35 y 150 grados, ó sean los que tienen sus logaritmos comprendidos entre las características 9 y 10 estando señaladas las divisiones*

de 5 en 5 centésimas de 106'35 á 130 grados y
de 10 en 10 » de 130 á 150 »

pudiéndose apreciar la quinta parte de la última división.»

«Encuéntrase en la subcorona que sigue otra **Escala de senos, VIII**, *comprendiendo los de los ángulos entre 0'64 y 6'37 grados, ó sean los que lo están entre las características 8 y 9 estando señaladas las divisiones*

de 1 centésima hasta los 5 grados y
de 2 » » 6'37 »

pudiéndose apreciar la quinta parte de la última división.»

«Finalmente en la subcorona interior hállase otra **Escala de cotangentes, IX**, *comprendiendo las de los ángulos que la tienen entre las características 8 y 9 ó sea de 100'64 á 106'34 grados siendo sus divisiones y apreciación como en la precedente.*»

«En todas las Escalas referidas los arcos graduados, á contar desde su orígen, expresan la magnitud de la mantisa del logaritmo correspondiente al seno[1], número, seno ó cotangente que se indica; se prescinde consiguientemente de las caracteristicas al sumar ó restar tales magnitudes logarítmicas, pero al deducir de la suma ó resta el resultado del cálculo, es necesario tenerlas en cuenta, como se verá inmediatamente despues al explicar sus usos y combinaciones, teniendo desde luego presente las observaciones siguientes:

1.ª En la **Escala de los senos[1]**, I, sus magnitudes logarítmicas *son siempre negativas* y no hay que tener en cuenta su característica, que es *cero;* de suerte que el número resultante no ha de sufrir variación ninguna *en tal concepto.*

2.ª En las **Escalas de los números, IV** y **V**, *como en todas las siguientes, las magnitudes logarítmicas son siempre positivas*; por consiguiente si los números están comprendidos entre 100 y 1000, con tal que en su suma entre sí ó con otras Escalas no resulte una circunferencia completa ó mas, el número resultante es el verdadero; *si la suma pasa de una circunferencia se ha de multiplicar por 10.*

Si por hallarse el número empleado entre 1 y 10 ó entre 10 y 100 se ha de multiplicar por 100 ó por 10 para encontrarle entre los de dichas Escalas, se cuidará de dividir el resultado por 100 ó por 10, segun que se haya empleado uno ú otro factor y cuando por ser el aludido número mayor que 1000, se le ha de dividir por 10, 100 ó 1000, por estos números se multiplicará el resultado del cálculo, siempre que al hacer este no resulte una vuelta completa, pues en este caso el divisor se ha de dividir por 10 ó el factor expresado se ha de multiplicar por 10, todo lo que es mas fácil y pronto en hacer que en explicar, como se comprenderá con los ejemplos que se pondrán despues.

3.ª Siempre que se utilicen las magnitudes logarítmicas de la *Escala de los senos de 6'37 á 100c, VI*, como su característica *es solo* **9** y el radio de las Tablas vale 10 y este se ha de restar resulta una unidad negativa de característica y el resultado que se obtenga *se ha de dividir por 10* solo en tal concepto, teniendo ademas en cuenta lo que proceda en vista de lo dicho en la observación 2.ª; de manera que si segun esta se había de multiplicar por 10 no hay necesidad de variarle, si por 100 solo se multiplicará por 10, si había de dividirse por 10 ó por 100, se hará por 100 ó por 1000, todo lo que se hace facilísimamente de memoria sin fatiga ninguna y muy rápidamente.

4.ª Cuando se emplée la *Escala de los senos, VIII*, de los ángulos de 0'64 á 6'37 grados como su característica *es solo* **8**, se dividirá el resultado, solo por este concepto, por 100, debiendo tener presente lo antes dicho.

5.ª Si el ángulo estuviera comprendido entre 0 y 0'64 grados, se multiplicará por 10 ó por 100 para conseguir otro que se halle en una de las escalas VI ó VIII; se opera con él como queda dicho, y el resultado se divide por el mismo factor por quien se multiplicó el ángulo.

6.ª Cuando se utilice la *Escala de cotangentes, VII*, de ángulos comprendidos entre 106'35 á 150 grados, ó tangente de los ángulos comprendidos entre 6'35 á 50c se procederá como en el caso explicado en la observación 3.ª y si se utiliza la IX, que comprende las magnitudes logarítmicas de las cotangentes de 100'64 á 106'35 ó las tangentes de los ángulos de 0'64c á 6'35c grados se operará como queda dicho en la observación 4.ª

7.ª Cuando se hayan de emplear *cotangentes de ángulos comprendidos entre 100 y 100'64 grados*, su diferencia de 100 se multiplicará por 10 ó por 100, y agregando al producto 100 grados para tener un ángulo comprendido en una de las Escalas VII ó IX, se operará con estas y el resultado se dividirá por el mismo factor empleado.

8.ª Finalmente cuando no se tuvieren los ángulos zenitales, y sí los de inclinación, se convertirán estos en aquellos aumentando 100 grados si son de depresión, y restándolos del mismo número si son de ascensión y se operará con el resultado como queda dicho.»

«Todo esto consignado para evitar dudas á los principiantes, es llegado el caso de dar á conocer los

USOS DEL CÍRCULO LOGARÍTMICO

«Siendo lo primero que puede necesitarse reducir los ángulos sexagesimales á centesimales cuando se haya empleado un teodolito, brújula, pantómetra ó uno de los taquímetros, que tambien los hay con la graduación sexagesimal, empezaré por explicar la indicada reducción ya que unidos al Círculo logarítmico se encuentran los dos trasportadores con los que se consigue facilísimamente.»

«Para hacer dicha reducción, aflojando las roldanas de las mordazas, que sujetan la alidada al disco de metal, se pone esta en libertad haciendo coincidir el radio señalado en el talco con la graduación sexagesimal correspondiente apreciando á la vista la fracción de medio grado que contenga el ángulo y sujetando simplemente con la mano la alidada se leen en el trasportador centesimal los grados correspondientes, se ve si hay ó no medio grado mas, y la fracción de medio grado que aparezca se aprecia por comparación.»

«**La Escala de partes iguales, I**, reducción de la que utilicé para la graduación de todas las demas, solo sirve para dar á conocer numéricamente las magnitudes logarítmicas de las

otras ó sean las mantisas que ellas expresan, y solo tiene verdadera y útil aplicación cuando se desée conocer la raiz de un número dado; ya que entonces, hallando por su medio el logaritmo numérico, dividiéndole por el índice de la raiz y viendo en la escala de los números el que corresponde á dicha mantisa, expresada en la de partes iguales, se conoce la raíz buscada.»

Para indicar el sencillísimo manejo de este aparato nos bastará copiar algunos párrafos del suplemento aludido de su Instrucción especial, dicen asi:

«Para determinar las distancias horizontales, resolviendo la fórmula

$$Log.\ D = Log.\ g + Log.\ Sen.^2\ \varphi - 20,$$

se coge con la mano izquierda el botón del talco fijo al disco y se hace coincidir su radio con el ángulo zenital, φ, en la Escala I; con la derecha se mueve la alidada hasta hacer coincidir su radio con el número g en la Escala IV, y debajo del mismo radio, en la Escala V, se tiene el valor de D, cuidando despues de calcular el número de sus cifras por la regla de las características; leyendo uno los datos y apuntando los resultados, y manejando otro el *Círculo*, no tardarán en resolver esta fórmula mas de 2″ ó 3″, y sin fatiga podrán determinar en una hora 1.000 distancias horizontales.»

«Como las fórmulas para hallar lá diferencia de alturas (z), la abscisa (x) y la ordenada (y) de un punto con referencia al de estación, tienen un sumando logarítmico comun, se pueden resolver á la vez con una sola posición del disco en menos de 5″; en efecto, las fórmulas son:

$$z = z' + (i - m);\ Log.\ z' = Log.\ D + Log.\ Cot.\ \varphi - 10;$$
$$Log.\ x = Log.\ D + Log.\ Sen.\ \theta - 10;$$
$$Log.\ y = Log.\ D + Log.\ Cos.\ \theta - 10;$$

Para resolverlas basta, cogiendo con la mano izquierda el botón del talco del disco, hacer coincidir su radio con el número representativo de D en la Escala IV, y haciendo coincidir *sucesivamente* el de la alidadada con la *Cot.* φ en una de las Escalas VII ó IX, segun corresponda, con *Sen.* θ y *Cos.* θ en una de las Escalas VI ú VIII, debajo del mismo radio se leerá, en la Escala IV, el número correspondiente á z', x é y, cuidando de ver el número de cifras de que se debe componer la parte entera, segun en la Instrucción se explicó.»

«Las diferencias $i - m$, ó sean las que existen entre la altura del instrumento y las que en la mira corresponden al hilo medio, se encuentran en mis registros de campo al lado mismo de las z', se determinan rapidísimamente y están reducidas ordinariamente á pocos centímetros siguiendo mi manera de observar; y, por consiguiente, con estas diferencias y los valores de z' se consiguen los de z rapidísimamente.»

«Para hacer la multiplicación de dos números, se hace coincidir con la mano izquierda el radio del talco fijo al disco con el número de la Escala IV, que representa el factor de menor cifra primera, y con la derecha el de la alidada con el representativo del otro factor en la Escala V, y debajo del mismo radio se lee en la Escala IV el número representativo del producto, que se tendrá inmediatamente calculando el número de sus cifras por la regla de las características y cuidando de añadir una si en la adición de las magnitudes logarítmicas se ha dado una vuelta entera; esto es, si la alidada ha rebasado el orígen de las Escalas en la IV.»

«Las divisiones se realizan de la manera siguiente: con la mano derecha se lleva la alidada hasta hacer coincidir su radio con el número representativo del dividendo en la Escala IV; con la izquierda se mueve el disco hasta que con el mismo radio coincida el número representativo del divisor en la Escala V, á cuyo efecto se levanta un poco aquella para que pase sin rozamiento el disco por debajo de ella, y hechas las coincidencias con su radio del dividendo y divisor en las Escalas IV y V, en la primera de estas se lee con el radio del talco fijo al disco el número representativo del cociente, cuyo número de cifras se calcula por la regla de las características disminuyendo su número en una unidad si el radio del talco fijo al disco ha rebasado hácia la izquierda el orígen de la Escala IV: no se tardará en cada multiplicación y división mas de 3″ por poco prácticas que sean las personas encargadas de realizarlas.»

Para demostrar que con este Círculo se puede conseguir mucha mayor precisión que con la Escala generalmente utilizada y con menos molestia, nos bastará consignar:

1.° Que las graduaciones y los números por sus dimensiones y por destacarse claramente se ven con suma facilidad no existiendo reflejos, que molesten la vista del observador.

2.° Que el distinto fondo de las subcoronas evita la equivocación de unas Escalas con otras.

3.° Que el movimiento algo duro, pero contínuo, del disco y el mas suave de la alidada facilita las coincidencias y

4.° Finalmente que la unidad logarítmica de cada Escala es proporcionada á la necesidad, resultando:

La de los *senos*² *y de partes iguales, I,* de 123 centímetros ó sea mas de 6 veces mayor que la de la Regla;

Las de los *números,* IV y V, de 91 centímetros ó 4'5 veces mayor;

La de los *senos* de 6'37^c á 100^c, VI, de 81'7 centímetros, mas de 4 veces mayor;

La de *cotangentes* de 106'37^c á 150^c, VII, de 75'4 centímetros ó 3'7 veces mayor;

La de los *senos* de 0'64^c á 6'37^c, VIII, de 66 centímetros ó 3'3 veces mayor y

La de las *cotangentes* de 100'64^c á 106'37^c, IX, de 59'7 centímetros ó 3 veces mayor que la de la Regla.

De manera que son indudables las ventajas que sobre ella ofrece nuestro Círculo logarítmico bajo los conceptos de comodidad, rapidez y precisión, si bien debemos confesar que por su volúmen es mas sencillo y cómodo el manejo de la Regla en el campo. (1)

CUADRO GRÁFICO DE MAS Y ZALDÚA

Entre los varios que se han construído para determinar rápidamente las distancias y alturas relativas entre la estación y los puntos vistos, elegimos este por ser el que en mejores condiciones de construcción se halla en el comercio. (2)

Por su medio se resuelven de una vez las fórmulas

$$D = g \operatorname{Sen.}^2 \varphi$$

y

$$z' = \frac{g}{2} \operatorname{Sen.} 2\varphi$$

consignadas en el número 80.

Su fundamento es el siguiente, que ya Barcena explicó detalladamente. (3)

Como el ángulo de inclinación con que se observa la mira no llega nunca á 50^c, los zenitales Z O A y Z O A' (figura 96) tendrán por complemento 100^c — φ ó φ — 100^c, menores siempre que 50^c.

Ahora bien; si sobre O M = g, como diámetro, describimos la semicircunferencia O A M y trazamos el radio O' A, la perpendicular A B y la cuerda A M, tendrémos:

En el triángulo rectángulo O A B

---

(1) El aparato completo en su caja conteniendo el Círculo, un doble trasportador hueco con alidada 40 centímetros con doble graduación, que con las tiras de números que se acompañan la convierten en todas las escalas deseables y con una Instrucción detalladísima con muchos casos prácticos para hacer ejercicios se vende á 70 pesetas en

Barcelona: Biosca y Compañía, Plaza de Palacio, 13.

Zaragoza: Fábrica de instrumentos de precisión de D. Amado Laguna y

Madrid: Almacén de instrumentos de Recarte, Hijo, Carrera de San Gerónimo, 15.

La Instrucción sola en los mismos puntos se vende á 2 pesetas.

(2) Perfectamente delineado sobre buena cartulina, barnizada y sujeta á una tabla y guardado en un estuche de cartón con marco de madera igualmente forrado de buen papel, con el nombre de *Tablas gráficas taquimétricas* se vende en casa de Biosca y compañía y Recarte al precio de 40 pesetas.

(3) Tratado de Taquimetría 1882, página 47 á 49 dando un modelo de aparato que el ilustrado Comandante de E. M. Mas y Zaldúa ha mejorado facilitando su manejo.

$$OB = OA \cos.(100 - \varphi) = OA \text{ sen. } \varphi \qquad (1.^a)$$

y en el O A M

$$OA = OM \cos.(100 - \varphi) = g \text{ sen. } \varphi \qquad (2.^a)$$

y sustituyendo este valor de O A en la (1.ª)

$$OB = g.\ \text{Sen.}^2\ \varphi = D \qquad (3.^a)$$

Tambien se tiene en el triángulo rectángulo A B O'

$$AB = AO' \text{ sen. } 2\,(100 - \varphi) = \frac{g}{2} \text{ sen. } 2\,\varphi = z'$$

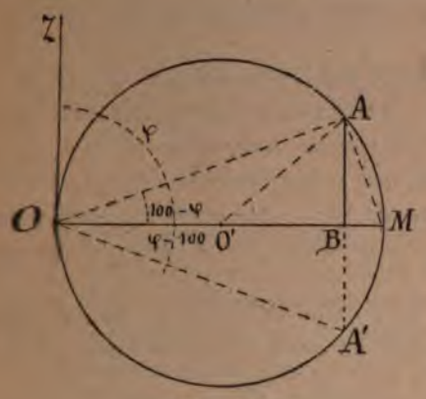


Fig. 96

y como lo mismo resultaría para B A', cuando el valor de $\varphi > 100^c$, resulta idéntica la construcción sin mas diferencia que ser z' positivo cuando $\varphi < 100$ y negativo cuando $\varphi > 100^c$.

Siendo O B = D y A B = z' veamos cómo se puede conseguir obtener los dos valores simultáneamente en función de g y de φ y para abreviar aplicarémos la explicación al modelo de Mas y Zaldúa, que en la escala de ⅓ representamos en la figura 97.

Es de advertir que como de las circunferencias solo se utiliza un arco de 50^c, el aparato se limita á esta parte de ellas y asimismo que los números é inscripciones están puestas para colocarle en posición inversa á la de la figura 96, aunque en nuestro concepto sería preferible la de esta, pues en este caso el hilo indicador del radio correspondiente á cada ángulo se sujetaría con la mano izquierda y con la derecha se movería mas fácilmente la regla graduada perpendicular al radio O M, verdadera base del aparato.

Tiene esta 45 centímetros y está dividida en 300 partes iguales de 1'5 mm. con indicación de sus mitades, que sirven de escala á los valores de *g* correspondiendo al diámetro O M.

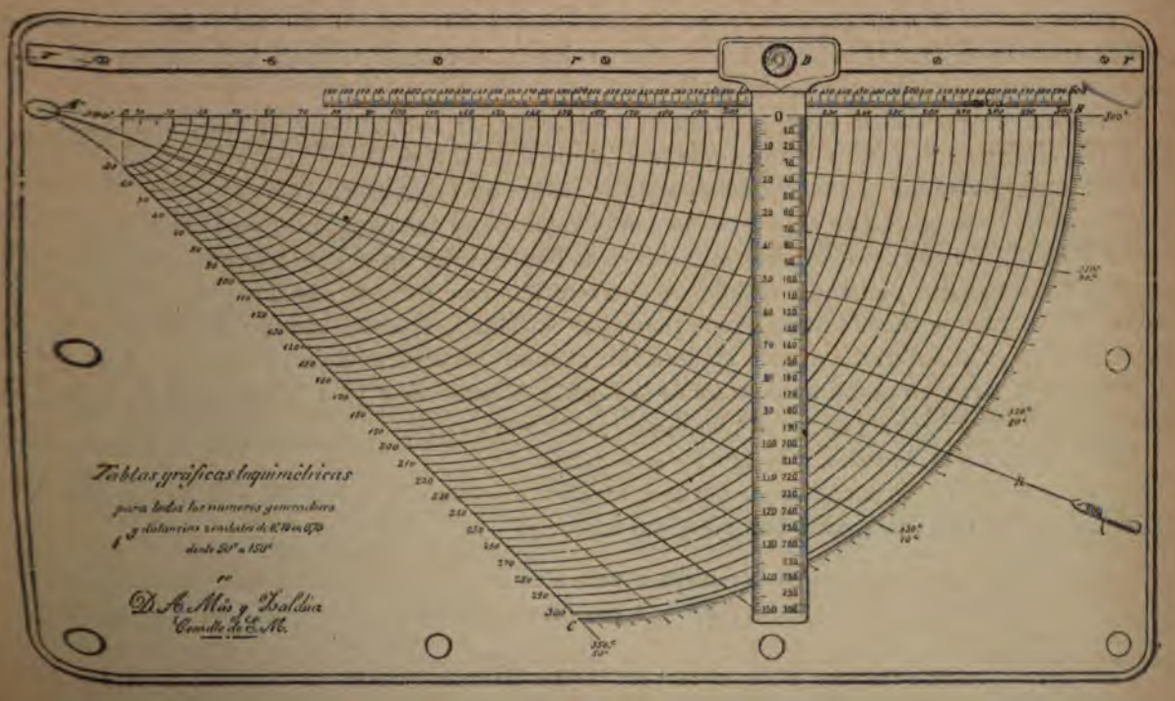


Fig. 97

A partir de la división 30 y considerando como diámetro su distancia al orígen, O, se ha trazado arcos de 50^c, gruesos los de las decenas de *g*, menos gruesos los de las medias decenas y sumamente delgados los de las unidades al objeto de seguirlos con la vista fácilmente y determinar su intersección con el radio correspondiente.

Un arco próximo al exterior está perfecta y claramente dividido en décimas de grado distinguiéndose los medios grados, los grados, medias decenas y decenas por la longitud y grueso de las líneas y las dos últimas clases están numeradas designándose el valor del ángulo y el de su correspondiente complemento para facilitar su busca, y para la de su intersección, con el arco correspondiente al valor de g están trazados los radios de cada grado y para las décimas y centésimas tiene una seda fija al centro en un extremo y en el otro un cilindrito de madera, que permite materializar el radio de aquellas en cada caso.

Clavado paralelamente á la base, O M, hay un listoncillo de buena madera, por el que corre perpendicularmente á la base una reglilla graduada en su parte izquierda enteramente igual que la base para las distancias de 30 á 300 metros con las decenas numeradas de o á 150 y por la derecha otra en escala mitad numerada de o á 300, que se corresponde con otra base que se encuentra sobre la precedente, sirve para las distancias de 130 á 600 metros y lleva numeradas las decenas y distinguidas las medias de estas y las unidades por la longitud de las líneas.

Para facilitar la busca de los arcos correspondientes á cada valor de g, cerca, pero fuera, del radio correspondiente al arco de 50^c y 150^c, se repite la numeración de las dos bases referidas.

Está todo tan bien combinado y grabado y expuesto con tanta limpieza que no se puede pedir mas y por ello su Autor merece nuestros sinceros y calurosos plácemes.

En vista de esto se comprende que el aparato no es mas que la reproducción de la construcción geométrica representada por la figura 96 aplicable á todos los valores de g y de φ que puedan ocurrir, pues

la base no es otra cosa que el diámetro O M en cada caso;

el radio de cada grado ó el determinado para las graduaciones intermedias representa en cada uno la cuerda O A;

la porción de la regla graduada comprendida entre la intersección del radio determinado con la graduación correspondiente á φ y el arco que de la base parte desde la magnitud de g, no es otra cosa que la perpendicular A B = z' y

finalmente la distancia entre el punto de intersección de la reglilla y la base, con quien coincide el cero de aquella, y el orígen de la 2.ª equivale á O B = D.

De aquí resulta que el manejo del aparato se reduce á lo siguiente:

Se hace coincidir el hilo bien estirado con el valor de φ señalado en el arco exterior conservándole así con la mano derecha; se busca en la base el valor de g y se sigue con la vista el arco correspondiente pudiendo señalar su intersección con un fino punzón y con la mano izquierda se corre la reglilla hasta que le toque por su lado izquierdo, cuando por ser $g < 300$ se utiliza la base inferior, ó con el derecho cuando se utilice la base superior por ser $g > 300$ y < 600 y en tal posición *se lee en la reglilla el valor de z' y en la base el de D*, (1) lo cual con un poco de práctica se hace bastante rápidamente.

Si, por ejemplo, se tiene: $g = 246'5$ y $\varphi = 125'60$
haciendo coincidir el hilo con este en el arco exterior y aplicando la reglilla á la intersección de aquel con el arco imaginario comprendido entre 246 y 247, resulta:

en la reglilla... para z'... — 89'0
en la base..... para D..... 208'8

(1) Por ser mas fácil conservar el hilo estirado con la mano izquierda y mover con la derecha la reglilla es por lo que hemos dicho sería preferible colocar al revés el aparato; con él se puede operar así, pero los números aparecen entonces invertidos y aunque se leen bien con alguna práctica, no tanto como cuando están directos.

Calculados estos valores con las Tablas de Jadanza resultará:

para D... 208'744 ó sea o'056 de menos
para z'... 88'777 ó sea o'223 de menos

Debemos advertir que es la primera vez que hemos manejado este Cuadro gráfico y que nuestra vista está muy fatigada y por consiguiente con un poco de práctica y con buena vista se pueden conseguir con bastante rapidez y precisión resultados aceptables; pero no tanto, ni con tanta comodidad, como con nuestro Círculo logarítmico.

82 — Principales Tablas numéricas especiales destinadas á los cálculos topográficos.

De las muchas que se han publicado indicarémos solamente las que mas se han generalizado en nuestro país siguiendo en su descripción el órden cronológico.

Tablas de Carderera y Alonso

En 1877 publicaron estos distinguidos Ingenieros de caminos y canales su tratado de Taquimetría, que contribuyó grandemente á generalizar entre los Topógrafos españoles los procedimientos inventados por el eximio Porro y en él comprendieron dos Tablas, una sexagesimal y centesimal la otra, destinadas á facilitar los cálculos correspondientes.

Como las dos se ajustan á los mismos principios, nos limitarémos á señalar las condiciones de la 2.ª, que con ligeras modificaciones aclaratorias pudiera todavía utilizarse.

En 10 páginas de 10 columnas cada una comprende todos los valores de D, z', x é y en la forma y condiciones tipográficas de las dos que insertamos para que mejor se vea su combinación.

Para el *cálculo de D* sirven de argumentos, como de ordinario, φ y g; el complemento del 1.º se busca en la primera línea superior y el 2.º en la casilla central de cada página descomponiéndole en los sumandos en ella comprendidos ó sus décuplos ó décimos ó céntimos, buscando el resultado en la casilla correspondiente al valor del complemento de φ.

Como solo se comprenden los que difieren en 50', en la 1.ª y última casilla se consigna el valor del resultado correspondiente á 1', que habrá que buscar en la línea del principal sumando de g, correspondiendo el 1.º á los cinco valores siguientes y el 2.º á los cinco que le preceden y multiplicándole por la diferencia entre el valor del complemento de φ medido y el utilizado, el producto *se suma ó resta* á la suma de g con los resultados parciales de sus sumandos, segun que el valor de φ utilizado sea mayor ó menor que el medido, y la mitad del resultado será el valor de D.

Esto es mas largo de explicar que de hacer y con algunos ejercicios previos se realiza fácilmente.

Veamos un caso:

Sea g = 184'6 y φ = 113'85^c

Como el complemento de este valor de φ no se encuentra en la Tabla, buscarémos en ella el de 114^c, que es el mas próximo, y en su casilla y en las líneas respectivamente de 18, de 40 y de 60 encontramos los resultados que hemos de sumar con g.

En la línea de 18 ó 180 encontramos 23 para Δ 1', que debe ser 2'3, que multiplicamos por 15' = 114^c — 113'85^c y como al minuendo le corresponde menor valor de D, el producto le añadirémos á la suma de los resultados parciales tomando la mitad para valor definitivo de D, en la forma indicada en la página 255.

	39° 50′	39°	38° 50′	38°	37° 50′		37°	36° 50′	36°	35° 50′	35°	
Δ 1′	10° 50′	11°	11° 50′	12°	12° 50′		13°	13° 50′	14°	14° 50′	15°	Δ 1′
29	3239	3387	3535	3681	3827	10	3971	4115	4258	4399	4540	28
32	3563	3726	3888	4049	4210	11	4369	4527	4684	4839	4994	31
35	3887	4065	4242	4417	4592	12	4766	4938	5109	5279	5448	34
38	4211	4404	4595	4786	4975	13	5163	5350	5535	5719	5902	37
41	4535	4742	4949	5154	5358	14	5560	5761	5961	6159	6356	40
44	4859	5081	5302	5522	5740	15	5957	6173	6387	6599	6810	43
47	5183	5420	5656	5890	6123	16	6354	6584	6812	7039	7264	45
50	5507	5759	6009	6258	6506	17	6752	6996	7238	7479	7718	48
53	5831	6097	6363	6626	6888	18	7149	7404	7664	7919	8172	51
58	6154	6436	6716	6994	7271	19	7546	7819	8090	8359	8626	54
59	6478	6775	7069	7362	7654	20	7943	8230	8516	8799	9080	57
62	6802	7113	7423	7731	8036	21	8340	8642	8941	9239	9534	60
65	7126	7452	7776	8099	8419	22	8737	9053	9367	9679	9988	63
68	7450	7791	8130	8467	8802	23	9134	9465	9793	10119	10442	65
70	7774	8130	8483	8835	9184	24	9532	9876	10219	10559	10896	68
73	8098	8468	8837	9203	9567	25	9929	10288	10644	10998	11350	71
76	8422	8807	9190	9571	9950	26	10326	10699	11070	11438	11804	74
79	8746	9146	9544	9939	10332	27	10723	11111	11496	11878	12258	77
82	9070	9485	9897	10307	10715	28	11120	11522	11922	12318	12712	80
85	9394	9823	10251	10676	11098	29	11517	11934	12348	12758	13166	82
88	9718	10162	10604	11044	11481	30	11914	12345	12773	13198	13620	85
103	11337	11856	12372	12884	13394	35	13900	14403	14902	15398	15890	99
118	12957	13550	14139	14725	15307	40	15886	16461	17031	17598	18160	114
132	14576	15243	15906	16566	17221	45	17872	18518	19160	19797	20430	128
147	16196	16937	17674	18406	19134	50	19857	20576	21289	21997	22700	142
162	17815	18631	19441	20247	21048	55	21843	22633	23418	24197	24969	156
176	19435	20324	21208	22087	22961	60	23829	24691	25547	26396	27239	171
191	21055	22018	22976	23928	24874	65	25815	26748	27677	28596	29499	185
206	22674	23712	24743	25769	26788	70	27800	28806	29805	30796	31779	199
220	24294	25405	26511	27609	28701	75	29786	30864	31933	32995	34049	213
235	25913	27099	28278	29450	30615	80	31772	32921	34062	35195	36319	227
250	27533	28793	30045	31291	32528	85	33758	34979	36191	37395	38589	241
264	29153	30486	31813	33131	34442	90	35743	37036	38320	39595	40859	256
279	30771	32180	33580	34972	36355	95	37729	39114	40449	41794	43129	270
Δ 2′	21°	22°	23°	24°	25°		26°	27°	28°	29°	30°	Δ 2′
	79°	78°	77°	76°	75°		74°	73°	72°	71°	70°	

	14° 50′	14°	13° 50′	13°	12° 50′		12°	11° 50′	11°	10° 50′	10°	
Δ 1′	35° 50′	36°	36° 50′	37°	37° 50′		38°	38° 50′	39°	39° 50′	40°	Δ 1′
13	8980	9048	9114	9178	9239	10	9298	9354	9409	9461	9511	11
14	9878	9953	10025	10095	10163	11	10228	10290	10350	10407	10462	12
16	10776	10858	10937	11013	11087	12	11157	11225	11291	11353	11413	13
17	11674	11763	11848	11931	12010	13	12087	12161	12231	12299	12364	14
18	12572	12668	12760	12849	12934	14	13017	13096	13172	13245	13315	15
19	13470	13572	13671	13766	13858	15	13947	14032	14113	14191	14266	16
21	14368	14477	14582	14684	14782	16	14876	14967	15054	15137	15217	17
22	15266	15382	15494	15602	15706	17	15806	15903	15995	16083	16168	18
23	16164	16287	16405	16520	16630	18	16736	16838	16936	17030	17119	19
25	17063	17192	17317	17437	17554	19	17666	17773	17877	17976	18070	20
26	17961	18097	18228	18355	18478	20	18596	18709	18818	18922	19021	21
27	18859	19001	19139	19273	19401	21	19525	19644	19758	19868	19972	22
28	19757	19906	20051	20191	20325	22	20455	20580	20699	20814	20923	23
30	20655	20811	20962	21108	21249	23	21385	21515	21640	21760	21874	24
31	21553	21716	21874	22026	22173	24	22315	22451	22581	22706	22825	26
32	22451	22621	22785	22944	23097	25	23244	23386	23522	23652	23776	27
34	23349	23526	23696	23862	24021	26	24174	24322	24463	24598	24727	28
35	24247	24430	24608	24779	24945	27	25104	25257	25404	25544	25679	29
36	25145	25335	25519	25697	25869	28	26034	26192	26345	26490	26630	30
37	26043	26240	26431	26615	26792	29	26964	27128	27286	27436	27581	31
39	26941	27145	27342	27533	27716	30	27893	28063	28226	28383	28532	32
45	31431	31669	31899	32121	32336	35	32542	32741	32931	33113	33287	37
52	35921	36193	36456	36710	36955	40	37191	37418	37635	37843	38042	43
58	40411	40717	41013	41299	41575	45	41840	42095	42340	42574	42797	48
65	44901	45241	45570	45888	46194	50	46489	46772	47044	47304	47553	53
71	49392	49765	50127	50476	50813	55	51138	51449	51748	52035	52308	59
78	53882	54290	54684	55065	55433	60	55787	56127	56453	56765	57063	64
84	58372	58814	59241	59654	60052	65	60435	60804	61157	61496	61819	69
90	62862	63339	63798	64243	64672	70	65084	65418	65862	66226	66574	74
97	67352	67862	68355	68832	69291	75	69733	70158	70566	70956	71329	80
103	71842	72386	72912	73420	73910	80	74382	74836	75270	75687	76085	85
110	76332	76910	77469	78009	78530	85	79031	79513	79975	80417	80840	90
116	80822	81434	82026	82598	83149	90	83680	84190	84679	85148	85595	96
123	85313	85959	86583	87187	87769	95	88329	88867	89384	89878	90350	101
Δ 2′	71°	72°	73°	74°	75°		76°	77°	78°	79°	80°	Δ 2′
	29°	28°	27°	26°	25°		24°	23°	22°	21°	20°	

$g. \ldots = 184'60$

180. . . .	= 162'87	Δ 1' = 2'3
4. . . .	= 3'62	× 15
'6 . . .	0'54	115
	351'63	23
	+ 0'34	34'5
	351'97	
1/2	175'98 = D.	

Este valor de D coincide con el hallado en otras Tablas, pero no solo ha exigido mas trabajo que en algunas, sino que expone á equivocaciones por no indicarse la parte entera de los resultados con referencia á los datos que se consignan en la Tabla, lo cual en verdad sería fácil y necesario corregir.

Para calcular el valor de z', como en la página contigua se encuentra en la 2.ª línea el mismo valor de φ ó de su complemento, se hallan sin hojear, lo cual es una ventaja, los valores correspondientes á los sumandos, en que se descompone el de *D*, ya encontrado y sumándolos con el correspondiente al del producto de Δ 1' en la línea del primero se tiene el valor de z' en esta forma:

170.	72'38	Δ 1' = — 4'8
5	2'129	× 15
'98 . . .	0'426	240
	74'935	48
	— 72	— 72'0
	74'863	
1/2	37'432 = z'	

Este valor de z' defiere en 1'442 m. del calculado por nuestras Tablas y las de Bárcena y en 1'187 m. del obtenido con las de Jadanza, cuya notable diferencia es digna de tenerse en cuenta.

Para calcular las *coordenadas planimétricas* se utilizan los argumentos D y θ encontrándose este en las dos líneas inferiores de cada página de 0^c 100^c, de grado en grado, y las diferencias de 2' en las mismas casillas extremas, de manera que la mitad de la diferencia de θ (reducido á menos de 100^c) al grado mas próximo se multiplica por la indicada en la 1.ª casilla de la izquierda para las cinco siguientes y en la última de la derecha para las cinco anteriores, cuyo producto se suma ó resta con la suma de los resultados parciales obtenidos, como se ha dicho para z' y el resultado será el valor de x ó de y con el signo que le corresponda, segun la regla dada en el número 8 del volúmen I.

Supongamos que el valor de θ = 73'84^c siendo el de D = 175'98 antes obtenido.

No hallándose en la Tabla 73'84^c elegirémos 74^c, que es el mas próximo y encontrándole en dos páginas contiguas harémos los dos cálculos á la vez en la forma siguiente:

170.	156'02	; Δ 2' = 2'2	. . . .	67'52		Δ 2' = 4'8
5	4'59	× 8 = 1/2 16	. . . .	1'98		× 8
'98 . . .	0'92	17'6	. . . .	0'40		38'4
	161'53			69'90		
	— '17			+ 38		
	161'36 = x			70'28 = y		

Como se sabe que en los valores de θ de 0^c á 50^c el seno es menor que el cos. y mayor de 50^c á 100^c es fácil determinar cual de los dos hallados corresponde á x y cual á y; comprobados con las de senos y cosenos naturales resultan exactos.

Para completar la descripción de esta Tabla creemos oportuno indicar á continuación la combinación con que en cada dos páginas contiguas aparecen los valores del complemento de φ y los directos de θ poniendo separadamente cada dos páginas contiguas para que se vea que se complementan al objeto de calcular D y z', y x é y simultáneamente sin tener que mudar la hoja:

1.ª página	$49'50^c$ á 45^c	φ para	D	
	$0'50^c$ á 5^c		z'	
	1^c á 10^c	θ para x é y		
	99^c á 90^c			
2.ª página	$4'50^c$ á 0^c	φ para	D	
	$45'50^c$ á 50^c		z'	
	91^c á 100^c	θ para x é y		
	9^c á 0^c			
3.ª página	$44'50^c$ á 40^c	φ para	D	
	$5'50^c$ á 10^c		z'	
	11^c á 20^c	θ para x é y		
	89^c á 80^c			
4.ª página	$9'50^c$ á 5^c	φ para	D	
	$40'50^c$ á 45^c		z'	
	81^c á 90^c	θ para x é y		
	19^c á 10^c			
5.ª página	$39'50^c$ á 35^c	φ para	D	
	$10'50^c$ á 15^c		z	
	21^c á 30^c	θ para x é y		
	79^c á 70^c			
6.ª página	$14'50^c$ á 10^c	φ para	D	
	$35'50^c$ á 40^c		z'	
	71^c á 80^c	θ para x é y		
	29^c á 20^c			
7.ª página	$34'50^c$ á 30^c	φ para	D	
	$15'50^c$ á 20^c		z	
	31^c á 40^c	θ para x é y		
	69^c á 60^c			
8.ª página	$19'50^c$ á $15'^c$	φ para	D	
	$30'50^c$ á 35^c		z'	
	61^c á 70^c	θ para x é y		
	39^c á 30^c			
9.ª página	$29'50^c$ á 25^c	φ para	D	
	$20'50^c$ á 25^c		z'	
	41^c á 50^c	θ para x é y		
	89^c á 80^c			
10.ª página	$24'50^c$ á 20^c	φ para	D	
	$25'50^c$ á 30^c		z'	
	51^c á 60^c	θ para x é y		
	49^c á 40^c			

Convenientemente modificadas y explicadas estas Tablas habrían sido mas utilizadas de lo que lo fueron.

Tablas de Barcena

[illegible] excelente, aunque deficiente, tra[illegible] de la 3.ª edición [illegible] y aquel insertó una [illegible] y cos.ª de [illegible]

[illegible] para co[illegible] de las coordena[illegible] todos los calcul[illegible]

13

M'	Seno	Coseno	Tang.	Cosen.²	M'	M'	Seno	Coseno	Tang.	Cosen.²	M'
0	0,20279	0,97922	0,2071	0,9589	100	50	0,21047	0,97760	0,2153	0,9557	50
1	0,20294	0,97919	0,2072	0,9589	99	51	0,21063	0,97757	0,2154	0,9557	49
2	0,20309	0,97916	0,2074	0,9588	98	52	0,21078	0,97753	0,2156	0,9556	48
3	0,20325	0,97913	0,2075	0,9588	97	53	0,21093	0,97750	0,2157	0,9556	47
4	0,20340	0,97910	0,2077	0,9587	96	54	0,21109	0,97747	0,2159	0,9555	46
5	0,20356	0,97906	0,2078	0,9587	95	55	0,21124	0,97743	0,2160	0,9555	45
6	0,20371	0,97903	0,2080	0,9586	94	56	0,21139	0,97740	0,2162	0,9554	44
7	0,20386	0,97900	0,2081	0,9586	93	57	0,21155	0,97737	0,2163	0,9554	43
8	0,20402	0,97898	0,2083	0,9585	92	58	0,21170	0,97733	0,2165	0,9553	42
9	0,20417	0,97894	0,2085	0,9584	91	59	0,21185	0,97730	0,2167	0,9552	41
10	0,20433	0,97890	0,2087	0,9583	90	60	0,21201	0,97727	0,2169	0,9551	40
11	0,20448	0,97887	0,2088	0,9583	89	61	0,21216	0,97724	0,2170	0,9551	39
12	0,20463	0,97884	0,2090	0,9582	88	62	0,21231	0,97720	0,2172	0,9550	38
13	0,20479	0,97881	0,2091	0,9582	87	63	0,21247	0,97717	0,2173	0,9550	37
14	0,20494	0,97877	0,2093	0,9581	86	64	0,21262	0,97714	0,2175	0,9549	36
15	0,20509	0,97874	0,2094	0,9581	85	65	0,21277	0,97710	0,2176	0,9549	35
16	0,20525	0,97871	0,2096	0,9580	84	66	0,21293	0,97707	0,2178	0,9548	34
17	0,20540	0,97868	0,2098	0,9579	83	67	0,21308	0,97703	0,2180	0,9547	33
18	0,20556	0,97865	0,2100	0,9578	82	68	0,21324	0,97700	0,2182	0,9546	32
19	0,20571	0,97861	0,2102	0,9577	81	69	0,21339	0,97697	0,2184	0,9545	31
20	0,20586	0,97858	0,2104	0,9576	80	70	0,21354	0,97693	0,2186	0,9544	30
21	0,20602	0,97855	0,2105	0,9576	79	71	0,21370	0,97690	0,2187	0,9544	29
22	0,20617	0,97852	0,2107	0,9575	78	72	0,21385	0,97687	0,2189	0,9543	28
23	0,20632	0,97848	0,2108	0,9575	77	73	0,21400	0,97683	0,2190	0,9543	27
24	0,20648	0,97845	0,2110	0,9574	76	74	0,21416	0,97680	0,2192	0,9542	26
25	0,20663	0,97842	0,2111	0,9574	75	75	0,21431	0,97677	0,2193	0,9542	25
26	0,20679	0,97839	0,2113	0,9573	74	76	0,21446	0,97673	0,2195	0,9541	24
27	0,20694	0,97835	0,2114	0,9573	73	77	0,21462	0,97670	0,2197	0,9540	23
28	0,20709	0,97832	0,2116	0,9572	72	78	0,21477	0,97666	0,2198	0,9539	22
29	0,20725	0,97829	0,2118	0,9571	71	79	0,21492	0,97663	0,2200	0,9538	21
30	0,20740	0,97826	0,2120	0,9570	70	80	0,21508	0,97660	0,2202	0,9537	20
31	0,20755	0,97822	0,2121	0,9570	69	81	0,21523	0,97656	0,2203	0,9537	19
32	0,20771	0,97819	0,2123	0,9569	68	82	0,21538	0,97653	0,2205	0,9536	18
33	0,20786	0,97816	0,2124	0,9569	67	83	0,21554	0,97650	0,2206	0,9536	17
34	0,20801	0,97813	0,2126	0,9568	66	84	0,21569	0,97646	0,2208	0,9535	16
35	0,20817	0,97809	0,2127	0,9568	65	85	0,21584	0,97643	0,2209	0,9535	15
36	0,20832	0,97806	0,2129	0,9567	64	86	0,21600	0,97639	0,2211	0,9534	14
37	0,20848	0,97803	0,2130	0,9566	63	87	0,21615	0,97636	0,2213	0,9534	13
38	0,20863	0,97800	0,2132	0,9565	62	88	0,21630	0,97633	0,2215	0,9533	12
39	0,20878	0,97796	0,2134	0,9564	61	89	0,21646	0,97629	0,2217	0,9532	11
40	0,20894	0,97793	0,2136	0,9563	60	90	0,21661	0,97626	0,2219	0,9531	10
41	0,20909	0,97790	0,2137	0,9563	59	91	0,21676	0,97622	0,2220	0,9531	9
42	0,20924	0,97786	0,2139	0,9562	58	92	0,21692	0,97619	0,2222	0,9530	8
43	0,20940	0,97783	0,2140	0,9562	57	93	0,21707	0,97616	0,2223	0,9530	7
44	0,20955	0,97780	0,2142	0,9561	56	94	0,21722	0,97612	0,2225	0,9529	6
45	0,20970	0,97777	0,2143	0,9561	55	95	0,21738	0,97609	0,2226	0,9529	5
46	0,20986	0,97773	0,2145	0,9560	54	96	0,21753	0,97605	0,2228	0,9528	4
47	0,21001	0,97770	0,2147	0,9560	53	97	0,21768	0,97602	0,2229	0,9527	3
48	0,21016	0,97767	0,2149	0,9559	52	98	0,21784	0,97599	0,2231	0,9526	2
49	0,21032	0,97763	0,2151	0,9558	51	99	0,21799	0,97595	0,2233	0,9525	1
50	0,21047	0,97760	0,2153	0,9557	50	100	0,21814	0,97592	0,2235	0,9524	0
M'	Coseno	Seno	Cotang.	Seno.²	M'	M'	Coseno	Seno	Cotang.	Seno.²	M'

86

Siendo $g = 184'6$; $\varphi = 113'85^c$ y $\theta = 73'84^c$ se tiene:

Para hallar D

$$
\begin{array}{r}
184'6 \\
\times\ 0'9535 \\
\hline
9230 \\
5538 \\
9230 \\
16614 \\
\hline
176'01610 = D
\end{array}
$$

Para z'; 176'02	;	para x; 176'02	;	para y; 176'02
× 0'2209		× 0'91675		× 0'39945
158418		88010		88010
35204		123214		70408
35204		105612		158418
z' = 38'882818		17602		158418
		158418		52806
		x = 161'3663350		y = 70'3111890

Con esta Tabla se procede con mas seguridad que con la precedente y la molestia consiguiente á las largas multiplicaciones se disminuye sin inconveniente suprimiendo algunas cifras decimales de los factores.

Tablas de Cuartero

Este ilustrado Topógrafo las publicó en 1884 habiendo sido tan bien recibidas por los Ingenieros, que se han extendido mucho en el extranjero; agotada la 1.ª edición tenemos noticia de que Recarte Hijo prepara una 2.ª, cuando esto escribimos; si en ella introduce las modificaciones que le hemos aconsejado prestará un buen servicio á los Topógrafos. (1)

Estas Tablas comprenden un volúmen infolio de 304 páginas y con una muy breve é insuficiente introducción se dividen en tres partes; las dos primeras exclusivamente destinadas al cálculo de las distancias horizontales y verticales con los datos g y φ y la tercera á las coordenadas planimétricas, x é y, mediante los argumentos D y θ, para la aplicación de las cuatro fórmulas ordinarias consignadas en el número 80.

La 1.ª parte, la mas característica, comprende 241 páginas para consignar los valores de D y z' de 100ᶜ á 115ᶜ de φ, variando g de 1 á 99, 100, 200 y 300 y φ de 13' en 13' para los de D y de 1' en 1' para los de z' en la forma que aparece en las páginas, que, como muestra, copiamos en las 259 y 260.

De aquí resulta que son excesivamente minuciosas las tangentes, de manera que se repiten inútilmente y necesitándose 16 páginas para cada grado motivan un hojeo molesto, que hace perder bastante tiempo, aunque se ponga índice marginal como acertadamente se hace algunas veces; por lo demas resultan sumamente sencillas y de fácil manejo.

Para hallar por su medio los valores de D y z', únicos á que están destinadas las dos primeras partes, correspondientes á los datos antes admitidos

$$g = 184'6 \quad \text{y} \quad \varphi = 113'85^c$$

basta buscar en la página correspondiente al valor de φ los resultados que presentan para las partes en que se divide el valor de *g* en la forma siguiente:

	D	z'
para 100. . . .	95'37	21'08
80. . . .	76'30	16'86
4'6. . . .	4'39	0'97
	176'06	38'91

Los valores de *g* se buscan en la primera casilla de cada página con esta inicial encabezada; en la segunda se encuentra el de D y en la encabezada con los minutos de φ se halla el valor de la tangente ó z', los que se anotan en la forma indicada sumándolos respectivamente.

Como Cuartero tuvo cuidado al calcular los valores de *D* de tomar el medio de φ, real-

(1) Por temor á que estos no aceptasen la reforma, la 2.ª edición es enteramente igual á la 1.ª, lo lamentamos, porque habría podido mejorarse extraordinariamente sin aumentar el precio ni el volúmen.

g	D	75'	76'	77'	78'	79'	80'	81'	82'	83'	84'	85'	86'	87'
1	0,95	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21
2	1,91	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42
3	2,86	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63
4	3,81	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84
5	4,77	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,06
6	5,72	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,27	1,27
7	6,68	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	48	48	48
8	7,63	67	68	68	68	68	68	68	68	68	68	69	69	69
9	8,58	88	89	89	89	89	89	89	89	89	90	90	90	90
10	9,54	2,09	2,09	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	2,11	2,11	2,11	2,11
11	10,49	2,30	2,30	2,31	2,31	2,31	2,31	2,31	2,31	2,31	2,32	2,32	2,32	2,32
12	11,44	51	51	51	52	52	52	52	52	53	53	53	53	53
13	12,40	72	72	72	73	73	73	73	73	74	74	74	74	74
14	13,35	93	93	93	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95
15	14,31	3,14	3,14	3,14	3,15	3,15	3,15	3,15	3,16	3,16	3,16	3,16	3,16	3,17
16	15,26	3,35	3,35	3,35	3,36	3,36	3,36	3,36	3,37	3,37	3,37	3,37	3,37	3,38
17	16,21	56	56	56	57	57	57	57	58	58	58	58	58	59
18	17,17	77	77	77	78	78	78	78	79	79	79	79	80	80
19	18,12	98	98	98	99	99	99	99	4,00	4,00	4,00	4,01	4,01	4,01
20	19,07	4,19	4,19	4,19	4,20	4,20	4,20	4,20	21	21	21	22	22	22
21	20,03	4,40	4,40	4,40	4,41	4,41	4,41	4,41	4,42	4,42	4,42	4,43	4,43	4,43
22	20,98	61	61	61	61	62	62	62	63	63	63	64	64	64
23	21,94	81	82	82	82	83	83	83	84	84	84	85	85	85
24	22,89	5,02	5,03	5,03	5,03	5,04	5,04	5,04	5,05	5,05	5,05	5,06	5,06	5,07
25	23,84	23	24	24	24	25	25	25	26	26	27	27	27	28
26	24,80	5,44	5,45	5,45	5,45	5,46	5,46	5,47	5,47	5,47	5,48	5,48	5,48	5,49
27	25,75	65	66	66	66	67	67	68	68	68	69	69	69	70
28	26,70	86	87	87	87	88	88	89	89	89	90	90	90	91
29	27,66	6,07	6,08	6,08	6,08	6,09	6,09	6,10	6,10	6,10	6,11	6,11	6,11	6,12
30	28,61	28	28	29	29	30	30	31	31	31	32	32	33	33
31	29,56	6,49	6,49	6,50	6,50	6,51	6,51	6,52	6,52	6,52	6,53	6,53	6,54	6,54
32	30,52	70	70	71	71	72	72	73	73	73	74	75	75	75
33	31,47	91	91	92	92	93	93	94	94	94	95	96	96	96
34	32,43	7,12	7,12	7,13	7,13	7,14	7,14	7,15	7,15	7,15	7,16	7,17	7,17	7,18
35	33,38	33	33	34	34	35	35	36	36	37	37	38	38	39
36	34,33	7,54	7,54	7,54	7,55	7,56	7,56	7,57	7,57	7,58	7,58	7,59	7,59	7,60
37	35,29	75	75	75	76	77	77	78	78	79	79	80	80	81
38	36,24	95	96	96	97	98	98	99	99	8,00	8,00	8,01	8,01	8,02
39	37,19	8,16	8,17	8,17	8,18	8,19	8,19	8,20	8,20	21	21	22	22	23
40	38,15	37	38	38	39	40	40	41	41	42	42	43	43	44
41	39,10	8,58	8,59	8,59	8,60	8,61	8,61	8,62	8,62	8,63	8,64	8,64	8,65	8,65
42	40,06	79	80	80	81	82	82	83	84	84	85	85	86	86
43	41,01	9,00	9,01	9,01	9,02	9,03	9,03	9,04	9,05	9,05	9,06	9,06	9,07	9,08
44	41,96	21	22	22	23	24	24	25	26	26	27	28	28	29
45	42,92	42	43	43	44	45	45	46	47	47	48	49	49	50
46	43,87	9,63	9,64	9,64	9,65	9,66	9,66	9,67	9,68	9,68	9,69	9,70	9,70	9,71
47	44,82	84	85	85	86	87	87	88	89	89	90	91	91	92
48	45,78	10,05	10,06	10,06	10,07	10,08	10,08	10,09	10,10	10,10	10,11	10,12	10,12	10,13
49	46,73	26	27	27	28	29	29	30	31	31	32	33	33	34
50	47,69	47	47	48	49	50	50	51	52	52	53	54	54	55
100	95,37	20,93	20,95	20,9 6	20,98	20,99	21,00	21,02	21,04	21,04	21,06	21,08	21,09	21,11
200	190,74	41,86	41,90	41,92	41,96	41,98	42,00	42,04	42,08	42,08	42,12	42,16	42,18	42,22
300	286,11	62,79	62,85	62,88	62,94	62,97	63,00	63,06	63,12	63,12	63,18	63,24	63,27	63,33
g	D	25'	24'	23'	22'	21'	20'	19'	18'	17'	16'	15'	14'	13'

113.°

g	D	75'	76'	77'	78'	79'	80'	81'	82'	83'	84'	85'	86'	87'
51	48,64	10,68	10,68	10,69	10,70	10,71	10,71	10,72	10,73	10,73	10,74	10,75	10,75	10,76
52	49,59	89	89	90	91	92	92	93	94	94	95	96	96	98
53	50,55	11,09	11,10	11,11	11,12	11,13	11,13	11,14	11,15	11,15	11,16	11,17	11,18	11,19
54	51,50	30	31	32	33	34	34	35	36	36	37	38	39	40
55	52,45	51	52	53	54	55	55	56	57	57	58	59	60	61
56	53,41	11,72	11,73	11,74	11,75	11,76	11,76	11,77	11,78	11,78	11,79	11,80	11,81	11,82
57	54,36	93	94	95	96	97	97	98	99	99	12,01	12,02	12,02	12,03
58	55,31	12,14	12,15	12,16	12,17	12,18	12,18	12,19	12,20	12,21	22	23	23	24
59	56,27	35	36	36	38	39	39	40	41	42	43	44	44	45
60	57,22	56	57	57	59	60	60	61	62	63	64	65	65	66
61	58,18	12,77	12,78	12,78	12,80	12,81	12,81	12,82	12,83	12,84	12,85	12,86	12,86	12,87
62	59,13	98	99	99	13,01	13,02	13,02	13,03	13,04	13,05	13,06	13,07	13,07	13,09
63	60,08	13,19	13,20	13,20	22	23	23	24	25	26	27	28	28	30
64	61,04	40	41	41	42	44	44	45	46	47	48	49	50	51
65	61,99	61	62	62	63	65	65	66	67	68	69	70	71	72
66	62,94	13,82	13,83	13,83	13,84	13,86	13,86	13,87	13,88	13,89	13,90	13,91	13,92	13,93
67	63,90	14,03	14,04	14,04	14,05	14,07	14,07	14,08	14,09	14,10	14,11	14,12	14,13	14,14
68	64,85	23	25	25	26	28	28	29	30	31	32	33	34	35
69	65,81	44	46	46	47	49	49	50	52	52	53	54	55	56
70	66,76	65	66	67	68	70	70	71	73	73	74	76	76	77
71	67,71	14,86	14,87	14,88	14,89	14,91	14,91	14,92	14,94	14,94	14,95	14,97	14,97	14,99
72	68,67	15,07	15,08	15,09	15,10	15,12	15,12	15,13	15,15	15,15	15,16	15,18	15,18	15,20
73	69,62	28	29	30	31	32	33	34	36	36	38	39	39	41
74	70,57	49	50	51	52	53	54	55	57	57	59	60	60	62
75	71,53	70	71	72	73	74	75	76	78	78	80	81	81	83
76	72,48	15,91	15,92	15,93	15,94	15,95	15,96	15,97	15,99	15,99	16,01	16,02	16,03	16,04
77	73,43	16,12	16,13	16,14	16,15	16,16	16,17	16,19	16,20	16,20	22	23	24	25
78	74,39	33	34	35	36	37	38	40	41	41	43	44	45	46
79	75,34	54	55	56	57	58	59	61	62	62	64	65	66	67
80	76,30	75	76	77	78	79	80	82	83	83	85	86	87	88
81	77,25	16,96	16,97	16,98	16,99	17,00	17,01	17,03	17,04	17,05	17,06	17,07	17,08	17,10
82	78,20	17,17	17,18	17,18	17,20	21	22	24	25	26	27	29	29	31
83	79,16	37	39	39	41	42	43	45	46	47	48	50	50	52
84	80,11	58	60	60	62	63	64	66	67	68	69	71	71	73
85	81,06	79	81	81	83	84	85	87	88	89	90	92	92	94
86	82,02	18,00	18,02	18,02	18,04	18,05	18,06	18,08	18,09	18,10	18,11	18,13	18,13	18,15
87	82,97	21	23	23	25	26	27	29	30	31	32	34	34	36
88	83,93	42	44	44	46	47	48	50	51	52	53	55	56	57
89	84,88	63	65	65	67	68	69	71	72	73	75	76	77	78
90	85,83	84	85	86	88	89	90	92	93	94	96	97	98	19,00
91	86,79	19,05	19,06	19,07	19,09	19,10	19,11	19,13	19,14	19,15	19,17	19,18	19,19	19,21
92	87,74	26	27	28	30	31	32	34	35	36	38	39	40	42
93	88,69	47	48	49	51	52	53	55	56	57	59	60	61	63
94	89,65	68	69	70	72	73	74	76	77	78	80	81	82	84
95	90,60	89	90	91	93	94	95	97	98	99	20,01	20,03	20,03	20,05
96	91,56	20,10	20,11	20,12	20,14	20,15	20,16	20,18	20,19	20,20	20,22	20,24	20,24	20,26
97	92,51	30	32	33	35	36	37	39	41	41	43	45	46	47
98	93,46	51	53	54	56	57	58	60	62	62	64	66	67	68
99	94,42	72	74	75	77	78	79	81	83	83	85	87	88	89
100	95,37	20,93	20,95	20,96	20,98	20,99	21,00	21,02	21,04	21,04	21,06	21,08	21,09	21,11
200	190,74	41,86	41,90	41,92	41,96	41,98	42,00	42,04	42,08	42,08	42,12	42,16	42,18	42,22
300	286 11	62,79	62,85	62,88	62,94	62,97	63,00	63,06	63,12	63,12	63,18	63,24	63,27	63,33
g	D	25'	24'	23'	22'	21'	20'	19'	18'	17'	16'	15'	14'	13'

mente no difieren aquellos en ningún caso en lo que correspondería á la diferencia de φ de 13' en 13', sino en 6'5'.

En el cálculo anterior el valor de D y z' correspondiente al sumando 80 se encuentra en la segunda página de las transcritas; el del tercero es igual al de 46 dividido por 10, por consiguiente basta tener cuidado en la colocación de la vírgula y lo mismo se ha de hacer con los décuplos y subdécuplos.

Como la gran mayoría de los ángulos zenitales están comprendidos entre 85^c y 115 y muchos Topógrafos por economía mal entendida no determinan las coordenadas planimétricas, x é y, de los puntos característicos ó de detalle, que fijan en el plano por rumbo y distancia, Cuartero se propuso en sus Tablas satisfacer cumplidamente la necesidad mas común detallando esta primera parte; pero se comprende que habría podido reducir mucho sus dimensiones suprimiendo los valores de g de 1 á 9 y la mitad de los de z' considerando los de φ de 2' en 2', con lo cual se evitarían al propio tiempo inútiles repeticiones.

La 2.ª parte comprendiendo 30 páginas, que tambien podrían reducirse á la mitad, es el complemento de la primera y para las nueve cifras significativas consigna los valores de D de 10' en 10' de φ y los de z' de 1' en 1' en la forma que aparece en la página, que como muestra insertamos á continuación con referencia á los valores de φ de 70^c á 85^c y de 115^c á 130^c

Veamos como por su medio se calculan la distancia y la tangente:

Sean $g = 184'6$ y $\varphi = 118'27^c$

	D	z'
100.	92'00	27'15
80.	73'60	21'72
4.	3'68	1'086
0'6	0'55	0'163
	169'83	50'119

Es decir que, descompuesto el valor de g en sus distintas unidades, se busca en el cuadro, en que aparece 118'27^c en la primera casilla, los valores de D correspondiente á cada una de aquellas cuidando de colocar la vírgula en el lugar correspondiente y con la misma precaución se anotan los valores que en la misma línea de cada uno de aquellos y en la casilla de 27' constan para z' y se suman respectivamente.

En la 3.ª parte, que Cuartero llama Apéndice, compuesta de 25 páginas, se consignan de 1' en 1' de 0^c á 100^c los valores naturales de los senos y cosenos para que se puedan calcular los de x é y por medio de D y θ enteramente igual á como se ha dicho para las Tablas de Bárcena.

Tambien en esta parte podría economizarse la mitad del espacio considerando los ángulos de 2' en 2' sin inconveniente alguno y darla mas claridad suprimiendo las cifras iguales, como lo hicimos en las nuestras y lo hace Jadanza con mucho acierto.

La parte que consideramos, aunque es copia de la correspondiente de Bárcena, se presenta con mas claridad por las condiciones tipográficas; pero se podría poner en otra forma que facilitara los cálculos, no daría lugar á equivocaciones y fatigaría menos la vista.

En resumen: estas Tablas, que se venden al precio de 27 pesetas en rústica, son excelentes, pero molesta su manejo á causa de su mucho volúmen y podrían mejorarse considerablemente haciéndolas mas manejables y económicas modificándolas segun las indicaciones consignadas.

118.°

g	D	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′
1	0.9217	0.2681	0.2681	0.2683	0.2684	0.2686	0.2687	0.2688	0.2690	0.2691	0.2692
2	1.8435	5361	5362	5365	5369	5372	5374	5377	5380	5383	5384
3	2.7652	8042	8044	8048	8053	8058	8060	8065	8070	8074	8076
4	3.687	1.072	1.072	1.073	1.074	1.074	1.075	1.075	1.076	1.077	1.077
5	4.609	340	341	341	342	343	343	344	345	346	346
6	5.530	608	609	610	611	612	612	613	614	615	615
7	6.452	876	877	878	879	880	881	882	883	884	884
8	7.374	2.144	2 145	2.146	2.147	2.149	2.149	2.151	2 152	2.153	2.154
9	8.296	412	413	414	416	417	418	419	421	422	423
g	D	99′	98′	97′	96′	95′	94′	93′	92′	91′	90′
g	D	11′	12′	13′	14′	15′	16′	17′	18′	19′	20′
1	0.9209	0.2694	0.2695	0.2696	0.2698	0.2699	0.2701	0.2701	0 2703	0.2705	0.2705
2	1.8418	5387	5391	5392	5395	5398	5401	5403	5406	5409	5411
3	2.7627	8081	8086	8088	8093	8097	8102	8104	8109	8114	8116
4	3.684	1.077	1.078	1.078	1.079	1.080	1.080	1.081	1.081	1.082	1.082
5	4.604	347	348	348	349	350	350	351	351	352	353
6	5.525	616	617	618	619	619	620	621	622	623	623
7	6.446	886	887	887	888	889	890	891	892	893	894
8	7 367	2.155	2.156	2.157	2.158	2.159	2.161	2.161	2.162	2.164	2.164
9	8.288	424	426	426	428	429	431	431	433	434	435
g	D	89′	88′	87′	86′	85′	84′	83′	82′	81′	80′
g	D	21′	22′	23′	24′	25′	26′	27′	28′	29′	30′
1	0 9200	0.2707	0.2708	0.2709	0.2711	0.2712	0.2714	0.2715	0.2716	0.2718	0.2718
2	1.8401	5414	5417	5418	5421	5424	5428	5429	5432	5435	5437
3	2.7601	8121	8125	8127	8132	8136	8142	8144	8149	8153	8155
4	3.680	1.083	1.083	1.084	1.084	1.085	1.086	1.086	1.086	1.087	1.087
5	4.600	353	354	355	355	356	357	357	358	359	359
6	5.520	624	625	625	626	627	628	629	630	631	631
7	6.440	895	896	896	897	899	900	900	901	902	903
8	7.360	2.166	2.167	2.167	2.168	2 170	2.171	2.172	2.173	2.174	2.175
9	8.280	436	438	438	440	441	443	443	445	446	447
g	D	79′	78′	77′	76′	75′	74′	73′	72′	71′	70′
g	D	31′	32′	33′	34′	35′	36′	37′	38′	39′	40′
1	0.9192	0.2720	0.2721	0.2723	0.2724	0.2725	0.2727	0 2728	0.2729	0.2731	0 2732
2	1.8384	5440	5443	5447	5448	5451	5454	5455	5458	5462	5465
3	2.7576	8160	8164	8170	8172	8176	8181	8183	8187	8193	8197
4	3.677	1.088	1.089	1.089	1.090	1.090	1.091	1.091	1.092	1.092	1.093
5	4 596	360	361	362	362	363	363	364	365	365	366
6	5.515	632	633	634	634	635	636	637	637	639	640
7	6.434	904	905	906	907	908	909	909	910	912	913
8	7.354	2 176	2.177	2.179	2.179	2.180	2.182	2.182	2.183	2.185	2.186
9	8.273	448	949	451	451	453	454	455	456	458	459
g	D	69′	68	67′	66′	65′	64′	63′	62′	61′	60′
g	D	41′	42′	43′	44′	45′	46′	47′	48′	49′	50′
1	0.9183	0.2733	0.2735	0.2736	0.2737	0.2738	0.2740	0.2742	0.2742	0 2744	0.2745
2	1.8367	5466	5469	5472	5474	5477	5480	5483	5485	5488	5491
3	2.7550	8199	8204	8209	8210	8215	8220	8225	8227	8232	8236
4	3.673	1.093	1.094	1.094	1.095	1.095	1.096	1 097	1.097	1.098	1.098
5	4.592	367	367	368	368	369	370	371	371	372	373
6	5.510	640	641	642	642	643	644	645	645	646	647
7	6.428	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922
8	7.347	2.187	2.188	2.189	2.189	2.191	2.192	2.193	2.194	2.195	2.196
9	8.265	640	461	463	463	465	466	468	468	470	471
g	D	59′	58′	57′	56′	55′	54′	53′	52′	51′	50′

81.°

TABLAS TAQUIMÉTRICAS DE RUIZ AMADO (1)

En un folleto de 40 páginas las publicamos en 1885 comprendiendo, con una detenida Instrucción para su manejo, cinco Tablas: las dos primeras para la división centesimal, las dos siguientes para la sexagesimal y la última para la conversión de una división á la otra.

DIVISION CENTESIMAL

Tabla I.—*Senos² y cotangentes naturales.*

108ᵍ				110ᵍ				112ᵍ				114ᵍ			
M	Senos²	Cotangs		M	Senos²	Cotangs.		M.	Senos²	Cotangs.		M	Senos²	Cotangs	
0	0'9843	0'1263	100	0	0'9755	0'1583	100	0	0'9650	0'1907	100	0	0'9524	0'2234	100
5	41	71	95	5	53	91	95	5	47	15	95	5	21	42	95
10	39	79	90	10	50	0'1600	90	10	43	23	90	10	17	51	90
15	37	87	85	15	48	08	85	15	40	31	85	15	14	59	85
20	35	95	80	20	45	16	80	20	36	40	80	20	11	67	80
25	33	0'1303	75	25	43	24	75	25	33	48	75	25	08	75	75
30	31	11	70	30	40	32	70	30	30	56	70	30	04	84	70
35	29	19	65	35	38	40	65	35	28	64	65	35	01	92	65
40	27	27	60	40	35	48	60	40	25	72	60	40	0'9497	0'2300	60
45	25	35	55	45	33	56	55	45	22	80	55	45	94	08	55
50	23	43	50	50	30	64	50	50	19	88	50	50	91	17	50
55	21	51	45	55	28	72	45	55	16	96	45	55	88	25	45
60	19	59	40	60	25	80	40	60	13	0'2005	40	60	84	33	40
65	17	67	35	65	23	88	35	65	10	13	35	65	81	41	35
70	15	75	30	70	20	96	30	70	07	22	30	70	77	50	30
75	13	83	25	75	18	0'1704	25	75	04	30	25	75	74	58	25
80	11	91	20	80	15	12	20	80	01	38	20	80	70	66	20
85	09	99	15	85	13	20	15	85	0'9598	46	15	85	67	74	15
90	07	0'1407	10	90	10	29	10	90	95	54	10	90	63	82	10
95	04	15	5	95	08	37	5	95	93	62	5	95	60	91	5
100	02	23	0	100	05	45	0	100	90	70	0	100	56	0'2400	0
	Sen s²	Cotangs	M		Senos²	Cotangs	M.		Senos²	Cotangs.	M		Senos²	Cotangs.	M.
	91ᵍ				89ᵍ				87ᵍ				85ᵍ		

109ᵍ				111ᵍ				113ᵍ				115ᵍ			
M.	Senos²	Cotangs.		M	Senos²	Cotangs		M	Senos²	Cotangs		M.	Senos²	Cotangs.	
0	0'9802	0'1423	100	0	0'9705	0'1745	100	0	0'9590	0'2070	100	0	0'9456	0'2400	100
5	00	31	95	5	03	53	95	5	87	78	95	5	53	08	95
10	0'9798	39	90	10	00	61	90	10	84	86	90	10	49	16	90
15	96	47	85	15	0'9698	69	85	15	81	94	85	15	46	24	85
20	94	55	80	20	95	77	80	20	77	0'2103	80	20	42	33	80
25	91	63	75	25	92	85	75	25	74	11	75	25	38	41	75
30	88	71	70	30	88	93	70	30	71	20	70	30	34	50	70
35	86	79	65	35	85	0'1801	65	35	68	28	65	35	30	58	65
40	84	87	60	40	83	09	60	40	64	36	60	40	26	66	60
45	82	95	55	45	80	17	55	45	61	44	55	45	23	74	55
50	80	0'1503	50	50	78	25	50	50	58	52	50	50	20	83	50
55	77	11	45	55	75	33	45	55	55	60	45	55	16	91	45
60	74	19	40	60	72	42	40	60	52	68	40	60	12	0'2500	40
65	72	27	35	65	70	50	35	65	49	76	35	65	08	08	35
70	70	35	30	70	67	58	30	70	45	85	30	70	04	16	30
75	68	43	25	75	64	66	25	75	42	93	25	75	01	24	25
80	66	51	20	80	61	74	20	80	38	0'2201	20	80	0'9397	33	20
85	63	59	15	85	58	82	15	85	35	09	15	85	94	41	15
90	60	67	10	90	55	90	10	90	32	18	10	90	90	50	10
95	58	75	5	95	53	98	5	95	28	26	5	95	86	58	5
100	55	83	0	100	50	0'1907	0	100	24	34	0	100	82	66	0
	Senos²	Cotangs.	M.		Seno.²	Cotangs	M.		Senos²	Cotangs.	M.		Senos²	Cotangs.	M.
	90ᵍ				88ᵍ				86ᵍ				84ᵍ		

(1) Al precio de $\frac{1}{2}$ pesetas se hallan de venta en Madrid, Recarte Hijo, Carrera de San Jerónimo, 15. — Barcelona, Biosca y Comp.ª, Plaza de Palacio, 13. — Zaragoza, Amado Laguna, Camino de la Romarera.

La 1.ª en 5 páginas comprende los valores naturales de los senos[s] y cotangentes de los ángulos zenitales de 60ᶜ á 140ᶜ de 5' en 5' y por consiguiente se encuentra enseguida el coeficiente deseado y sin molestia, porque habiendo suprimido las cifras comunes resultan clarísimos.

Su manejo, que en la instrucción allí consignada se explica detalladamente, no puede ser mas sencillo.

Para que se vean sus condiciones, copiamos una página en la precedente.

Apliquémosla al mismo caso anterior:

Siendo $g = 184'6$ y $\varphi = 113'85$ en la casilla de este encontramos para el sen.ª 0'9535 y para la cot. 0'2209, que multiplicarémos respectivamente por 184'6 para tener el valor de D y por el valor de esta para tener el de z' en la forma siguiente:

D	z'
0'9535	0'2209
× 184'6	× 176
57210	13254
38140	15463
76280	2209
9535	38'8784
176'01610	

El pequeño volúmen de estas Tablas permite llevarlas al campo en el bolsillo y como la busca de los factores es tan sencilla, aunque sea algo molesto hacer las multiplicaciones, se realizan y conservan fácilmente los estaditos, que al efecto utilizamos para la investigación y comprobación de las coordenadas de las estaciones.

Cuando para calcular con precisión las alturas se considere conveniente interpolar los valores de las cotangentes, se hace fácilmente de memoria observando la diferencia de las dos que la comprenden.

La 2.ª enteramente análoga, comprende en 10 páginas los senos naturales de 0ᶜ á 200ᶜ y por consiguiente sin mas deducción que la de 200ᶜ, cuando procediere, se encuentran fácilmente los valores del seno y del coseno de θ, que se ha de multiplicar respectivamente por el valor de D para tener los de x é y, cuyo signo se determina por la regla dada en el número 8 del volumen I.

Así pues con $D = 176$ y $\theta = 73'84$

se busca en este valor de θ y en el de 173'84, su complementario, los factores por los que se ha de multiplicar D para tener x é y en la forma siguiente:

x	y
0'9168	0'3993
× 176	× 176
55008	23958
64176	27951
9168	3993
161'3568	70'2768

Hemos suprimido en el multiplicador la parte decimal y aceptado los coeficientes de 73'85ᶜ por considerar sus diferencias despreciables, como en efecto resultan en los productos ó valores de x é y comparados con los conseguidos con las Tablas de Bárcena, en que los hemos tenido en cuenta.

Véase ahora la forma de esta Tabla.

DIVISION CENTESIMAL

Tabla II —*Senos naturales.*

70g M.	Senos.		72g M.	Senos.		74g M.	Senos.		76g M.	Senos.		78g M.	Senos.	
0	0'8910	100	0	0'9048	100	0	0'9178	100	0	0'9298	100	0	0'9409	100
5	14	95	5	52	95	5	81	95	5	0'9301	95	5	12	95
10	17	90	10	55	90	10	84	90	10	04	90	10	14	90
15	21	85	15	58	85	15	87	85	15	06	85	15	17	85
20	24	80	20	62	80	20	90	80	20	09	80	20	19	80
25	28	75	25	65	75	25	93	75	25	12	75	25	22	75
30	31	70	30	68	70	30	96	70	30	15	70	30	25	70
35	35	65	35	72	65	35	99	65	35	18	65	35	27	65
40	38	60	40	75	60	40	0'9202	60	40	21	60	40	30	60
45	42	55	45	78	55	45	05	55	45	24	55	45	33	55
50	45	50	50	81	50	50	08	50	50	26	50	50	35	50
55	49	45	55	85	45	55	12	45	55	29	45	55	38	45
60	53	40	60	88	40	60	15	40	60	32	40	60	40	40
65	56	35	65	91	35	65	18	35	65	35	35	65	43	35
70	59	30	70	95	30	70	21	30	70	38	30	70	46	30
75	63	25	75	98	25	75	24	25	75	41	25	75	48	25
80	66	20	80	0'9101	20	80	27	20	80	43	20	80	51	20
85	70	15	85	04	15	85	30	15	85	46	15	85	53	15
90	73	10	90	08	10	90	33	10	90	49	10	90	56	10
95	77	5	95	11	5	95	36	5	95	52	5	95	58	5
100	80	0	100	14	0	100	39	0	100	54	0	100	61	0
	Senos.	M.		Senos.	M.		Senos.	M.		Senos.	M.		Senos.	M.
	129g			127g			125g			123g			121g	

71g M.	Senos.		73g M.	Senos.		75g M.	Senos.		77g M.	Senos.		79g M.	Senos.	
0	0'8980	100	0	0'9114	100	0	0'9239	100	0	0'9354	100	0	0'9461	100
5	84	95	5	17	95	5	42	95	5	57	95	5	63	95
10	87	90	10	21	90	10	45	90	10	60	90	10	66	90
15	91	85	15	24	85	15	48	85	15	63	85	15	69	85
20	94	80	20	27	80	20	51	80	20	66	80	20	71	80
25	98	75	25	30	75	25	54	75	25	68	75	25	74	75
30	0'9001	70	30	33	70	30	57	70	30	71	70	30	76	70
35	04	65	35	37	65	35	60	65	35	74	65	35	79	65
40	08	60	40	40	60	40	63	60	40	77	60	40	81	60
45	11	55	45	43	55	45	66	55	45	79	55	45	84	55
50	15	50	50	46	50	50	69	50	50	82	50	50	86	50
55	18	45	55	49	45	55	72	45	55	85	45	55	89	45
60	21	40	60	52	40	60	75	40	60	87	40	60	91	40
65	25	35	65	56	35	65	77	35	65	90	35	65	93	35
70	28	30	70	59	30	70	80	30	70	93	30	70	96	30
75	32	25	75	62	25	75	83	25	75	95	25	75	98	25
80	35	20	80	65	20	80	86	20	80	98	20	80	0'9501	20
85	38	15	85	68	15	85	89	15	85	0'9401	15	85	03	15
90	42	10	90	71	10	90	92	10	90	04	10	90	06	10
95	45	5	95	74	5	95	95	5	95	06	5	95	08	5
100	48	0	100	78	0	100	98	0	100	09	0	100	11	0
	Senos.	M.		Senos.	M.		Senos.	M.		Senos.	M.		Senos.	M.
	128g			126g			124g			122g			120g	

Las Tablas 3.ª y 4.ª son enteramente análogas y se refieren á la graduación sexagesimal, por lo que prescindimos de ocuparnos de ellas y lo mismo hacemos respecto á la 5.ª, que permite hacer sencillamente la conversión de una graduación á otra y puede suplir muy bien la Tabla al efecto inserta en el número 5 del volúmen I.

La grande aceptación que han tenido estas Tablas entre los Topógratos, justifica sus ventajas.

Tablas de Orlandi

El ilustrado editor de Milán, Ulrico Hoepli, publicó en 1889 entre sus excelentes Manuales, uno redactado por el distinguido Ingeniero D. J. Orlandi, destinado á popularizar las mejores teorías y procedimientos entonces conocidos sobre Taquimetría ó Celerimensura, como allí se la llama, acompañando las excelentes *Tablas numéricas*, de que ahora nos vamos á ocupar.

Para calcular por su medio las coordenadas D, z', x é y con valores de g, y de D de 1 á 400 metros, utilizando solamente los senos y cosenos de φ y de θ, transformó las fórmulas ordinarias de las dos primeras, en estas otras:

$$D = \frac{g}{2} - \frac{g}{2} \cos. 2\varphi \qquad 1.^a (1)$$

$$z' = \frac{g}{2} \text{sen. } 2\varphi \qquad 2.^a (1)$$

y siendo, como repetidas veces se ha dicho, las otras dos

$$x = D \text{ sen. } \theta \qquad 3.^a$$
$$y = D \cos. \theta \qquad 4.^a$$

en las cuatro no entran otras funciones circulares que el seno y el coseno de 2φ y de θ, que despues aplicó muy sencillamente.

Para evitar dudas, siempre perniciosas, vamos á explicar detalladamente la transformación referida.

Ya digimos en el número 80 que

$$z' = D \cot. \varphi = \frac{g}{2} \text{sen. } 2\varphi \quad (2)$$

exactamente igual á la 2.ª

Ahora bien; se sabe que

$$\text{Sen. } 2\varphi = 2 \text{ sen. } \varphi \cos. \varphi$$
$$\text{y} \quad \text{Cos. } 2\varphi = \cos.^2 \varphi - \text{sen.}^2 \varphi;$$

pero $\cos.^2 \varphi = 1 - \text{sen.}^2 \varphi$ y sustituyendo en la anterior resulta:

$$\text{Cos. } 2\varphi = 1 - 2 \text{ sen.}^2 \varphi \text{ de la que}$$
$$\text{Sen.}^2 \varphi = \frac{1 - \cos. 2\varphi}{2};$$

pero $D = g \text{ sen.}^2 \varphi$ y sustituyendo el precedente valor de $\text{sen.}^2 \varphi$, resultará:

$$D = g\left(\frac{1 - \cos. 2\varphi}{2}\right) = \frac{g}{2} - \frac{g}{2} \cos. 2\varphi, \text{ que es la 1.ª trasformada.}$$

Para dar á conocer las especiales condiciones de esta excelente Tabla, nada mejor podemos hacer que extractar, con los comentarios procedentes, la explicación que de ella y su manejo hace su Autor en su recomendable «*Corso pratico di Topografia numerica*».

Advierte en primer lugar que las Tablas solo dan, de la fórmula 1.ª, el 2.º término, que resultando siempre negativo, por serlo cos. 2φ ya que siempre φ está comprendido entre 50^c y 150^c, se ha de sumar con $\frac{g}{2}$

---

(1) Orlandi, como muchos Ingenieros italianos, utiliza las letras N y t, que cambiamos en g y z' en consonancia con las convenciones anteriores.

(2) Suprimimos el término i-m para simplificar.

Finalmente en la región media de los mismos márgenes se encuentra Δ sen. y Δ cos. expresadas en centímetros para cada 100 unidades de g ó D y la diferencia de φ de 5' y de θ de 10', de manera que pueden servir para las interpolaciones en el caso de no ser los minutos de φ múltiplos de 5 y los de θ múltiplos de 10; pero observando los resultados de las Tablas se vé que tales interpolaciones solo serán necesarias en las bases de operaciones y de comprobación, y para facilitarlas al fin pone un cuadro de todas las diferencias y lo que se ha de sumar ó restar en su consecuencia á los valores hallados para las coordenadas.

Combinados los números de la 1.ª casilla de cada página, que se consideran como decenas, con los que encabezan las siguientes, que sirven de unidades para formar los números $^1/_2$ g ó D, en la línea de los primeros y en la columna del seno ó del coseno se encuentran los valores de las coordenadas z' y D utilizando $^1/_2$ g y φ, despues de añadir al 2.º $^1/_2$ g, como dice la fórmula, en el caso que $^1/_2$ g sea entero.

Cuando es fraccionario, en el valor de D basta añadir al valor hallado la fracción de g y para el de z' buscar el que corresponde á la misma considerada como entera, corriendo oportunamente la vírgula en su resultado especial.

Resolvamos el caso antes considerado.

$$\text{Sean } g = 184'6 \quad \text{y} \quad \varphi = 113'85$$
$$^1/_2\, g = 92'3 \qquad 2 \text{ comp. de } \varphi = 27'70^c$$

En las páginas trascritas en que figura al medio 113'85^c para φ, ya para θ figura el duplo del complemento 27'70^c, por lo que no hay que buscarle.

En la línea del 9 y casilla del 2 encontramos

$$\text{Seno} = 38'78$$
$$\text{Cos.} = 83'43 + 92'6 = 176'03 \text{ para D.}$$

En la línea del 3 y casilla del 0 encontramos

seno = 12'64 que para 0'3 se convierte en
0'1264, que sumado con el resultado anterior nos da para $z' = 38'9064$

cuyos valores de $D = 176'03$ y $z' = 38'9064$ casi coinciden con los hallados con nuestras Tablas, que fueron $D = 176'02$ y $z' = 38'87$.

Buscando en la Tabla de 73'80^c, que es el que mas se aproxima al valor de θ, con 176 valor aproximado de D, se encuentra para el

$$\text{Cos.} = 70'41 = y$$
$$\text{Sen.} = 161'30 = x$$

Con nuestras Tablas obtuvimos respectivamente 70'28 y 161'36, cuyas diferencias dependen principalmente de haber despreciado algunos decimales y de la falta de interpolación por la de los ángulos considerados y medidos.

De lo expuesto resulta que las Tablas del distinguido Ingeniero D. J. Orlandi, no tienen otro inconveniente que el expresado de obligar á hojear bastante para la busca de la correspondiente á los datos; pero en cambio es muy interesante el manual taquimétrico que las precede.

Nuevas Tablas de Orlandi

Comprendiendo este ilustradísimo Ingeniero los inconvenientes que en la práctica ofrecían sus anteriores Tablas, ha publicado otras en el año corriente (1903), que indudablemente se generalizarán pronto, porque reunen excelentes condiciones.

En un elegante volúmen de 17 × 12 centímetros, encuadernado con fina percalina, de 282 páginas y con condiciones tipográficas excepcionales, comprende:

Una breve y clara explicación de la estructura y fundamento de las Tablas, su manejo en

la determinación de las reducidas horizontal y vertical y de las coordenadas planimétricas, desarrollo del cálculo de las mismas en las poligonales, en el cálculo de las curvas de unión por las ordenadas á la tangente y á la cuerda y finalmente el uso de las Tablas con la graduación sexagesimal;

Una Tabla, I, para la substitución de las expresiones tabulares á los ángulos sexagesimales del registro de los ángulos φ;

Otra id., II, al mismo efecto para los ángulos θ;

Otra id., III, que es la principal y comprende 250 páginas, para la determinación directa de las reducidas horizontal, D, la vertical z', y las coordenadas planimétricas, x é y, de 5' en 5' de φ las primeras y de 10' en 10' de θ las segundas en distancias de 0 á 400 metros aproximando hasta los centímetros;

Otra id., IV, de sencilla interpolación por las diferencias $\delta\theta$ y $\delta\varphi$ de los ángulos centesimales y

Otras dos id., V y VI, al mismo objeto para la graduación sexagesimal.

No pudiendo entretenernos en detallar todos los casos comprendidos en la Instrucción, nos limitarémos á insertar, como muestra, las páginas correspondientes á los ángulos zenitales 113'75-80' y 113'85-90' què publicamos en la página siguiente para comprender el caso antes resuelto determinando por su medio las reducidas horizontal y vertical.

Nótase desde luego que, aunque con estas Tablas y las precedentes se pueden conseguir las coordenadas D, z', x é y, mientras en las anteriores el objeto primordial era la determinación de las x é y, en las nuevas lo es la de D y z', siendo idénticos sus límites de 25^c para φ y 50^c para θ y la misma su apreciación; pero difieren las fórmulas fundamentales para las reducidas D y z', que las utilizadas en las nuevas son:

$$D = g \operatorname{sen.}^2 \varphi \qquad (1.^a)$$
$$z' = g \operatorname{sen.} \varphi \cos. \varphi \qquad (2.^a)$$

mas sencillas que las utilizadas en las precedentes que eran

$$D = \frac{g}{2} - \frac{g}{2} \cos. 2\varphi \qquad (1.^{a'})$$

$$z' = \frac{g}{2} \operatorname{sen.} 2\varphi; \qquad (2.^{a'})$$

pero en cambio son mas complicadas en las correspondientes á las coordenadas planimétricas, x é y, pues con las Tablas primeras se utilizaban las fórmulas

$$x = D \operatorname{sen.} \theta \qquad (3.^a)$$
$$y = D \cos. \theta, \qquad (4.^a)$$

que no sirven para las nuevas Tablas, en que constan los sen.^{2} y los productos sen. cos. y por consiguiente se han transformado en

$$x = 2 D \operatorname{sen.}^2 {}^1/_2 \theta - D \qquad (3.^{a'})$$
$$y = 2 D \operatorname{sen.} {}^1/_2 \theta \cos. {}^1/_2 \theta \qquad (4.^{a'})$$

á cuyo efecto se utiliza el $^1/_2\theta$, pues resulta

$$\operatorname{Sen.} \theta = 2 \operatorname{sen.} {}^1/_2 \theta \cos. {}^1/_2 \theta$$
$$\operatorname{Cos.} \theta = 2 \cos.^2 {}^1/_2 \theta - 1$$

de las que se deducen las (3.$^{a'}$) y (4.$^{a'}$) sustituyendo estos valores en las (3.ª) y (4.ª).

Por esto dice Orlandi que se pueden considerar las dos Tablas como suplementarias, aunque individualmente completas y las nuevas sirven para las dos graduaciones centesimal y se-

xagesimal, á cuyo efecto los números del márgen superior se refieren á la 1.ª y los de la inferior á la 2.ª

Los de los ángulos extremos indican los zenitales y los de en medio de cada página los azi-

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
° ′									
13,00	0,95888	1,91776	2,87664	3,83552	4,7944	5,7533	6,7122	7,6710	8,6299
02	75	750	625	500	37	25	12	00	87
04	63	726	589	452	31	18	04	7,6690	77
06	50	700	550	400	25	10	6,7095	80	65
08	38	676	514	352	19	03	87	70	54
10	25	650	475	300	12	5,7495	77	60	42
12	13	626	439	252	06	88	69	50	32
14	00	600	400	200	00	80	60	40	20
16	0,95787	574	361	148	4,7893	72	51	30	08
18	75	550	325	100	87	65	42	20	8,6197
20	62	524	286	048	81	57	33	10	86
22	49	498	247	3,82996	74	49	24	7,6599	74
24	37	474	211	948	68	42	16	90	63
26	24	448	172	896	62	34	07	79	52
28	11	422	133	844	55	27	6,6998	69	40
30	0,95699	398	097	796	49	19	89	59	29
32	86	372	058	744	43	12	80	49	17
34	73	346	019	692	36	04	71	38	06
36	60	320	0,86980	640	30	5,7396	62	28	8,6094
38	47	294	941	588	23	88	53	18	82
40	35	270	905	540	17	81	44	08	71
42	22	244	866	488	11	73	35	7,6498	60
44	09	218	827	436	04	65	26	87	48
46	0,95596	192	788	384	4,7798	58	17	77	36
48	83	166	749	332	91	50	08	66	25
50	70	140	710	280	85	42	6,6899	56	13
52	57	114	671	228	78	34	90	46	01
54	44	088	632	176	72	26	81	35	8,5990
56	31	062	593	124	65	19	72	25	78
58	18	036	554	072	59	11	63	14	66
60	05	010	515	020	52	03	53	04	54
62	0,95492	1,90984	476	3,81968	46	5,7295	44	7,6394	43
64	79	958	437	916	39	87	35	83	31
66	66	932	398	864	33	80	26	73	19
68	53	906	359	812	26	72	17	62	08
70	40	880	320	760	20	64	08	52	8,5896
72	27	854	281	708	13	56	6,6799	42	84
74	14	828	242	656	07	48	90	31	73
76	01	802	203	604	00	41	81	21	61
78	0,95387	774	161	548	4,7693	32	71	10	48
80	74	748	122	496	87	24	62	7,6299	37
82	61	722	083	444	80	17	53	89	25
84	48	696	044	392	74	09	44	78	13
86	35	670	005	340	67	01	34	68	01
88	21	642	2,85963	284	60	5,7193	25	57	8,5789
90	08	616	924	232	54	85	16	46	77
92	0,95295	590	885	180	47	77	06	36	65
94	81	562	843	124	40	69	6,6697	25	53
96	68	536	804	072	34	61	88	14	41
98	55	510	765	020	27	53	78	04	29
14,00	0,95241	1,90482	2,85723	3,80964	4,7620	5,7145	6,6669	7,6193	8,5717

13

g. sen α cos α

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13,00	0,19857	0,39714	0,59571	0,79428	0,9928	1,1914	1,3900	1,5886	1,7871
02	886	772	658	544	43	32	20	1,5909	97
04	915	830	745	660	57	49	40	32	23
06	944	888	832	776	72	66	61	55	1,7950
08	973	946	919	892	86	84	81	78	76
10	0,20001	0,40002	0,60003	0,80004	1,0000	1,2001	1,4001	1,6001	1,8001
12	030	060	090	120	15	18	21	24	27
14	059	118	177	236	29	35	41	47	53
16	088	176	264	352	44	53	62	70	79
18	117	234	351	468	58	70	82	94	1,8105
20	145	290	435	580	72	87	1,4101	1,6116	30
22	174	348	522	696	87	1,2104	22	39	57
24	203	406	609	812	1,0101	22	42	62	83
26	232	464	696	928	16	39	62	86	1,8209
28	260	520	780	0,81040	30	56	82	1,6208	34
30	289	578	867	156	44	73	1,4202	31	60
32	318	636	954	272	59	91	23	54	86
34	346	692	0,61038	384	73	1,2208	42	77	1,8311
36	375	750	125	500	87	25	62	1,6300	37
38	404	808	212	616	02	42	83	23	64
40	432	864	296	728	1,0216	59	1,4302	46	89
42	461	922	383	844	30	77	23	69	1,8415
44	490	980	470	960	45	94	43	92	41
46	518	0,41036	554	0,82072	59	1,2311	63	1,6414	66
48	547	094	641	188	73	28	83	38	92
50	576	152	728	304	88	46	1,4403	61	1,8518
52	604	208	812	416	1,0302	62	23	83	44
54	633	266	899	532	16	80	43	1,6506	70
56	662	324	986	648	31	97	63	30	96
58	690	380	0,62070	760	45	1,2414	83	52	1,8621
60	719	438	157	876	59	31	1,4503	75	47
62	747	494	211	988	73	48	23	98	72
64	776	552	328	0,83104	88	66	43	1,6621	98
66	805	610	415	220	1,0402	83	63	44	1,8724
68	833	666	499	332	16	1,2500	83	66	50
70	862	724	586	448	31	17	1,4603	90	76
72	890	780	670	560	45	34	23	1,6712	1,8801
74	919	838	757	676	59	51	43	35	27
76	947	894	841	788	73	68	63	58	52
78	976	952	928	904	88	86	83	81	78
80	0,21004	0,42008	0,63012	0,84016	1,0502	1,2602	1,4703	1,6803	1,8904
82	033	066	099	132	16	20	23	26	30
84	061	122	183	244	30	37	43	49	55
86	090	180	270	360	45	54	63	72	81
88	118	236	354	472	59	71	83	94	1,9006
90	147	294	441	588	73	88	1,4803	1,6918	32
92	175	350	525	700	87	1,2705	22	40	57
94	204	408	612	816	1,0602	22	43	63	84
96	232	464	696	928	16	39	62	86	1,9109
98	261	522	783	0,85044	30	57	83	1,7009	35
14,00	0,21289	0,42578	0,63867	0,85156	1,0644	1,2773	1,4902	1,7031	1,9160

exactas para que puedan servir en los cálculos de trabajos de cierta precisión; ser *poco voluminosas* y *poco costosas* y consiguió sus propósitos cumplidamente, pues consigna los resultados con cinco decimales, lo que permite apreciar hasta los centímetros en distancias de más de 500 metros, las desarrolla en buenas condiciones tipográficas en solas 64 páginas y las vende á 3'50 liras (1).

Precédelas una sencilla Introducción en que se explica su manejo, una *advertencia* en que se hace de la manera de utilizarlas para calcular con ellas las coordenadas x é y por medio de las fórmulas

$$x = D \cos.\ \theta = g' \cos.^2 \alpha' - D$$
$$y = D \operatorname{sen}.\ \theta = g' \operatorname{sen}.\ \alpha' \cos.\ \alpha'$$
$$\text{en las que } g' = 2\,D \quad \text{y} \quad \alpha' = {}^1/_2\,\theta;$$

pero, como las Tablas no comprenden mas que 30^c, el de θ se ha de reducir á menos de 50^c.

Sigue á tal advertencia una indicación de las fórmulas que se propone resolver y finalmente hace el *exámen del Taquímetro* explicando sus principales comprobaciones y correcciones, todo lo que constituye propiamente una interesante introducción á las Tablas.

Utiliza la 1.ª página para consignar una de conversión de la graduación sexagesimal en centesimal y la última en consignar los valores de las cotangentes de 0'200^c á 1'40^c para que se pueda utilizar el *sistema de diferencia de tangentes* y en las sucesivas páginas combinadas por pares consigna las Tablas especiales, que dan los valores de D y z' en la forma y condiciones tipográficas, que aparecen en las que para muestra insertamos en las páginas 272 y 273.

Como claramente aparece en las precedentes muestras, en las páginas de la izquierda constan los valores de D para las nueve cifras significativas de 2' en 2', de 0^c á 30^c y en las de la derecha los correspondientes á z'; de manera que basta descomponer el valor de g en sus distintas unidades y buscar en la página del grado de α, complemento de φ, los valores de D y z' en la línea de los minutos y casilla de la cifra significativa de cada órden de unidades cuidando de colocar la vírgula en el lugar que le corresponda segun ellas sean, dos lugares á la derecha para las centenas, uno para las decenas, ninguno para las unidades, uno á la izquierda para las decimas, etc., y sumar respectivamente estos resultados parciales.

Si los minutos de α son número impar, ó se toma uno de los pares que le comprende ó su término medio, lo que se hace de memoria á la vista.

Propongámonos resolver el mismo caso antes considerado, esto es, que sea:

$$g = 184'6 \quad \text{y} \quad \varphi = 113'85$$

resultará

	D	z'
para 100. . . .	95'335	21'090
80. . . .	76'268	16'872
4. . . .	3'813	0'843
0'6 . . .	0'572	0'126
g = 184'6 ;	D = 175'988 ;	z' = 38'931

En el cálculo precedente hemos admitido los resultados correspondientes á $\alpha = 13'86^c$ superior en 1' al verdadero; si quisiéramos precisar mas, consignaríamos los resultados correspondientes á $\alpha = 13'85^c$ tomando de memoria el término medio entre los que las Tablas presentan para 86' y 84' en esta forma:

(1) Este es el precio señalado en el ejemplar que tenemos á la vista; pero en otros há poco recibidos en casa de Biosca y Comp.ª, se fija el precio de 8'50 liras; ignoramos la causa del cambio de precio.

	D	z'
para 100. . . .	95'341	21'076
80. . . .	76'273	16'860
4. . . .	3'813	0'843
0'6 . . .	0'572	0'126
g = 184'6 ;	D = 175·999 ;	z' = 38'905

yos valores concuerdan sensiblemente con los hallados con nuestras Tablas, de las que realente estas solo difieren en que dan hechos los productos parciales.

Las de Cuartero, 1.ª y 2.ª, que tienen el mismo destino que estas, disminuirían, en el caso nsiderado, un sumando y la interpolación; pero no darían la distancia con tanta precisión, igirían mucho mas tiempo para la busca de la página correspondiente y mas molestia y exsición de equivocar una línea con otra por la consignación de tantos números continuados, ientras que en las nuestras y en las de Jadanza la supresión de los comunes hace que aparezn con mas claridad á la vista los que se han de anotar.

Tablas de Herrera y Torres (D. Alberto)

No teníamos noticia de las calculadas y publicadas en 1900 por este distinguido Ingeniero fe de Minas; pero, recibidas al entrar en prensa el primer cuaderno de este libro, creemos ortuno darlas á conocer á nuestros lectores.

Son siete independientes, constituyendo una colección completa para la graduación sexasimal y otra para la centesimal.

La primera se compone:

1.° De una Tabla de *senos* y *cosenos* de minuto en minuto con *ocho* cifras decimales, que n una pequeña introducción en español, francés, alemán é inglés, forma un volúmen de 180 ginas de 26 × 16 centímetros y da en cada minuto el valor de aquellos de 0° á 90° para los meros de 1 á 9 inclusives (1).

2.° De otra enteramente análoga, pero solo con *cinco* cifras decimales, en un volúmen mbien de 180 páginas de 26 × 13 centímetros (2).

3.° De otra de las *distancias horizontales* y *tangentes* correspondientes á los valores del núro generador, g, de 1 á 9 inclusives ó de las distancias horizontales por los mismos indicas, tambien de minuto en minuto de 0° á 36° y sus complementarios, que se expresan en a caja, comprendiendo 144 páginas de 26 × 13 centímetros (3) y

4.° De otra de *senos* y *cosenos* de 5' en 5', por lo demas de iguales condiciones que la 2.ª, un volúmen de 45 páginas de 22 × 13 centímetros (4).

La segunda colección comprende:

1.° Una Tabla enteramente análoga á la 1.ª anterior de 1' en 1' de 0ᶜ á 100ᶜ en un volúm de 250 páginas de 26 × 18 centímetros (5).

2.° Otra enteramente análoga á la 2.ª de la colección anterior tambien de 1' en 1' de á 100ᶜ en un volúmen de 250 páginas de 26 × 16 centímetros (6).

3.° Otra enteramente análoga á la 3.ª de la colección anterior de 1' en 1' de 0ᶜ á 40ᶜ en volúmen de 200 páginas de 26 × 16 centímetros (7).

---

(1) Su precio es 20 pesetas.
(2) » 15 »
(3) » 15 »
(4) » 5 »
(5) » 30 »
(6) » 22 »
(7) » 20 »

[26ᵍ,01] á [26ᵍ,20]

R	Coseno	Seno	Coseno	Seno	Coseno	Seno	Coseno	Seno	R
	26ᵍ,01		**26ᵍ,06**		**26ᵍ,11**		**26ᵍ,16**		
1	0,91769	0,39729	0,91738	0,39801	0,91707	0,39873	0,91675	0,39945	1
2	1,83538	0,79458	1,83476	0,79603	1,83413	0,79747	1,83351	0,79891	2
3	2,75308	1,19188	2,75214	1,19404	2,75120	1,19620	2,75026	1,19836	3
4	3,67077	1,58917	3,66952	1,59205	3,66827	1,59493	3,66701	1,59781	4
5	4,58846	1,98646	4,58690	1,99006	4,58533	1,99367	4,58377	1,99727	5
6	5,50615	2,38375	5,50428	2,38808	5,50240	2,39240	5,50052	2,39672	6
7	6,42385	2,78104	6,42166	2,78609	6,41947	2,79113	6,41728	2,79617	7
8	7,34154	3,17834	7,33904	3,18410	7,33654	3,18986	7,33403	3,19563	8
9	8,25923	3,57563	8,25642	3,58211	8,25360	3,58860	8,25078	3,59508	9
	73ᵍ,99		73ᵍ,94		73ᵍ,89		73ᵍ,84		
	26ᵍ,02		**26ᵍ,07**		**26ᵍ,12**		**26ᵍ,17**		
1	0,91763	0,39744	0,91732	0,39816	0,91700	0,39888	0,91669	0,39960	1
2	1,83526	0,79487	1,83463	0,79631	1,83401	0,79775	1,83338	0,79919	2
3	2,75289	1,19231	2,75195	1,19447	2,75101	1,19663	2,75007	1,19879	3
4	3,67052	1,58974	3,66927	1,59263	3,66802	1,59551	3,66676	1,59839	4
5	4,58815	1,98718	4,58659	1,99078	4,58502	1,99439	4,58345	1,99799	5
6	5,50578	2,38462	5,50390	2,38894	5,50203	2,39326	5,50015	2,39758	6
7	6,42341	2,78205	6,42122	2,78710	6,41903	2,79214	6,41684	2,79718	7
8	7,34104	3,17949	7,33854	3,18525	7,33604	3,19102	7,33353	3,19678	8
9	8,25867	3,57693	8,25586	3,58341	8,25304	3,5898	8,25022	3,5963	9
	73ᵍ,98		73ᵍ,93		73ᵍ,88		73ᵍ,83		
	26ᵍ,03		**26ᵍ,08**		**26ᵍ,13**		**26ᵍ,18**		
1	0,91757	0,39758	0,91725	0,39830	0,91694	0,39902	0,91663	0,39974	1
2	1,83513	0,79516	1,83451	0,79660	1,83388	0,79804	1,83326	0,79948	2
3	2,75270	1,19274	2,75176	1,19490	2,75083	1,19706	2,74988	1,19922	3
4	3,67027	1,59032	3,66902	1,59320	3,66777	1,59608	3,66651	1,59896	4
5	4,58784	1,98790	4,58627	1,99150	4,58471	1,99511	4,58314	1,99871	5
6	5,50540	2,38548	5,50353	2,38980	5,50165	2,39413	5,49977	2,39845	6
7	6,42297	2,78306	6,42078	2,78811	6,41859	2,79315	6,41640	2,79819	7
8	7,34054	3,18064	7,33804	3,18641	7,33553	3,19217	7,33302	3,19793	8
9	8,25811	3,57822	8,25529	3,58471	8,25248	3,59119	8,24965	3,59767	9
	73ᵍ,97		73ᵍ,92		73ᵍ,87		73ᵍ,82		
	26ᵍ,04		**26ᵍ,09**		**26ᵍ,14**		**26ᵍ,19**		
1	0,91750	0,39772	0,91719	0,39844	0,91688	0,39917	0,91657	0,39989	1
2	1,83501	0,79545	1,83438	0,79689	1,83376	0,79833	1,83313	0,79977	2
3	2,75251	1,19317	2,75158	1,19533	2,75064	1,19750	2,74970	1,19966	3
4	3,67002	1,59090	3,66877	1,59378	3,66752	1,59666	3,66626	1,59954	4
5	4,58752	1,98862	4,58596	1,99222	4,58439	1,99583	4,58283	1,99943	5
6	5,50503	2,38635	5,50315	2,39067	5,50127	2,39499	5,49939	2,39931	6
7	6,42253	2,78407	6,42035	2,78911	6,41815	2,79416	6,41596	2,79920	7
8	7,34004	3,18180	7,33754	3,18756	7,33503	3,19332	7,33252	3,19908	8
9	8,25754	3,57952	8,25473	3,58600	8,25191	3,59249	8,24909	3,59897	9
	73ᵍ,96		73ᵍ,91		73ᵍ,86		73ᵍ,81		
	26ᵍ,05		**26ᵍ,10**		**26ᵍ,15**		**26ᵍ,20**		
1	0,91744	0,39787	0,91713	0,39859	0,91682	0,39931	0,91650	0,40003	1
2	1,83488	0,79574	1,83426	0,79718	1,83363	0,79862	1,83300	0,80006	2
3	2,75233	1,19361	2,75139	1,19577	2,75045	1,19793	2,74951	1,20009	3
4	3,66977	1,59147	3,66852	1,59436	3,66727	1,59724	3,66601	1,60012	4
5	4,58721	1,98934	4,58565	1,99295	4,58408	1,99655	4,58251	2,00015	5
6	5,50465	2,38721	5,50278	2,39153	5,50090	2,39586	5,49901	2,40017	6
7	6,42210	2,78508	6,41991	2,79012	6,41771	2,79516	6,41552	2,80020	7
8	7,33954	3,18295	7,33704	3,18871	7,33453	3,19447	7,33202	3,20023	8
9	8,25698	3,58082	8,25417	3,58730	8,25135	3,59378	8,24852	3,60026	9
	73ᵍ,95		73ᵍ,90		73ᵍ,85		73ᵍ,80		
R	Seno	Coseno	Seno	Coseno	Seno	Coseno	Seno	Coseno	R

[73ᵍ,80] á [73ᵍ,99]

Como lo indica esta muestra las condiciones tipográficas de estas siete Tablas son excelentísimas, están editadas con todo cuidado y el papel es de muy buena calidad.

La igualdad respectiva de las Tablas de las dos colecciones nos permite prescindir en esta explicación de las de la 1.ª colección y como la 1.ª y 2.ª Tabla de la 2.ª solo difieren en el nú-

[86ᵍ,19 á 86ᵍ,00] φ, [113ᵍ,81 á 114ᵍ,00]

G	D	T	D	T	D	T	D	T	G
	φ = 86ᵍ,19 φ = 113ᵍ,81 **I = 13ᵍ,81**		φ = 86ᵍ,14 φ = 113ᵍ,80 **I = 13ᵍ,86**		φ = 86ᵍ,09 φ = 113ᵍ,91 **I = 13ᵍ,91**		φ = 86ᵍ,04 φ = 113ᵍ,96 **I = 13ᵍ,96**		
1	0,95368	0,21019	0,95334	0,21090	0,95301	0,21164	0,95268	0,21232	1
2	1,90735	0,42037	1,90669	0,42180	1,90603	0,42322	1,90536	0,42464	2
3	2,86103	0,63056	2,86003	0,63269	2,85904	0,63483	2,85804	0,63696	3
4	3,81470	0,84074	3,81338	0,84359	3,81205	0,84644	3,81072	0,84928	4
5	4,76838	1,05093	4,76672	1,05449	4,76507	1,05805	4,76340	1,06160	5
6	5,72206	1,26111	5,72007	1,26539	5,71808	1,26966	5,71608	1,27392	6
7	6,67573	1,47130	6,67341	1,47628	6,67109	1,48127	6,66876	1,48624	7
8	7,62941	1,68148	7,62676	1,68718	7,62411	1,69288	7,62144	1,69857	8
9	8,58308	1,89167	8,58010	1,89858	8,57712	1,90449	8,57412	1,91089	9
	φ = 86ᵍ,18 φ = 113ᵍ,82 **I = 13ᵍ,82**		φ = 86ᵍ,13 φ = 113ᵍ,87 **I = 13ᵍ,87**		φ = 86ᵍ,08 φ = 113ᵍ,92 **I = 13ᵍ,92**		φ = 86ᵍ,03 φ = 113ᵍ,97 **I = 13ᵍ,97**		
1	0,95361	0,21033	0,95328	0,21104	0,95295	0,21175	0,95261	0,21240	1
2	1,90722	0,42066	1,90656	0,42208	1,90589	0,42350	1,90523	0,42493	2
3	2,86083	0,63098	2,85984	0,63312	2,85884	0,63526	2,85784	0,63739	3
4	3,81444	0,84131	3,81311	0,84416	3,81179	0,84701	3,81045	0,84985	4
5	4,76805	1,05164	4,76639	1,05520	4,76473	1,05876	4,76307	1,06231	5
6	5,72166	1,26197	5,71967	1,26624	5,71768	1,27051	5,71568	1,27478	6
7	6,67527	1,47229	6,67295	1,47728	6,67063	1,48226	6,66830	1,48724	7
8	7,62888	1,68262	7,62623	1,68832	7,62357	1,69401	7,62091	1,69970	8
9	8,58249	1,89295	8,57951	1,89936	8,57652	1,90577	8,57352	1,91217	9
	φ = 86ᵍ,17 φ = 113ᵍ,83 **I = 13ᵍ,83**		φ = 86ᵍ,12 φ = 113ᵍ,88 **I = 13ᵍ,88**		φ = 86ᵍ,07 φ = 113ᵍ,93 **I = 13ᵍ,93**		φ = 86ᵍ,02 φ = 113ᵍ,98 **I = 13ᵍ,98**		
1	0,95354	0,21047	0,95321	0,21118	0,95288	0,21189	0,95255	0,21261	1
2	1,90709	0,42094	1,90642	0,42236	1,90576	0,42379	1,90509	0,42521	2
3	2,86063	0,63141	2,85964	0,63355	2,85864	0,63568	2,85764	0,63782	3
4	3,81417	0,84188	3,81285	0,84473	3,81152	0,84758	3,81019	0,85042	4
5	4,76772	1,05235	4,76606	1,05591	4,76440	1,05947	4,76273	1,06303	5
6	5,72126	1,26282	5,71927	1,26709	5,71728	1,27136	5,71528	1,27563	6
7	6,67480	1,47329	6,67249	1,47828	6,67016	1,48326	6,66783	1,48824	7
8	7,62835	1,68376	7,62570	1,68946	7,62304	1,69515	7,62038	1,70084	8
9	8,58189	1,89423	8,57891	1,90064	8,57592	1,90705	8,57292	1,91345	9
	φ = 86ᵍ,16 φ = 113ᵍ,84 **I = 13ᵍ,84**		φ = 86ᵍ,11 φ = 113ᵍ,89 **I = 13ᵍ,89**		φ = 86ᵍ,06 φ = 113ᵍ,94 **I = 13ᵍ,94**		φ = 86ᵍ,01 φ = 113ᵍ,99 **I = 13ᵍ,99**		
1	0,95348	0,21061	0,95315	0,21132	0,95281	0,21204	0,95248	0,21275	1
2	1,90695	0,42123	1,90629	0,42265	1,90563	0,42407	1,90496	0,42549	2
3	2,86043	0,63184	2,85944	0,63397	2,85844	0,63611	2,85744	0,63824	3
4	3,81391	0,84245	3,81258	0,84530	3,81125	0,84814	3,80992	0,85099	4
5	4,76739	1,05306	4,76573	1,05662	4,76407	1,06018	4,76240	1,06374	5
6	5,72086	1,26368	5,71888	1,26795	5,71688	1,27222	5,71488	1,27648	6
7	6,67434	1,47429	6,67202	1,47927	6,66969	1,48425	6,66736	1,48923	7
8	7,62782	1,68490	7,62517	1,69060	7,62251	1,69629	7,61984	1,70198	8
9	8,58130	1,89551	8,57832	1,90192	8,57532	1,90833	8,57232	1,91473	9
	φ = 86ᵍ,15 φ = 113ᵍ,85 **I = 13ᵍ,85**		φ = 86ᵍ,10 φ = 113ᵍ,90 **I = 13ᵍ,90**		φ = 86ᵍ,05 φ = 113ᵍ,95 **I = 13ᵍ,95**		φ = 86ᵍ,00 φ = 114ᵍ,00 **I = 14ᵍ,00**		
1	0,95341	0,21076	0,95308	0,21147	0,95275	0,21218	0,95241	0,21289	1
2	1,90682	0,42151	1,90616	0,42293	1,90549	0,42436	1,90483	0,42578	2
3	2,86023	0,63227	2,85924	0,63440	2,85824	0,63654	2,85724	0,63867	3
4	3,81364	0,84302	3,81232	0,84587	3,81099	0,84871	3,80965	0,85156	4
5	4,76706	1,05378	4,76540	1,05734	4,76373	1,06089	4,76207	1,06445	5
6	5,72047	1,26453	5,71848	1,26880	5,71648	1,27307	5,71448	1,27734	6
7	6,67388	1,47529	6,67156	1,48027	6,66923	1,48525	6,66690	1,49023	7
8	7,62729	1,68604	7,62464	1,69174	7,62197	1,69743	7,61931	1,70312	8
9	8,58070	1,89680	8,57772	1,90321	8,57472	1,90961	8,57172	1,91601	9

I; [13ᵍ,81 á 14ᵍ,00]

› de cifras decimales, podemos concretarnos á las Tablas 2.ª y 3.ª, advirtiendo que las de cifras decimales pueden utilizarse en los cálculos mas delicados y la 4.ª de la 1.ª colección ›s planos levantados con la brújula y taquímetros pequeños; pues con ella se facilitará la a de las correspondientes coordenadas planimétricas.

Con referencia á la 2.ª el Autor da una brevísima explicación en la introducción y en verdad que despues de lo que hemos dicho sobre el uso de la de Jadanza y lo que teníamos escrito para la de Salmoiraghi, nada tenemos que añadir; basta solo fijar la atención en la página 131 transcrita en la 276, en que se hallan los senos y cosenos de 26'01^c á 26'20^c y los de sus complementarios 73'80^c á 73'99^c, entre los que está comprendido el ángulo 73'84^c, que hemos utilizado para resolver el mismo caso con todas las demas Tablas para su comprobación, porque en esta página se ven perfectamente las condiciones de toda la Tabla.

Como las coordenadas planimétricas dependen del valor de D deducido por la Tabla 3.ª de las consideradas, aplazamos para despues la solución del caso propuesto.

Esta Tabla tampoco exige explicación ninguna; basta examinar las condiciones de la página 70, que en la anterior hemos transcrito por comprender el ángulo zenital 113'85^c, que hemos elegido para el caso resuelto por todas las Tablas.

Resolvamos ahora el caso propuesto, en que tenemos:

$$g = 184'6 \quad ; \quad \varphi = 113'85^c \quad y \quad \theta = 73'84^c$$

Con la última Tabla se tiene:

	g	D	z
para . . .	100.	95'341	21'076
	80.	76'273	16'860
	4.	3'814	0'843
	0'6	0'572	0'126
Sumas .	184'6	176'000	38'905

Buscando con este valor de D y el de θ en la Tabla anterior los de **x** é **y** resulta:

	D	Cos. ó y	Sen. ó x
para. . .	100.	39'945	91'675
	70.	27'962	64'173
	6.	2'397	5'501
	176.	70'304	161'349

No creemos necesario dar mas detalles sobre el sencillo manejo y excelentes condicio de estas Tablas.

Tablas de Salmoiraghi

Este ilustre Ingeniero ha publicado en 1901 unas que comprenden tres distintas (1): 1.ª destinada al calculo de las coordenadas planimetricas x e y, que llama *longitud* y *latitud*; 2.ª á la altimétrica z y la 3.ª al calculo de las distancias horizontales, que llama K.

Desarrolla la 1.ª en 100 paginas, dos para grado de 0^c a 50^c, que con la doble entrada comprende los 100^c del cuadrante, en papel blanco y de la forma y condiciones tipográficas de adjuntas muestras (paginas 279 y 280), en que K, Lat. y Long. corresponden á las inicia hasta ahora admitidas D, y, x.

Comprendese facilmente que si los valores de Lat. o de K o D, en lugar de estar en columna para determinar las líneas, encabezaran las casillas y estuvieran en columna los correspondientes a los minutos, se encontrarian con mas facilidad y se podrian suprimir muchas cifras comunes haciendo mas clara la Tabla y evitando confusiones en los minutos, de los cuales el superior de cada subcasilla se corresponde con el grado que encabeza la página y el inferior con el que esta debajo, que combinados con aquellos forman los 100^c.

El orden de colocacion de las tres Tablas indica el objeto que con ellas se propone su Au-

(1) Estas Tablas encuadernadas á la rustica se venden a 15 francos

26c COORDONNÉES RECTANGULAIRES 26c

K	M	Lat.	Long.	M	Lat.	Long.	M	Lat.	Long.	M	Lat.	Long.	M	Lat.	Long.	K
1	02	0.91763	0.39744	04	0.91750	0.39772	06	0.91738	0,39801	08	0.91725	0.39830	10	0.91713	0.39859	1
2		1.83526	0.79488		1.83501	0.79544		1.83476	0.79603		1.83451	0.79660		1.83426	0.79719	2
3		2.75289	1.19231		2.75252	1.19316		2.75215	1.19404		2.75178	1.19490		2.75141	1.19578	3
4		3.67052	1.58975		3.67002	1.59089		3.66952	1.59206		3.66902	1.59320		3.66852	1.59437	4
5		4.58815	1.98719		4.58753	1.98861		4.58691	1.99008		4.58629	1.99150		4.58566	1.99297	5
6		5.50578	2.38462		5.50503	2.38635		5.50428	2.38808		5.50353	2.38981		5.50278	2.39153	6
7		6.42341	2.78205		6.42254	2.78407		6.42167	2.78609		6.42080	2.78811		6.41992	2.79012	7
8		7.34104	3.17949		7.34004	3.18179		7.33904	3.18410		7.33804	3.18641		7.33704	3.18871	8
9		8.25887	3.57693		8.25775	3.57952		8.25663	3.58211		8.25550	3.58471		8.25437	3.58730	9
10	98	9.17630	3.97436	96	9.17505	3.97724	94	9.17380	3.98013	92	9.17255	3.98301	90	9.17130	3.98589	10
1	22	0.91638	0.40032	24	0.91625	0.40061	26	0.91612	0.40089	28	0.91600	0.40118	30	0.91587	0.40147	1
2		1.83276	0.80063		1.83251	0.80122		1.83226	0.80179		1.83201	0.80236		1.83176	0.80293	2
3		2.74914	1.20094		2.74876	1.20182		2.74838	1.20268		2.74800	1.20354		2.74762	1.20440	3
4		3.66551	1.60125		3.66501	1.60243		3.66451	1.60358		3.66401	1.60472		3.66351	1.60587	4
5		4.58188	2.00157		4.58125	2.00304		4.58062	2.00447		4.57999	2.00590		4.57936	2.00734	5
6		5.49826	2.40190		5.49751	2.40363		5.49676	2.40536		5.49601	2.40708		5.49525	2.40881	6
7		6.41464	2.80222		6.41376	2.80423		6.41288	2.80625		6.41200	2.80826		6.41112	2.81028	7
8		7.33102	3.20254		7.33001	3.20484		7.32900	3.20714		7.32799	3.20944		7.32698	3.21175	8
9		8.24739	3.60285		8.24626	3.60544		8.24513	3.60803		8.24400	3.61062		8.24287	3.61321	9
10	78	9.16376	4.00317	76	9.16251	4.00605	74	9.16125	4.00893	72	9.15999	4.01180	70	9.15873	4.01468	10
1	42	0.91511	0.40319	44	0.91499	0.40348	46	0.91486	0.40377	48	0.91473	0.40406	50	0.91461	0.40434	1
2		1.83023	0.80638		1.82998	0.80696		1.82973	0.80753		1.82948	0.80811		1.82923	0.80869	2
3		2.74534	1.20957		2.74496	1.21043		2.74458	1.21129		2.74420	1.21216		2.74382	1.21303	3
4		3.66046	1.61276		3.65996	1.61391		3.65945	1.61507		3.65894	1.61622		3.65843	1.61737	4
5		4.57558	2.01595		4.57495	2.01739		4.57432	2.01883		4.57369	2.02027		4.57306	2.02172	5
6		5.49069	2.41916		5.48993	2.42089		5.48917	2.42261		5.48841	2.42434		5.48765	2.42606	6
7		6.40580	2.82236		6.40491	2.82437		6.40402	2.82638		6.40313	2.82839		6.40224	2.83041	7
8		7.32093	3.22555		7.31993	3.22785		7.31893	3.23015		7.31783	3.23245		7.31682	3.23475	8
9		8.23603	3.62875		8.23489	3.63133		8.23375	3.63392		8.23261	3.63651		8.23147	3.63909	9
10	58	9.15115	4.03194	56	9.14988	4.03481	54	9.14861	4.03769	52	9.14734	4.04056	50	9.14607	4.04344	10
1	62	0.91384	0.40607	64	0.91372	0.40635	66	0.91359	0.40664	68	0.91346	0.40693	70	0.91333	0.40722	1
2		1.82769	0.81214		1.82744	0.81270		1.82719	0.81328		1.82694	0.81386		1.82668	0.81442	2
3		2.74153	1.21820		2.74115	1.21905		2.74077	1.21992		2.74039	1.22079		2.74001	1.22163	3
4		3.65537	1.62428		3.65486	1.62540		3.65435	1.62656		3.65384	1.62772		3.65333	1.62885	4
5		4.56922	2.03035		4.56858	2.03175		4.56794	2.03320		4.56730	2.03465		4.56666	2.03606	5
6		5.48307	2.43640		5.48231	2.43812		5.48154	2.43985		5.48077	2.44157		5.48000	2.44329	6
7		6.39690	2.84247		6.39601	2.84448		6.39512	2.84649		6.39423	2.84850		6.39334	2.85050	7
8		7.31075	3.24853		7.30973	3.25083		7.30871	3.25313		7.30769	3.25542		7.30667	3.25772	8
9		8.22459	3.65460		8.22344	3.65719		8.22229	3.65977		8.22114	3.66235		8.21999	3.66493	9
10	38	9.13843	4.06067	36	9.13716	4.06354	34	9,13588	4.06641	32	9.13460	4.06928	30	9.13332	4.07215	10
1	82	0.91256	0.40894	84	0.91243	0.40922	86	0.91231	0.40951	88	0.91218	0.40980	90	0.91205	0.41008	1
2		1.82513	0.81788		1.82488	0.81845		1.82463	0.81901		1.82437	0.81960		1.82411	0.82016	2
3		2.73769	1.22682		2.73731	1.22767		2.73693	1.22851		2.73655	1.22939		2.73616	1.23024	3
4		3.65026	1.63576		3.64975	1.63689		3.64924	1.63802		3.64873	1.63919		3.64821	1.64033	4
5		4.56282	2.04470		4.56218	2.04611		4.56154	2.04753		4.56090	2.04899		4.56026	2.05041	5
6		5.47538	2.45361		5.47461	2.45533		5.47384	2.45705		5.47307	2.45877		5.47230	2.46049	6
7		6.38794	2.86255		6.38704	2.86456		6.38614	2.86656		6.38524	2.86857		6.38434	2.87057	7
8		7.30050	3.27149		7.29947	3.27378		7.29844	3.27607		7.29741	3.27837		7.29638	3.28066	8
9		8.21307	3.68042		8.21191	3.68300		8.21075	3.68558		8.20959	3.68816		8.20843	3.69074	9
10	18	9.12563	4.08936	16	9.12435	4.09222	14	9.12306	4.09509	12	9.12177	4.09796	10	9.12049	4.10082	10

K	M	Long.	Lat.	M	Long.	Lat.	M	Long.	Lat.	M	Long.	Lat.	M	Long.	Lat.	K

73c 73c

or, pero es contrario al que se ha de seguir en la práctica, porque como D ó K es argumento
le la 1.ª y se ha de calcular por la 3.ª, esta es la que primero se ha de utilizar.

26c COORDONNÉES RECTANGULAIRES 26c

K	M	Lat.	Long.	M	Lat.	Long.	M	Lat.	Long.	M	Lat.	Long.	M	Lat.	Long.	K
1	12	0.91700	0.39888	14	0.91688	0.39917	16	0.91675	0.39945	18	0.91663	0.39974	20	0.91650	0.40003	1
2		1.83401	0.79776		1.83376	0.79833		1.83351	0.79891		1.83326	0.79948		1.83301	0.80006	2
3		2.75103	1.19663		2.75065	1.19749		2.75027	1.19837		2.74989	1.19922		2.74951	1.20008	3
4		3.66802	1.59551		3.66752	1.59665		3.66702	1.59783		3.66652	1.59897		3.66601	1.60011	4
5		4.58503	1.99439		4.58440	1.99581		4.58377	1.99728		4.58314	1.99871		4.58251	2.00014	5
6		5.50203	2.39326		5.50128	2.39499		5.50053	2.39672		5.49977	2.39845		5.49901	2.40017	6
7		6.41904	2.79214		6.41816	2.79416		6.41728	2.79617		6.41640	2.79819		6.41552	2.80020	7
8		7.33604	3.19102		7.33504	3.19332		7.33404	3.19562		7.33303	3.19793		7.33202	3.20023	8
9		8.25324	3.58989		8.25191	3.59249		8.25078	3.59508		8.24965	3.59767		8.24852	3.60026	9
10	88	9.17004	3.98877	86	9.16879	3.99165	84	9.16754	3.99453	82	9.16628	3.99741	80	9.16502	4.00029	10
1	32	0.91575	0.40176	34	0.91562	0.40204	36	0.91549	0.40233	38	0.91537	0.40262	40	0.91524	0.40291	1
2		1.83151	0.80351		1.83126	0.80408		1.83100	0.80466		1.83074	0.80523		1.83048	0.80581	2
3		2.74724	1.20526		2.74686	1.20612		2.74648	1.20698		2.74610	1.20784		2.74572	1.20871	3
4		3.66300	1.60702		3.66249	1.60816		3.66198	1.60931		3.66147	1.61046		3.66096	1.61161	4
5		4.57873	2.00877		4.57810	2.01020		4.57747	2.01164		4.57684	2.01308		4.57621	2.01451	5
6		5.49449	2.41054		5.49373	2.41226		5.49297	2.41399		5.49221	2.41571		5.49145	2.41744	6
7		6.41024	2.81229		6.40936	2.81430		6.40847	2.81632		6.40758	2.81833		6.40669	2.82034	7
8		7.32597	3.21405		7.32496	3.21635		7.32395	3.21865		7.32294	3.22095		7.32193	3.22325	8
9		8.24173	3.61580		8.24059	3.61839		8.23945	3.62098		8.23831	3.62357		8.23717	3.62616	9
10	68	9.15747	4.01756	66	9.15620	4.02044	64	9.15493	4.02331	62	9.15368	4.02619	60	9.15241	4.02906	10
1	52	0.91448	0.40463	54	0.91435	0.40492	56	0.91423	0.40521	58	0.91410	0.40549	60	0.91397	0.40578	1
2		1.82898	0.80926		1.82872	0.80984		1.82846	0.81042		1.82820	0.81098		1.82794	0.81156	2
3		2.74344	1.21389		2.74306	1.21476		2.74268	1.21563		2.74230	1.21647		2.74191	1.21733	3
4		3.65792	1.61853		3.65741	1.61968		3.65690	1.62084		3.65639	1.62196		3.65588	1.62312	4
5		4.57242	2.02316		4.57178	2.02460		4.57114	2.02605		4.57050	2.02745		4.56986	2.02890	5
6		5.48689	2.42779		5.48613	2.42951		5.48537	2.43123		5.48460	2.43295		5.48383	2.43468	6
7		6.40135	2.83242		6.40046	2.83443		6.39957	2.83644		6.39868	2.83845		6.39779	2.84046	7
8		7.31581	3.23705		7.31480	3.23934		7.31379	3.24164		7.31278	3.24394		7.31177	3.24624	8
9		8.23033	3.64168		8.22919	3.64426		8.22804	3.64685		8.22689	3.64943		8.22574	3.65202	9
10	48	9.14480	4.04631	46	9.14353	4.04918	44	9.14226	4.05205	42	9.14098	4.05493	40	9.13971	4.05780	10
1	72	0.91320	0.40750	74	0.91308	0.40779	76	0.91295	0.40808	78	0.91282	0.40836	80	0.91269	0.40865	1
2		1.82642	0.81500		1.82616	0.81559		1.82590	0.81615		1.82564	0.81673		1.82538	0.81730	2
3		2.73963	1.22250		2.73924	1.22338		2.73885	1.22423		2.73846	1.22510		2.73807	1.22594	3
4		3.65282	1.63001		3.65231	1.63117		3.65180	1.63230		3.65129	1.63347		3.65077	1.63459	4
5		4.56602	2.03751		4.56538	2.03897		4.56474	2.04038		4.56410	2.04183		4.56346	2.04324	5
6		5.47923	2.44501		5.47846	2.44673		5.47769	2.44845		5.47692	2.45017		5.47615	2.45189	6
7		6.39244	2.85251		6.39154	2.85452		6.39064	2.85653		6.38974	2.85854		6.38884	2.86054	7
8		7.30565	3.26001		7.30462	3.26231		7.30359	3.26460		7.30256	3.26690		7.30153	3.26919	8
9		8.21884	3.66752		8.21769	3.67010		8.21654	3.67268		8.21538	3.67526		8.21422	3.67784	9
10	28	9.13204	4.07502	26	9.13076	4.07789	24	9.12948	4.08076	22	9.12820	4.08362	20	9.12691	4.08649	10
1	92	0.91192	0.41037	94	0.91179	0.41066	96	0.91166	0.41094	98	0.91153	0.41123	100	0.91140	0.41151	1
2		1.82385	0.82073		1.82359	0.82132		1.82333	0.82188		1.82307	0.82245		1.82281	0.82302	2
3		2.73577	1.23109		2.73538	1.23197		2.73499	1.23282		2.73460	1.23367		2.73421	1.23453	3
4		3.64769	1.64146		3.64717	1.64263		3.64665	1.64377		3.64613	1.64490		3.64561	1.64604	4
5		4.55962	2.05184		4.55897	2.05329		4.55832	2.05471		4.55767	2.05613		4.55702	2.05755	5
6		5.47153	2.46221		5.47076	2.46393		5.46998	2.46565		5.46920	2.46737		5.46842	2.46909	6
7		6.38344	2.87258		6.38254	2.87459		6.38164	2.87659		6.38073	2.87860		6.37982	2.88060	7
8		7.29535	3.28295		7.29432	3.28524		7.29329	3.28753		7.29226	3.28982		7.29122	3.29211	8
9		8.20727	3.69332		8.20611	3.69590		8.20495	3.69847		8.20379	3.70105		8.20263	3.70363	9
10	08	9.11920	4.10369	06	9.11791	4.10655	04	9.11662	4.10942	02	9.11533	4.11228	00	9.11403	4.11514	10

K	M	Long.	Lat.	M	Long.	Lat.	M	Long.	Lat.	M	Long.	Lat.	M	Long.	Lat.	K

73c 73c

Por esta razón aplazamos la aplicación de todas al ejemplo antes propuesto para cuando hayamos indicado las condiciones de las tres.

86c COORDONNÉES RECTANGULAIRES 86c

K	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	K
1	98	0.2074	96	0.2077	94	0.2081	92	0.2084	90	0.2087	88	0.2091	86	0.2094	84	0.2097	82	0.2100	80	0.2104	1
2		0.4148		0.4155		0.4162		0.4168		0.4175		0.4181		0.4188		0.4194		0.4201		0.4207	2
3		0.6223		0.6232		0.6242		0.6252		0.6262		0.6272		0.6282		0.6291		0.6301		0.6311	3
4		0.8297		0.8310		0.8323		0.8336		0.8349		0.8362		0.8375		0.8388		0.8402		0.8415	4
5		1.0371		1.0387		1.0404		1.0420		1.0436		2.0453		1.0469		1.0486		1.0502		1.0518	5
6		1.2445		1.2465		1.2484		1.2504		1.2524		1.2543		1.2563		1.2583		1.2602		1.2622	6
7		1.4519		1.4542		1.4565		1.4588		1.4611		1.4634		1.4657		1.4680		1.4703		1.4726	7
8		1.6594		1.6620		1.6646		1.6672		1.6698		1.6724		1.6751		1.6777		1.6803		1.6829	8
9		1.8668		1.8697		1.8727		1.8756		1.8785		1.8815		1.8844		1.8874		1.8903		1.8933	9
10	02	2.0742	04	2.0774	06	2.0808	08	2.0840	10	2.0873	12	2.0905	14	2.0938	16	2.0971	18	2.1004	20	2.1037	10
1	78	0.2107	76	0.2110	74	0.2114	72	0.2117	70	0.2120	68	0.2123	66	0.2127	64	0.2130	62	0.2133	60	0.2137	1
2		0.4214		0.4221		0.4227		0.4234		0.4240		0.4247		0.4253		0.4260		0.4267		0.4273	2
3		0.6321		0.6331		0.6340		0.6350		0.6360		0.6370		0.6380		0.6390		0.6400		0.6410	3
4		0.8428		0.8441		0.8454		0.8467		0.8481		0.8494		0.8507		0.8520		0.8533		0.8540	4
5		1.0535		1.0551		1.0568		1.0584		1.0601		1.0617		1.0633		1.0650		1.0666		1.0683	5
6		1.2642		1.2661		1.2681		1.2701		1.2721		1.2740		1.2760		1.2780		1.2799		1.2819	6
7		1.4749		1.4772		1.4795		1.4818		1.4841		1.4864		1.4887		1.4910		1.4933		1.4956	7
8		1.6856		1.6882		1.6908		1.6934		1.6961		1.6987		1.7013		1.7040		1.7066		1.7092	8
9		1.8963		1.8992		1.9022		1.9051		1.9081		1.9110		1.9140		1.9169		1.9199		1.9229	9
10	22	2.1070	24	2.1102	26	2.1135	28	2.1168	30	2.1201	32	2.1234	34	2.1267	36	2.1300	38	2.1332	40	2.1365	10
1	58	0.2140	56	0.2143	54	0.2146	52	0.2150	50	0.2153	48	0.2156	46	0.2160	44	0.2163	42	0.2166	40	0.2169	1
2		0.4280		0.4286		0.4293		0.4299		0.4305		0.4312		0.4319		0.4326		0.4332		0.4339	2
3		0.6419		0.6429		0.6439		0.6449		0.6459		0.6469		0.6479		0.6488		0.6498		0.6508	3
4		0.8559		0.8572		0.8585		0.8599		0.8612		0.8625		0.8638		0.8651		0.8664		0.8678	4
5		1.0699		1.0715		1.0732		1.0748		1.0765		1.0781		1.0798		1.0814		1.0831		1.0847	5
6		1.2839		1.2858		1.2878		1.2898		1.2918		1.2937		1.2957		1.2977		1.2997		1.3016	6
7		1.4979		1.5002		1.5025		1.5048		1.5071		1.5094		1.5117		1.5140		1.5163		1.5186	7
8		1.7118		1.7145		1.7171		1.7197		1.7223		1.7250		1.7276		1.7302		1.7329		1.7355	8
9		1.9258		1.9288		1.9317		1.9347		1.9376		1.9406		1.9436		1.9465		1.9495		1.9524	9
10	42	2.1398	44	2.1431	46	2.1464	48	2.1497	30	2.1529	52	2.1563	54	2.1595	56	2.1628	58	2.1661	60	2.1694	10
1	38	0.2173	36	0.2176	34	0.2179	32	0.2183	30	0.2186	28	0.2189	26	0.2192	24	0.2196	22	0.2199	20	0.2202	1
2		0.4345		0.4352		0.4359		0.4365		0.4372		0.4378		0.4385		0.4392		0.4398		0.4404	2
3		0.6518		0.6528		0.6538		0.6548		0.6558		0.6567		0.6577		0.6587		0.6597		0.6607	3
4		0.8691		0.8704		0.8717		0.8730		0.8743		0.8757		0.8770		0.8783		0.8796		0.8809	4
5		1.0863		1.0880		1.0896		1.0913		1.0929		1.0946		1.0962		1.0979		1.0995		1.1012	5
6		1.3036		1.3056		1.3076		1.3095		1.3115		1.3135		1.3154		1.3174		1.3194		1.3214	6
7		1.5209		1.5232		1.5255		1.5278		1.5301		1.5324		1.5347		1.5370		1.5393		1.5416	7
8		1.7381		1.7408		1.7434		1.7460		1.7487		1.7513		1.7539		1.7566		1.7592		1.7619	8
9		1.9554		1.9583		1.9613		1.9643		1.9673		1.9702		1.9731		1.9762		1.9791		1.9821	9
10	62	2.1727	64	2.1760	66	2.1793	68	2.1825	70	2.1858	72	2.1891	74	2.1924	76	2.1957	78	2.1990	80	2.2023	10
1	18	0.2206	16	0.2209	14	0.2212	12	0.2116	10	0.2219	08	0.2222	06	0.2225	04	0.2229	02	0.2232	00	0.2235	1
2		0.4411		0.4418		0.4424		0.4431		0.4438		0.4444		0.4451		0.4457		0.4464		0.4471	2
3		0.6617		0.6627		0.6637		0.6647		0.6656		0.6666		0.6676		0.6686		0.6696		0.6706	3
4		0.8823		0.8836		0.8849		0.8862		0.8875		0.8888		0.8901		0.8915		0.8928		0.8941	4
5		1.1028		1.1044		1.1061		1.1077		1.1094		1.1110		1.1127		1.1143		1.1160		1.1176	5
6		1.3234		1.3253		1.3273		1.3293		1.3313		1.3332		1.3352		1.3372		1.3392		1.3412	6
7		1.5439		1.5462		1.5485		1.5508		1.5531		1.5555		1.5578		1.5601		1.5624		1.5647	7
8		1.7645		1.7671		1.7697		1.7724		1.7750		1.7777		1.7803		1.7830		1.7856		1.7882	8
9		1.9850		1.9880		1.9909		1.9939		1.9969		1.9999		2.0028		2.0058		2.0088		2.0117	9
10	82	2.2056	84	2.2089	86	2.2122	88	2.2155	90	2.2188	92	2.2221	94	2.2254	96	2.2287	98	2.2320	100	2.2353	10
K	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	M	K cot φ	K

113c 113c

La 2.ª está impresa en 25 páginas de *papel azul* y comprende de 2 en 2 centígrados los ángulos zenitales de 75c á 125c para magnitudes de K ó D de 1 á 10 y los valores correspondien-

87c REDUCTION À L' HORIZON 87c

S	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	S
1	95	0.9646	90	0.9643	85	0.9640	80	0.9637	75	0.9634	70	0.9631	65	0.9628	60	0.9625	55	0.9622	50	0.9619	1
2		1.9292		1.9286		1.9280		1.9274		1.9269		1.9263		1.9257		1.9251		1.9245		1.9239	2
3		2.8938		2.8929		2.8920		2.8912		2.8903		2.8894		2.8885		2.8876		2.8867		2.8858	3
4		3.8584		3.8572		3.8561		3.8549		3.8537		3.8525		3.8514		3.8502		3.8490		3.8478	4
5		4.8230		4.8215		4.8200		4.8186		4.8171		4.8156		4.8142		4.8127		4.8112		4.8097	5
6		5.7876		5.7859		5.7841		5.7823		5.7805		5.7788		5.7770		5.7752		5.7734		5.7716	6
7		6.7522		6.7502		6.7481		6.7460		6.7440		6.7419		6.7399		6.7378		6.7357		6.7336	7
8		7.7168		7.7145		7.7121		7.7098		7.7074		7.7050		7.7027		7.7003		7.6979		7.6955	8
9		8.6814		8.6788		8.6761		8.6735		8.6708		8.6682		8.6655		8.6629		8.6602		8.6575	9
10	05	9.6460	10	9.6431	15	9.6402	20	9.6372	25	9.6345	30	9.6313	35	9.6284	40	9.6254	45	9.6224	50	9.6194	10
1	45	0.9616	40	0.9613	35	0.9610	30	0.9607	25	0.9604	20	0.9601	15	0.9598	10	0.9595	05	0.9592	00	0.9589	1
2		1.9233		1.9227		1.9221		1.9215		1.9208		1.9202		1.9196		1.9190		1.9184		1.9178	2
3		2.8849		2.8840		2.8831		2.8822		2.8813		2.8804		2.8794		2.8785		2.8776		2.8766	3
4		3.8466		3.8454		3.8441		3.8429		3.8417		3.8405		3.8392		3.8380		3.8368		3.8355	4
5		4.8082		4.8067		4.8051		4.8036		4.8021		4.8006		4.7990		4.7975		4.7959		4.7944	5
6		5.7698		5.7680		5.7662		5.7644		5.7625		5.7607		5.7588		5.7570		5.7551		5.7533	6
7		6.7315		6.7294		6.7272		6.7251		6.7229		6.7208		6.7186		6.7165		6.7143		6.7122	7
8		7.6931		7.6907		7.6882		7.6858		7.6834		7.6810		7.6785		7.6760		7.6735		7.6710	8
9		8.6548		8.6521		8.6493		8.6466		8.6438		8.6411		8.6383		8.6355		8.6327		8.6299	9
10	55	9.6164	60	9.6134	65	9.6103	70	9.6073	75	9.6042	80	9.6012	85	9.5981	90	9.5950	95	9.5919	100	9.5888	10
S	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	S

112c REDUCTION À L' HORIZON 112c

86c REDUCTION À L' HORIZON 86c

S	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	S
1	95	0.9586	90	0.9583	85	0.9579	80	0.9576	75	0.9573	70	0.9570	65	0.9567	60	0.9564	55	0.9560	50	0.9557	1
2		1.9171		1.9165		1.9159		1.9152		1.9146		1.9140		1.9133		1.9127		1.9121		1.9114	2
3		2.8757		2.8748		2.8738		2.8729		2.8719		2.8710		2.8700		2.8691		2.8681		2.8671	3
4		3.8343		3.8330		3.8317		3.8305		3.8292		3.8280		3.8267		3.8254		3.8241		3.8228	4
5		4.7928		4.7912		4.7896		4.7881		4.7865		4.7849		4.7833		4.7817		4.7801		4.7785	5
6		5.7514		5.7495		5.7476		5.7457		5.7438		5.7419		5.7400		5.7381		5.7361		5.7342	6
7		6.7100		6.7077		6.7055		6.7033		6.7011		6.6989		6.6966		6.6944		6.6921		6.6899	7
8		7.6685		7.6660		7.6635		7.6610		7.6584		7.6559		7.6533		7.6508		7.6482		7.6456	8
9		8.6271		8.6242		8.6214		8.6186		8.6157		8.6129		8.6100		8.6071		8.6042		8.6013	9
10	05	9.5856	10	9.5825	15	9.5793	20	9.5762	25	9.5730	30	9.5699	35	9.5667	40	9.5635	45	9.5602	50	9.5570	10
1	45	0.9554	40	0.9551	35	0.9547	30	0.9544	25	0.9541	20	0.9537	15	0.9534	10	0.9531	05	0.9527	00	0.9524	1
2		1.9108		1.9101		1.9095		1.9088		1.9082		1.9075		1.9068		1.9062		1.9055		1.9048	2
3		2.8661		2.8652		2.8642		2.8632		2.8622		2.8612		2.8602		2.8592		2.8582		2.8572	3
4		3.8215		3.8202		3.8189		3.8176		3.8163		3.8150		3.8137		3.8123		3.8109		3.8096	4
5		4.7768		4.7752		4.7736		4.7720		4.7703		4.7687		4.7670		4.7654		4.7637		4.7620	5
6		5.7322		5.7303		5.7283		5.7264		5.7244		5.7224		5.7205		5.7185		5.7165		5.7145	6
7		6.6876		6.6853		6.6830		6.6808		6.6785		6.6762		6.6739		6.6716		6.6692		6.6669	7
8		7.6430		7.6404		7.6378		7.6352		7.6326		7.6299		7.6273		7.6246		7.6219		7.6193	8
9		8.5984		8.5954		8.5925		8.5896		8.5867		8.5837		8.5807		8.5777		8.5747		8.5717	9
10	55	9.5537	60	9.5505	65	9.5472	70	9.5440	75	9.5407	80	9.5374	85	9.5341	90	9.5308	95	9.5274	100	9.5241	10
S	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	M	S sin² φ	S

113c REDUCTION À L' HORIZON 113c

tes de z' con cuatro decimales y, como se vé en la que copiamos como muestra en la página 281, tiene análogas condiciones que la anterior, si bien los minutos de la parte inferior de

s subcasillas corresponden al grado del margen superior y los de la superior al de la inferior.

La 3.ª está impresa en 12 ¼ páginas de *papel blanco* y, como aparece en la muestra que po-emos en la página anterior, es análoga á la precedente, pero de 5 en 5 centígrados: comparán-ola con la casilla del grado 113 de la nuestra y suponiendo esta reducida á la subcasilla de en.ª correspondientes á las 10 primeras unidades, se comprenderán las ventajas que resulta-an de las modificaciones antes indicadas.

Siendo necesario calcular el valor de D para utilizarle como argumento de z', x é y, y pu-éndose hallar al mismo tiempo que el de z', parécenos poco oportuna su separación en dis-ntas Tablas.

Veamos ahora cómo por medio de estas calculamos las coordenadas D, z', x é y con los itos antes admitidos

$$g = 184'6 \quad ; \quad \varphi = 113'85 \quad y \quad \theta = 73'84$$

Para hallar el valor de D buscamos en la 3.ª (caja de 113ᶜ y M = 85' inferior) (1).

para . . .	100. . . .	95'341
	80. . . .	76'273
	4. . . .	3'814
	0'6 . . .	0'572
	g = 184'6 ;	176'000 = D.

En la 2.ª Tabla con D = 176'00 y φ = 113'85, se encuentra en la caja de 113ᶜ y 86' infe-or (1).

para . . .	100. . . .	22'122
	70. . . .	15'485
	6. . . .	1'327
	176	38'934

En la 1.ª Tabla con D = 176 y θ = 73'84ᶜ se encuentra (en la caja de 73ᶜ y subcasilla de ' inferior).

		x		y
para . . .	100. . . .	91'675	;	39'945
	70. . . .	64'173	;	27'962
	6. . . .	5'501	;	2'397
	176 ;	161'349	;	70'304

Estos valores de las coordenadas coinciden sensiblemente con los antes determinados y ira que mejor se pueda hacer la comparación, parécenos oportuno consignar un resúmen de s resultados obtenidos con cada una de las Tablas examinadas.

Con los datos g = 184'6; φ = 113'85ᶜ y θ = 73'84ᶜ han resultado para D, z', x é y, con las ablas de

Carderera. . .	D = 175'98 ;	z' = 37'432 ;	x = 161'36 ;	y = 70'28
Bárcena . . .	» = 176'02 ;	» = 38'883 ;	» = 161'366 ;	» = 70'31
Cuartero . . .	» = 176'06 ;	» = 38'91 ;	» »	» »
Ruiz Amado. .	» = 176'02 ;	» = 38'878 ;	» = 161'357 ;	» = 70'28
Orlandi . . .	» = 176'03 ;	» = 38'906 ;	» = 161'30 ;	» = 70'41
Jadanza . . .	» = 175'99 ;	» = 38'93 ;	» »	» »
Herrera y Torres	» = 176'00 ;	» = 38'905 ;	» = 161'349 ;	» = 70'304
Salmoiraghi. .	» = 176'00 ;	» = 38'934 ;	» = 161'349 ;	» = 70'304

(1) Si, como parecía regular, se buscara en la subcasilla de 85' superior, no resulta bien.

Tablas de López Cepero (D. Adolfo)

En un folleto de 116 páginas de 25×17'5 centímetros, con esmeradas condiciones tipográficas y buen papel, este ilustrado Topógrafo, que para su uso particular las tenía calculadas mucho antes, las publicó en 1902 (1).

Con una instrucción detallada para cada una se comprenden en el indicado folleto siete Tablas.

La I, que es la principal, mediante los productos de los senos y cosenos de los *ángulos sexagesimales* de grado en grado de 1° á 89° y sus diferencias de 1' por los números sucesivos de 51 á 500 y las centenas siguientes hasta 1000, dá los valores correspondientes á D, z', x é y, los dos primeros cuando se conoce el ángulo de inclinación, que llama φ, y el valor de la línea de pendiente *P* ó el número generador *g*, conseguido con la estadía, y los últimos conociendo los valores de *D* ó *g* y el ángulo azimutal, que llama α.

La II, auxiliar de la I, dá hechos los productos de los minutos de 1' á 30' por las distintas diferencias que á cada uno corresponden en la I, aunque en esta ya se consignan en tablitas marginales para cada diferencia de 2' en 2'.

La III, limitada á una sola página, tiene por objeto reducir todos los ángulos azimutales á los del primer cuadrante, expresándose en su explicación (página 12) el signo de cada una de las dos coordenadas planimétricas, *x* é *y* que les corresponden.

La IV, tambien de una sola página, sirve para reducir á *sexagesimales* los ángulos *centesimales* medidos; pero no dá los directamente equivalentes, si no los que corresponde utilizar con la Tabla I; es un poco complicado su uso, pero de indudable importancia.

La V, tambien de una sola página, es aun mas interesante, pues permite medir las distancias por el sistema de una diferencia determinada de tangentes, evitando algunos de sus inconvenientes y la multiplicación exigida por este sistema de medición indirecta de las distancias ó el uso de Tablas especiales.

La VI, tambien de una página, destinada al sistema de diferencia de pendientes, se concreta á dar la equivalencia en grados, minutos y segundos de las pendientes sucesivas de 1 á 100 por 100.

La VII, finalmente, comprendida en tres páginas, al consignar la reducción de los ángulos verticales en otros, cuyo coseno sea equivalente al cos.² de los medidos, convierte la fórmula ordinaria

$$D = g \cos.^2 \alpha,$$ en la mas sencilla de

$$D = g \cos. \alpha'$$

que permite aplicar la Tabla I á la determinación del valor de D simplemente con el de g y α', que él llama φ': de manera que se obtiene el objeto que se proponen algunos conseguir con los taquímetros reductores.

Despréndese de las anteriores indicaciones el mucho interés que ofrece el estudio y empleo de estas Tablas económicas, especialmente para los Topógrafos que se vean obligados á utilizar teodolitos ó taquímetros sexagesimales; y sentimos no poder dar mas detallada explicación de cada una por falta de espacio, pues tendríamos que copiar la Instrucción que dá el Autor y menos una página de cada una de ellas, lo que nos ocuparía muchas: solo sí creemos oportuno consignar, que, como resulta de lo que dice en las páginas 9 y 10 relativamente á la aplicación de la Tabla I á los valores de *g* determinados con la estadía, utiliza las mismas fórmulas en que basó las suyas el ilustre Ingeniero Orlandi, y que dejamos antes explicadas.

Con esto creemos dejar cumplido nuestro objeto y en su vista y la de lo dicho en el número anterior cada uno podrá elegir el aparato ó las Tablas que mas fueren de su gusto.

---

(1) Al precio de 5 pesetas se venden en casa del Autor, Jerez de la Frontera, y á 5'50 en las principales librerías del resto de España.

83 — Trasportadores especiales, cuadradores y coordinatógrafos.

Lo que ahora hemos de consignar sobre trasportadores ha de ser tan solo complemento de lo que en distintos puntos del libro ya hemos dicho y conviene indicar donde lo hicimos para que pueda hacerse el estudio completo, si fuere necesario.

En el número 7 del volúmen I afirmábamos cuan ilusorio resulta utilizar en la construcción de los planos trasportadores de apreciación de 10″ ó 20″ y para demostrarlo basta determinar el valor del arco de diferentes magnitudes angulares mediante la fórmula segunda del grupo A del número 6 en el supuesto de ser el diámetro del trasportador de 30 centímetros, que es el mayor generalmente empleado.

En efecto; resulta para

$40''$; $l = \frac{40'' \times 0'15}{206.265''} = 0'029$ mm. completamente inapreciable á la vista y mucho menos en la marcación.

$360'' = 6'$; $l = 0'26$ mm.

límite de la visión ordinaria solo conseguible en la trasportación con alidada á 30 centímetros del centro operando con sumo cuidado y lápiz finísimamente afilado.

¿De qué sirve por consiguiente la apreciación de 10″ ó 20″ en el graficismo? Para molestar y hacer perder tiempo.

Llamamos la atención sobre esto, porque todavía hay Topógrafos que usan y recomiendan los trasportadores costosos de apreciación de 10″ y creen utilizarla en sus gráficos.

En el número 66 del volúmen I, describimos las condiciones, uso y manejo de los trasportadores de cartulina de semicírculo con diámetro graduado y el hueco de grandes dimensiones con alidada dispuesta para toda clase de escalas, que unimos á nuestro Círculo logarítmico, que son de grande aplicación en la construcción de los planos modernos, cuando no se calculan las coordenadas ortogonales de todos los puntos característicos y por su medio se fija en ellos su situación, como debiera hacerse siempre, y fácil es de comprender que, especialmente con el 2.°, se consigue el objeto con tanta exactitud como con los trasportadores de metal con nónius y alidada para cuya comparación allí se describe el de Trougthon, que tanta fama adquirió en otros tiempos.

En su lugar se hacen ahora por Salmoiraghi de la forma del de la figura 98, que con diámetro de 16 centímetros y nónius que aprecia 2′ se encuentra en casa de Biosca, Basso y Alsina, al precio de 95 francos.

En la misma casa se construye otro semicircular con alidada graduada fija de 30 centímetros, que algunos Topógrafos catalanes consideran preferible á los precedentes.

En escala de $^1/_4$ le representamos en la figura 99.

La alidada y el semilimbo se adosan exacta y perpendicularmente en el punto *C*, que por medio de un botón con fina punta de acero, sirve de eje de giro, sujetándose aquellos entre sí por los tornillos *a* y *b*.

La alidada consiste en una regla achaflanada con dos escalas diferentes y para utilizar la que convenga se cambian sus extremos, á cuyo efecto está escotada en los puntos *C* y *g* y tiene abiertos pequeños orificios en *a*, *b*, *e* y *f*, en que enroscando los tornillos *a* y *b* la sujetan á la pieza *A* fija á la plancha del semilimbo haciéndose este y aquella independientes para su guarda en estuches separados.

Las escalas, que en la figura se indican, son las de $^1/_{1000}$ y $^1/_{2000}$ fina y claramente divididas sobre ebonita en medios milímetros y en otras, que se venden separadamente, hay diferentes combinaciones de escalas.

El semilimbo está finamente grabado sobre plata en superficie ligeramente cónica, graduado en medios grados centesimales y numeradas sus decenas de tal manera, que, creciendo

en el sentido de N. á E., S. y O., mediante la meridiana y su perpendicular se dá á la alidada todas las direcciones de 0ᶜ á 400ᶜ. Para conseguir la contraria ó la graduación sexagesimal es preciso hacer el encargo expresamente.

Como el canto de la regla alidada en que está la escala utilizable y el diámetro 100ᶜ-300ᶜ del limbo se cortan perpendicularmente en el eje *C*, la comprobación de este trasportador es sencillísima; basta al efecto trazar sobre el papel dos rectas perpendiculares entre sí y tomar sobre la superior á partir de la intersección 10 ó 20 centímetros justos; hecho esto se coloca el

Fig. 98

instrumento de manera que el canto útil de la alidada y el punto que en ella marque la distancia antes tomada, coincidan exactamente con la recta y el punto antes señalados; la graduación 400ᶜ ó 0ᶜ coincidirá con la prolongación de la misma recta y con la perpendicular el diámetro 100ᶜ-300ᶜ; si estas coincidencias no se verificasen exactamente, se mueve el semilimbo hasta conseguirlo rectificando la posición de la regla por medio de sus tornillos y, colocando el botón *C* con cuidado perpendicularmente al plano del papel, en él marcará y fijará el eje en la intersección de las dos perpendiculares primero trazadas.

Su manejo es tambien sumamente sencillo: suponiendo trazadas la meridiana y perpendicular de una estación, y el trasportador en la posición antedicha, en los rumbos: de 0ᶜ á 100ᶜ la parte S. de la meridiana servirá de índice que indique el rumbo, y señalando con la punta bien afilada de un lápiz la distancia tomada en la escala, quedará determinada la posición del punto: el movimiento del trasportador se hace con el botón *d* cuidando de hacer el giro suavemente;

de 100ᶜ á 300ᶜ sirve de índice la parte O. de la perpendicular á la meridiana y

de 300ᶜ á 400ᶜ la N. de esta.

El semilimbo, los tornillos y botón-eje, van colocados en un buen estuche y cada dos reglas en otro.

El trasportador con una regla de dos escalas cuesta 80 pesetas. — Cada regla de repuesto 12 pesetas.— El estuche para el trasportador cuesta 8 pesetas.—El estuche para dos reglas cuesta 7 pesetas.

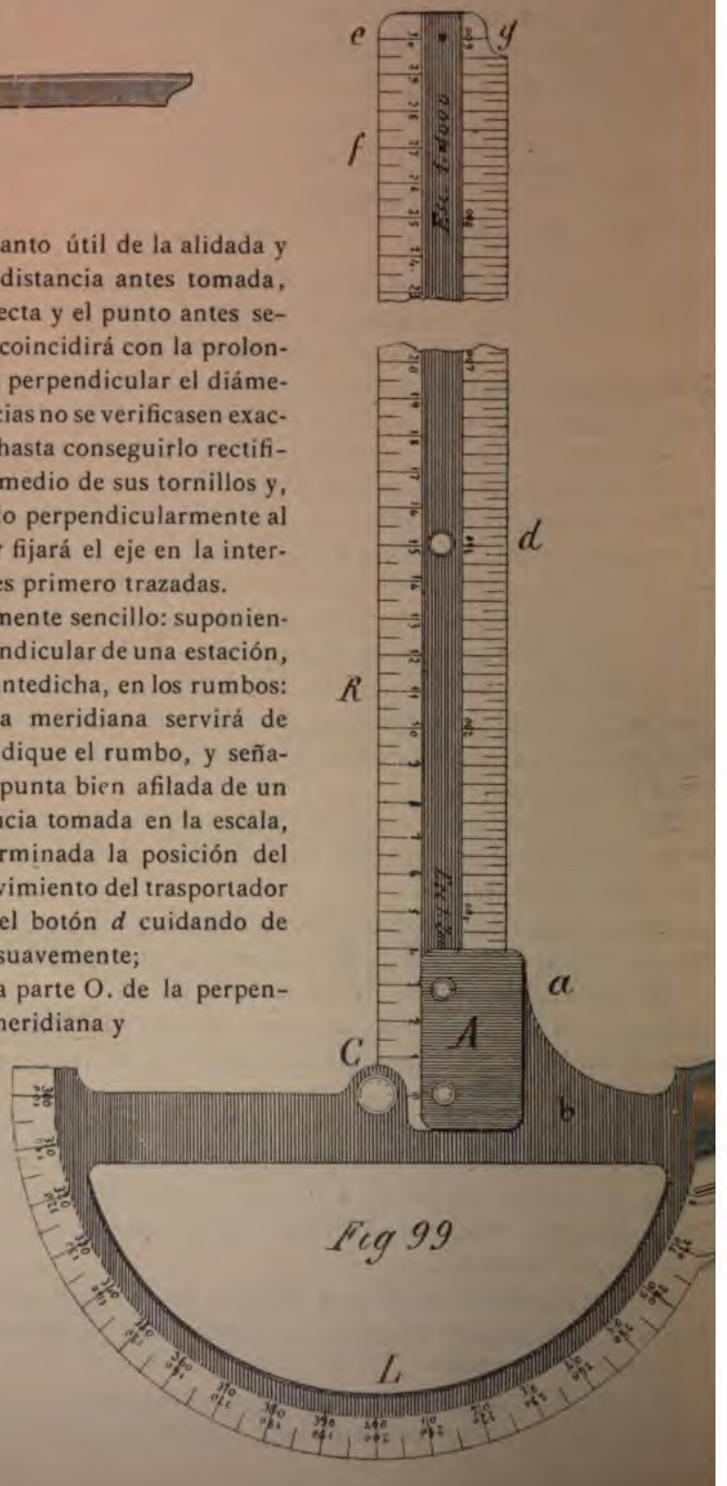


Fig 99

Creemos que este trasportador puede dar buenos resultados en los planos de grande escala ntrándole con cuidado para evitar que se agrande el agujero abierto por el eje.

Otros constructores los hacen de mayor diámetro y apreciación teórica y mas costosos, ro sin mejor resultado práctico que lo antes dicho.

En el número 19 describimos los trasportadores de talco de semicírculo y de círculo en- o, cuyo uso está muy generalizado, aunque cada día mas se sustituyen por los de cartulina ausa de su mas fácil manejo y menor coste.

En el mismo número hicimos conocer el metálico de círculo entero, con radio graduado y trapesos, que permite orientarle y conservarle en la posición conveniente sin agujerear el el y trasportar sencilla y rápidamente los rumbos (1) y ajustándose á los principios sentados re apreciación verdadera en la trasportación (5' ó 10') se acomoda á las necesidades de los nos gráficos modernos, por todo lo que es recomendable.

Finalmente en el número 24 dimos á conocer el trasportador de dos alidadas ó «*Station-ater*» que se utiliza con grandes ventajas en la situación gráfica de los puntos determinados intersección inversa resolviendo sencillamente el problema de Pothenot ó de la carta.

Como está, entre los Topógrafos, bastante generalizada, por desgracia, la idea de determi- las coordenadas ortogonales solo para las estaciones y fijar la situación de los puntos carac- sticos por rumbo y distancia con relación á ellas buscando economizar el tiempo que exige álculo de aquellas menospreciando las ventajas de los planos numéricos sobre los gráficos, muchísimas las formas adoptadas para los nuevos trasportadores; pero como los ya descri- satisfacen cumplidamente á tal objeto, nos limitarémos á indicar las condiciones de otros

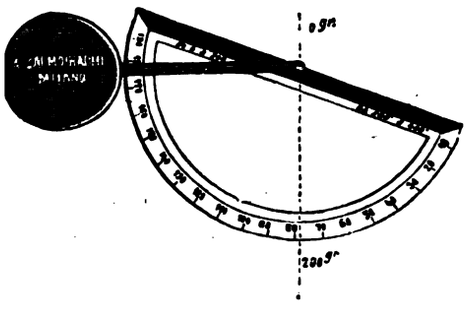


Fig. 100

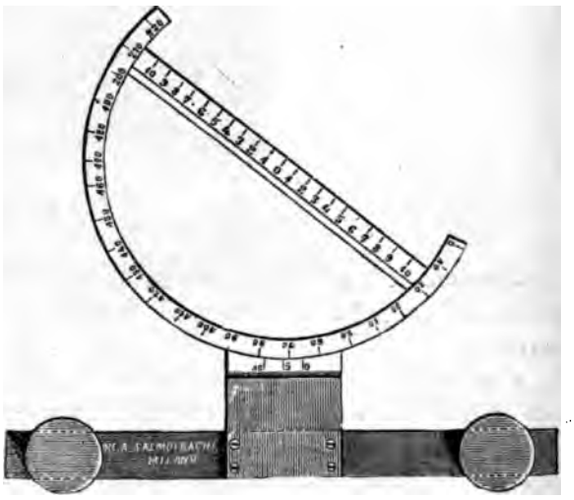


Fig. 101

s, que son tambien de uso muy comun en Italia, y los de Piat y Abate-Daga, que evitan al pio tiempo los cálculos para determinar las distancias horizontales y verticales, siquiera nsiderémos esto mas que un progreso un retroceso, porque siempre lo será posponer las so- iones numéricas á las gráficas, cuando aquellas con tanta facilidad y rapidez se pueden con- uir.

En la figura 100 aparece uno de los tres modelos aludidos en la escala de 1 : 4'5.

El peso suele tener distintas formas, pero siempre es bastante para dar estabilidad al arato.

---

(1) De 24 centímetros de diámetro y apreciación de 5' ó 10' con su estuche se vende en Casa de Biosca y mpañía, á 60 francos.

En el extremo de la vara rígida, á aquel unida, lleva un finísimo punzón, que mediante un resorte se sube y baja para colocarle exactamente en el punto de estación.

El centro del semicirculo trasportador está marcado por un agujerito, en que entra el extremo del punzón quedando entonces aquel en libertad para girar con seguridad en todas direcciones y en ellas el diámetro, graduado en medios milímetros, permite señalar las distancias fijando su dirección la meridiana en la semicircunferencia graduada.

El ejemplar que hemos podido ver en casa de Biosca y Comp.ª, nos pareció muy bien y evita los inconvenientes indicados para los semicirculares de cartulina; su precio es de 48 francos.

La figura 101 representa en escala de 1 : 4'5 otro modelo con sencillo nónius, que permite apreciar $^1/_{10}$ ó $^1/_{20}$ de grado.

La línea de los pesos se ha de colocar paralela al eje de las *x* y el centro del diámetro graduado en el punto de estación produciéndose el giro mediante el arco que lleva el nónius. Este modelo no ofrece tan buenos resultados como el anterior y cuesta 60 francos.

Fig. 102

Finalmente la 3.ª forma, representada en la figura 102, consiste en una tabla de madera oscura, en que está incrustado un trasportador de círculo entero plateado con el centro bien marcado.

Para conseguir la situación relativa de todos los puntos característicos determinados desde cada estación, se extiende sobre aquella un papel trasparente y como se vé claramente el centro y la graduación, con un doble decímetro se fija la situación de todos los puntos por rumbo y distancia, inclusas las estaciones anterior y siguiente, y despues este papel de calco se pega al del plano croquizando sobre él mediante las estaciones señaladas.

Esto equivale á los eydotypos de Porro: no consideramos aceptable este medio de trasportación, que dará lugar á planos borradores confusos y defectuosos.

Este trasportador cuesta en casa de Biosca y Comp.ª, 30 francos.

De todo esto resulta que de los tres modelos indicados solo el primero puede ofrecer sobre los de cartulina semicirculares las ventajas de no agujerear el papel del plano, de que no se altera el centro y por consiguiente los rumbos se señalan con alguna mayor precisión y que como gira mas rápidamente se puede ganar tiempo en la trasportación.

Trasportador taquimétrico reductor de Piat

Este ilustrado Ingeniero, Jefe del servicio topográfico de Tunez, se propuso economizar en la construcción de los planos no solo el cálculo de las coordenadas ortogonales planimétricas, x é y, de los puntos característicos, sino tambien el de la reducción de las distancias al horizonte y lo consiguió con su trasportador taquimétrico, que en la figura 103 representamos.

En el cuaderno de Diciembre de 1894 de nuestra Revista *La Topografía Moderna y el Catastro* insertamos la descripción detallada de este ingenioso aparato.

Ahora nos concretarémos á consignar lo mas esencial de ella.

Compónese de dos coronas circulares A y B pudiendo esta girar libremente ó sujetarse á la 1.ª mediante el tornillo de presión, que en la figura aparece sobre la graduación 350 c, de un sector C, que gira alrededor del centro y puede sujetarse al plano de la corona B mediante el tornillo K y de una escuadra D, que se mueve paralelamente así misma apoyándose en un resalto del travesaño B B paralelo al diámetro *m n* de la corona B.

La 1.ª, A, tiene dividida su circunferencia interior en grados y medios grados de 0 c á 400 c, que permite orientar el aparato y determinar las direcciones de los puntos fijándose el papel

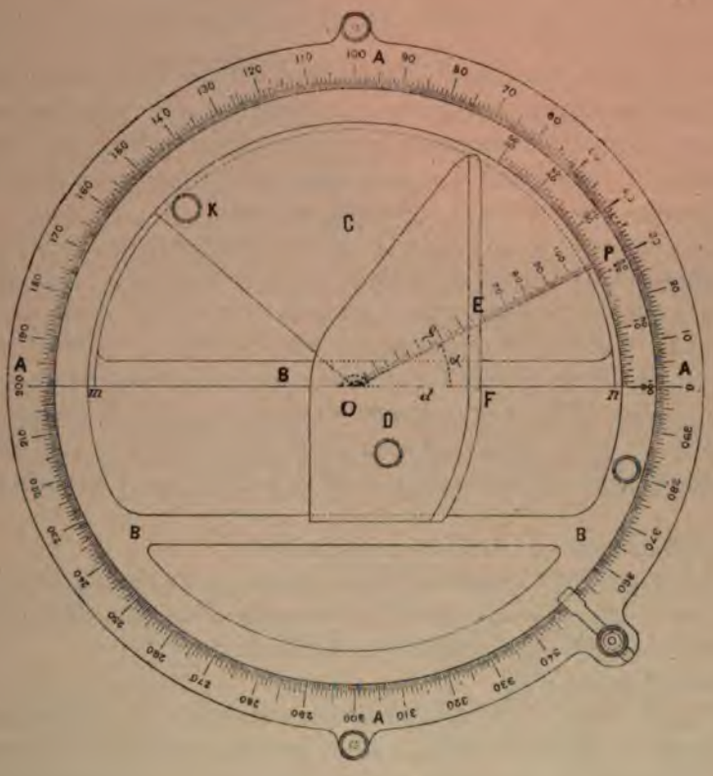


Fig. 103

en la posición conveniente mediante los tornillos con punta, A A, situados en las graduaciones 100 c y 300 c.

La 2.ª, B, tiene un arco de su circunferencia interna graduado á partir del diámetro *m n* de tal manera que el coseno de cada una de sus partes equivale al cos.ª del arco que expresa la numeración de su graduación, esto es, segun en la figura se indica, cos. 30'79 c = cos.ª 22 c.

El sector, C, tiene graduado uno de sus lados, O P, en la escala misma del plano.

La graduación especial de la zona B se puede determinar de dos maneras muy sencillas; concretémonos á la 1.ª trascribiendo la sencilla explicación del ilustrado Topógrafo Mr. Aubertel.

«Con presencia de una Tabla de los valores naturales de las funciones goniométricas en »que se encuentren los de los cos.ª, formarémos otra con la indicación de los grados en que el »cos. de uno de estos valores sea equivalente al cos.ª del otro, como á continuación se indica »para los arcos de 10 c á 15 c, en que se comprende el valor natural de ambos para mayor cla»ridad.

Cos.ª de	10'00^c = 0'9755 =	Cos.	14'12^c
»	10'50^c = 0'9730 =	»	14'81^c
»	11'00^c = 0'9705 =	»	15'50^c
»	11'50^c = 0'9678 =	»	16'20^c
»	12'00^c = 0'9649 =	»	16'91^c
»	12'50^c = 0'9619 =	»	17'61^c
»	13'00^c = 0'9589 =	»	18'31^c
»	13'50^c = 0'9557 =	»	19'02^c
»	14'00^c = 0'9524 =	»	19'72^c
»	14'50^c = 0'9490 =	»	20'42^c
»	15'00^c = 0'9555 =	»	21'11^c

»Ahora bien; si hecha la coincidencia del extremo del diámetro *m n*, ó índice de la zona B, »con el vértice de la zona A sujetamos las dos y por medio de los radios que pasan por las gra- »duaciones de la zona A correspondientes á los valores 14'12, 14'81... etc., marcamos la gra- »duación de la zona B y en lugar de estos números escribimos ó indicamos los arcos 10^c, »10'50^c..., claro es que obtendrémos el resultado apetecido.

»Esta graduación especial se hará mejor y mas sencillamente con la máquina de dividir y »se realizará con mas facilidad observando que á partir del arco 14'12^c los demas difieren muy »aproximadamente en 0'70^c para cada 0'50^c que se quieren marcar y esto mismo se observa de »5^c á 10 grados; de 15^c á 25^c la diferencia es, por término medio, de 0'68^c por cada 0'50 del »cos.ª y de 25^c á 30^c desciende aquella á 0'67^c; de manera que, como se trata de trasportadores »sin nónius y con destino á fijar la situación de los detalles, podría fijarse como diferencia me- »dia general, á partir de los 5^c, 0'70^c por cada 0'50^c de la graduación del limbo A, cuidando »de fijar en cada media decena lo que resultara de la Tabla especial formada como queda indi- »cado.»

El *manejo de este aparato* no puede ser mas sencillo.

Una vez fijada en el plano la situación de las estaciones mediante sus coordenadas ortogonales planimétricas, se orienta el aparato ó con referencia á los lados de la base de operaciones ó mediante la meridiana y su perpendicular de cada estación.

Utilicemos este 2.º medio.

Se mueve la corona B hasta que su diámetro *m n* coincida con la graduación 100^c-300^c de la de A; se aseguran mediante el tornillo á esto destinado y colocando el centro del aparato sobre la estación y el diámetro *m n* sobre la perpendicular es consiguiente que el diámetro 0^c-200^c de la graduación de A coincidirá con la meridiana estando orientado el aparato, que se asegura al papel con los tornillos A A comprobando las coincidencias indicadas.

Suponemos que la numeración de la graduación de la corona A se corresponda con el sentido en que aumenten los rumbos ó valores de θ.

Se pone en libertad la corona B y utilizando como índice el extremo del diámetro *m n*, se le pone en la dirección correspondiente al valor de θ del lado determinado desde la estación que se vá á detallar y la anterior, p. e., asegurando aquella en esta posición.

Desenroscando el tornillo K se mueve el sector, C, hasta que su radio O P coincida con la graduación correspondiente al valor del ángulo vertical, v, complemento de φ en el arco graduado de la corona B fijándole en esta situación.

Finalmente con el botón D se mueve la escuadra hasta que su cateto coincida en la escala del radio O P con el valor de g, y marcando con la punta del lápiz el punto F, intersección del diámetro *m n* con el dicho cateto, aquel debe ser el punto de estación antes determinado por sus coordenadas planimétricas.

Conviene hacer esta determinación gráfica de la estación anterior ó siguiente ó la de ambas para comprobar la colocación del aparato.

Despues, mediante los valores de θ, v y g, se determina del mismo modo la situación de cada uno de los puntos característicos observados desde la misma estación y antes de levantar el aparato se comprueba con la estación anterior ó siguiente.

Justifiquemos la solución dada por el aparato.

Suponiéndole orientado y el diámetro *m n* en la dirección correspondiente al rumbo del punto que se trata de determinar y el radio O P del sector en la dirección indicada por el ángulo vertical; v, leído en su especial graduación, y el canto de la escuadra, D, coincidiendo con el valor de g, leído en la escala de O P; vamos á demostrar que O F será la distancia horizontal del punto á la estación y por consiguiente F la situación verdadera del punto.

En efecto: en el triángulo O E F, resulta:

$$O F = O E \cos. \alpha = g \cos. \alpha;$$

pero $\cos. \alpha = \cos.^2 v$,

luego $O F = g \cos.^2 v = D$

«La diferencia de nivel entre la estación y el punto de detalle visto, dice Mr. Aubertel, »puede obtenerse tambien directamente con este trasportador prolongando el radio graduado, »O P, del sector hasta el limbo A, en que á tal efecto, se le haría coincidir con el verdadero »valor de *v* y graduar con la escala del plano el cateto recto de la escuadra á partir de F; pues »entonces F E seria la tangente á que habría de sumarse la diferencia *i-m;* es claro que aquellos »desniveles solo serían aproximados, pues no se apreciarían mas que los decímetros en las es»calas de $^1/_{1000}$ y $^1/_{2000}$» (1).

Trasportador taquimétrico de G. Abate-Daga

En los cuadernos de Diciembre de 1901 y Febrero de 1902 de la «Rivista di Topografia e Catasto», consta la descripción detallada que este ilustrado Ingeniero hizo de su aparato.

Este, como desde luego se comprende al comparar la figura 104 que le representa, con la

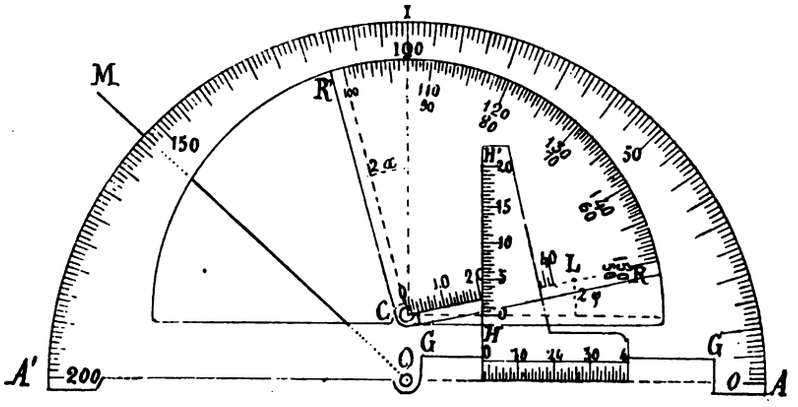


Fig. 104

103, es enteramente análogo al de Mr. Piat, solo difieren en las graduaciones especiales del sector y la escuadra por ser distintas, aunque equivalentes, las fórmulas que por medio de cada uno de ellos se resuelven.

Las que ha tenido en cuenta Mr. Piat son:

(1) El trasportador taquimétrico de Piat está privilegiado en Francia y otras naciones, se construye en los talleres de M. Barthélemy, París-rue Danphine y se vende:

El modelo pequeño con la escala de $^1/_{2000}$ á 105 francos.

El id. grande con las de $^1/_{2000}$ $^1/_{2000}$ y $^1/_{10000}$ á 150 francos.

$$D = g \cos.^2 v \quad y \quad z' = D \text{ tang. } v$$

siquiera se concrete especialmente á la 1.ª

Las que han servido de norma al Sr. Abate-Daga, son:

$$D = {}^1/_2\, g + {}^1/_2\, g \cos. 2\varphi \quad ; \quad z' = {}^1/_2\, g \text{ sen. } 2\varphi$$

que son las utilizadas por Orlandi en sus Tablas y, segun hemos demostrado, respectivamente equivalentes á aquellas.

El fundamento del aparato le demuestra su Autor de la manera siguiente:

Sea O, figura 105, el punto correspondiente á la estación, O M la línea orígen de los ángulos horizontales y α el que con ella forma la visual dirigida al punto P, que queremos determinar.

Desde C, sobre la perpendicular en O á la O D, trácese la C D' paralela á esta y la C L' que con ella forme un ángulo igual á 2 φ y tomando la porción C L = ${}^1/_2\, g$ bájese la perpendicular L Q á O D y desde Q tómese sobre esta una magnitud Q P = ${}^1/_2\, g$, resultará:

$$O\,Q = C\,Q' = C\,L \cos. 2\varphi = {}^1/_2\, g \cos. 2\varphi \text{ y por consiguiente}$$
$$O\,P = {}^1/_2\, g + {}^1/_2 \cos. 2\varphi = D.$$
$$L\,Q' = C\,L \text{ sen. } 2\varphi = {}^1/_2\, g \text{ sen. } 2\varphi = z'.$$

En su consecuencia para que el aparato pueda utilizarse en los planos de escala ${}^1/_{1000}$, ha dividido el cateto de la escuadra y el lado C R del sector en medios milímetros, que numera como milímetros, y por consiguiente, tomando en estas escalas el valor de g, realmente se hace de ${}^1/_2\, g$, que serán los correspondientes á C L y Q P de la figura 105.

El otro cateto de la escuadra, H H', le divide en milímetros á partir de la altura de C para que dé los valores verdaderos de z' ó Q' L de la figura 105.

El arco del sector le divide en dobles grados numerándolos como sencillos para que por medio del índice I nos dé para el ángulo L'C D' (figura 105) 2 φ.

Finalmente el trasportador está graduado como los comunes.

Es innecesario detallar las condiciones de construcción y los movimientos de las partes del aparato, porque se deducen de su analogía con el de Piat y de la figura 104.

Su manejo es sencillísimo.

Con la gradución exterior se hace tomar al radio O A la dirección del plano visual; se hace girar el sector hasta que el índice I señale el ángulo φ apretándolos suavemente en esta posi

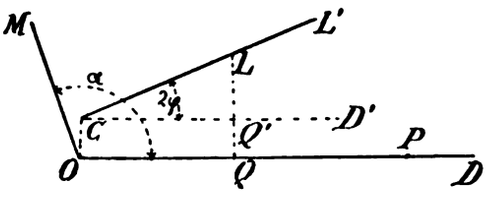


Fig. 105

ción, se corre la escuadra hasta que el cateto H H' señale en la escala de C R el valor de g y a partir de O se toma el mismo valor señalando con una punta de lápiz muy afilado el punto P, cuya altura z' sobre la estación la marcará sobre la escala H-H' la C R, á la que habrá que añadir la diferencia i—m para tener el valor de z, que se puede escribir al lado de P.

A la escala G G' la llama *planimétrica,* á la C R *generatriz* y á la H H' *altimétrica.*

No creemos oportuno dar mas detalles sobre este aparato; pues pensamos respecto á él como su Autor relativamente á los auto-reductores; ***en lugar de economizarse tiempo se pierde y no poca precisión; pues nunca por estos medios gráficos se conseguirá la que se obtiene por los***

procedimientos numéricos, aunque los cálculos se hagan mecánicamente para economizar tiempo: con nuestro *Círculo logaritmico* y *Doble trasportador* se pueden construir los planos mejor y en menos tiempo, hacer á la vez varios ejemplares en distintas escalas y conservar ordenadamente las coordenadas ortogonales, ó plano numérico, que es siempre y por muchas razones preferible.

Cuadradores y coordinatógrafos

Ya se construyan los planos modernos determinando la posición de todos los puntos por sus coordenadas planimétricas, ya se limite esto á las estaciones y se fijen los característicos por rumbo y distancia con relación á ellas, siempre es necesario cuadricular el papel de una manera lo mas exactamente que sea posible, no solo para reducir los errores á los imprescindibles del graficismo sino tambien para que en todo tiempo la cuadrícula ponga de manifiesto las variaciones que experimenten las figuras á causa de las que tenga el papel por influencia del calor, la humedad y otras, lo que recientemente ha inducido á construir y grabar los planos matrices catastrales sobre planchas de zinc con muy buen acuerdo, pues no solo los hace

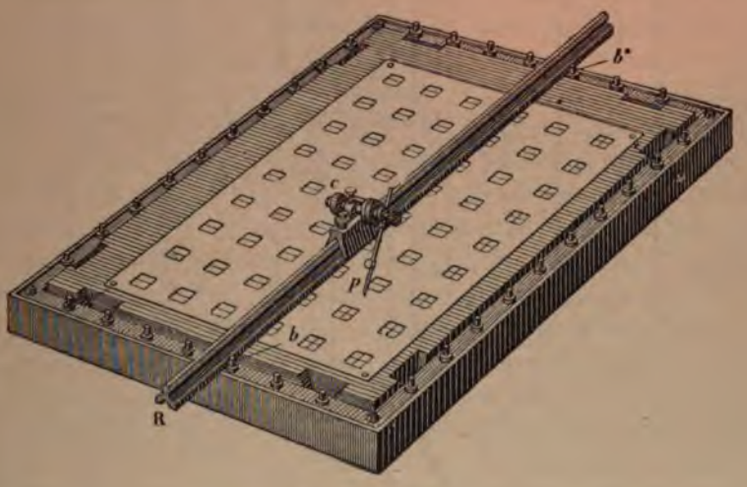


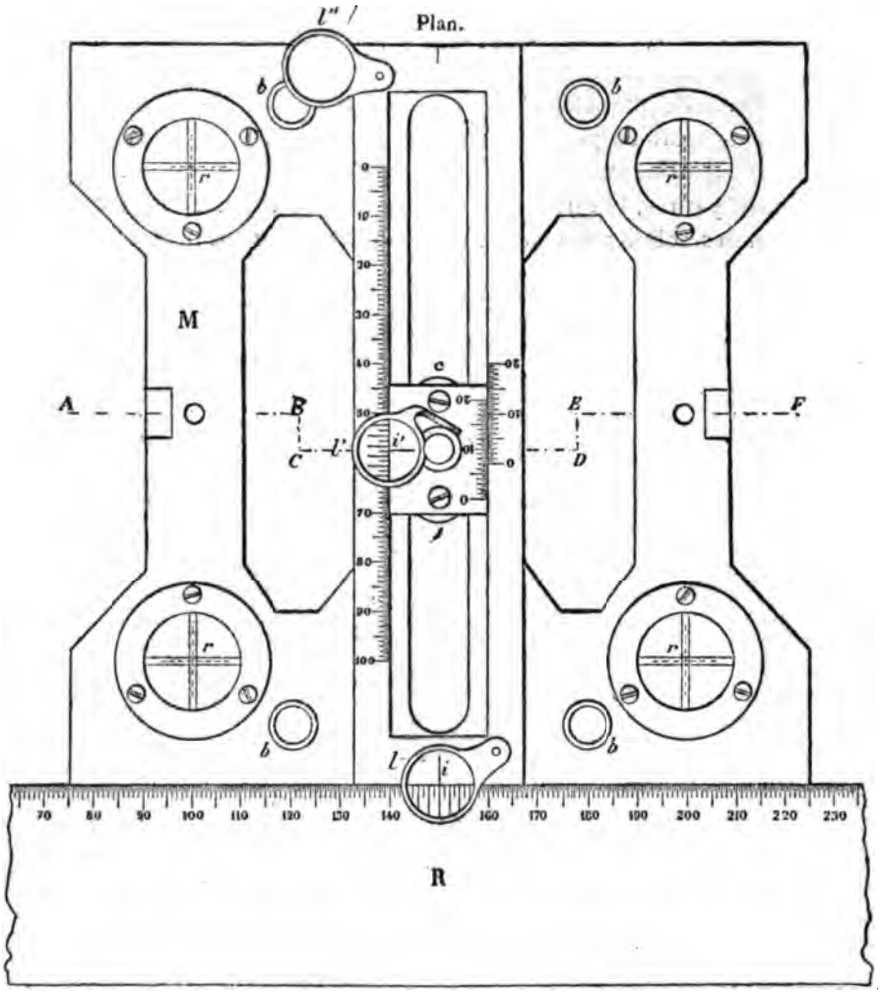
Fig. 106

invariables, sino que permite conseguir por este medio y con un insignificante gasto grandísimo número de ejemplares.

El papel cuadriculado mecánicamente, que en el comercio se encuentra, no lo está con suficiente precisión obligando á hacerlo á mano, y como no es tan fácil, como á primera vista parece, se han inventado aparatos para conseguirlo en los centros catastrales, en que es mas necesaria la máxima precisión y gran número de papeles ó láminas cuadriculadas: en otros casos se habrá de hacer á mano con mucho cuidado en la forma conocida y como este será el caso mas general nos limitarémos á decir sobre este particular, que la cuadrícula necesaria es la de *un decímetro de lado* y á indicar las condiciones del *Cuadrador* de Mariani algo modificado y utilizado por Lallemand en el nuevo Catastro de Neully-Plaisance.

Como claramente aparece en la figura 106, consiste este aparato en un bastidor de hierro perfectamente rectangular, en cuyos lados están fijos unos botones exactamente espaciados en un decímetro y dispuestos de manera que las líneas ó trazos marcados por el tiralíneas ó punzón, *p*, unido al carrete, *c*, corriendo por la regla, *R*, colocada en contacto con los botones conjugados sean paralelos los que van en el mismo sentido y á ellos perpendiculares los que se trazan en el otro; para que esto suceda y para que los cuadriláteros resultantes sean exactamente cuadrados de un decímetro de lado, se toman todas las precauciones necesarias y se hacen las oportunas comprobaciones.

La figura indica cómo se coloca el papel ó plancha que se quiere cuadricular y para evitar el inconveniente de trazar las líneas seguidas y concretar la cuadrícula á las intersecciones se colocan bandas de papel que reciban la impresión del tiralíneas ó punzón, que despues se quitan consiguiendo el objeto, pues quedan perfectamente marcados los vértices de los cuadrados, que es lo que se necesita y los lados no molestan ni complican el dibujo; por lo que esto mismo conviene hacer cuando se cuadricula á mano, aunque se utilice la tinta carmín para distinguir sus líneas del resto del dibujo.



Coupe suivant *ABCDEF*

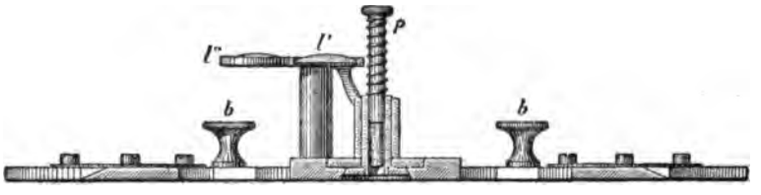


Fig. 107

Leyenda explicativa

R = Regla fija; *M* = Cuadro móvil; *b, b, b...* botones para el movimiento del cuadro; *r, r, r...* cruces sobre cristal para referir el aparato á la cuadrícula decimétrica; c = corredera con nónius; *i...* índice para la lectura de las abscisas; *i'* índice para la lectura de las ordenadas; *l, l', l''* lentes para la lectura de las graduaciones de los índices; *p* buril ó lápiz marcador.

En estos vértices y en la dirección conveniente se escriben la abscisa y ordenada corres-ndientes, segun la escala y ellas sirven despues de base para fijar la situación de los puntos r sus coordenadas planimétricas mediante el doble decímetro, como dirémos en el número uiente.

Pero para evitar las molestias que tal procedimiento motiva y economizar gran parte del mpo que exige, se han inventado y se utilizan los *coordinatógrafos*.

El mas sencillo y económico consiste en dos reglas graduadas enlazadas perpendicular-:nte entre sí y dispuestas de manera que una, la mas corta, se mueva fácilmente paralela-:nte asi misma; pues haciendo coincidir la otra con un eje de las abscisas, x, de manera que centenas de su graduación coincidan con las de la cuadrícula y las de la otra con las que en uella correspondan á las de las ordenadas, y, es consiguiente que por su medio será fácil se-lar la situación de los puntos, que tengan las coordenadas planimétricas comprendidas entre centenas, que abarquen las dos reglas y esto se hará fácil y exactamente.

Otras veces se sustituye la regla de las ordenadas con una escuadra, lo que tiene la ventaja darla mas seguridad y otras, y así las hemos utilizado muchas veces, la regla y la escuadra án sueltas y solo se unen por el contacto de sus cantos, disponiéndolas de manera que el cero la escuadra coincida exactamente en su movimiento con una de las líneas de la cuadrícula ralela al eje de las x y el de la regla con una de las paralelas al de las y.

Para hacer la trasportación con mayor seguridad y precisión, Lallemand, ha utilizado el arato representado, en planta y sección por A B C D E F, en la figura 107 (1), que no exige mas plicación que la correspondiente á la leyenda indicadora de sus partes para comprender que r su medio se fijará sencilla, exacta y rápidamente la situación de todos los puntos compren-los en los cuadrados de decímetro de lado que abarque la regla y si bien este aparato está eparado para marcar los puntos sobre plancha de zinc, basta hacer terminar el tornillo *p* r una punta de lápiz, para que los deje señalados en el papel: este aparato, que ha de dar celentes resultados, no es sin embargo apropiado para el uso comun de los Topógrafos y sí o para los centros catastrales; á aquellos les bastará utilizar con cuidado la combinación de regla y escuadra graduadas, lo que les permitirá fijar la situación de los puntos por sus coor-nadas planimétricas con 0'2 á 0'3 milímetros de error en mucho menos tiempo de lo que se nsigue por rumbo y distancia y como se puede hacer rápidamente la comprobación por la stancia de cada punto á la estación correspondiente y la de estas entre sí, todas las que cons-n en los registros, y por otra parte no se ensucia por este medio el papel, es indudablemente mejor para conseguir buenos planos gráficos.

4 — Preparación y construcción de los planos levantados por los procedimientos modernos.

Aunque se realicen en el campo simultáneamente con la medición de los datos ó argumen-s algunos de los cálculos, de que ahora nos hemos de ocupar, para comprobar aquellos al bjeto de repetirlos, si fuere necesario, antes de separarse del terreno, son y hemos de conside-rlos como *trabajos propios y característicos de gabinete*, pues lo que hasta ahora hemos ex-icado son los *medios* para realizarlos con la posible economía de molestias y tiempo y la ne-saria precisión y lo que en los números siguientes hemos de consignar, es solo el comple-ento de la materia del presente, *verdadero objeto final de los trabajos topográficos;* pues con os nos proponemos conseguir el plano del terreno *simplemente gráfico, gráfico-numérico* ó *nu-érico con gráfico,* que son distintas representaciones matemáticas de las condiciones geomé-cas del terreno, como lo son tambien que en ella solo se atienda á la accidentación plani-étrica ó á esta y la altimétrica y tambien se ha de distinguir que la última condición se re-

(1) Este aparato está dispuesto para la construcción de los planos en escala de $^1/_{1000}$; pero fácilmente se po-ía utilizar en los de escala múltipla ó submúltipla entera.

presente por la altura relativa de mas ó menos puntos *(plano acotado)*, por perfiles en distintas direcciones ó finalmente por curvas de nivel ú horizontales; es decir, que de un terreno podemos hacer, y se hacen muchas veces, las distintas representaciones siguientes:

1.ª El plano geométrico simplemente gráfico.
2.ª El plano anterior acotado mas ó menos.
3.ª El mismo plano con curvas de nivel.
4.ª El plano gráfico-numérico mas ó menos acotado.
5.ª El mismo anterior con curvas de nivel.
6.ª El plano numérico con gráfico mas ó menos acotado.
7.ª El mismo anterior con gráfico y curvas de nivel.

Hemos creído oportuno hacer estas distinciones, porque es muy frecuente, en la compa ra- ción de los procedimientos, confundir las diferentes representaciones del terreno y no es e sto racionalmente admisible.

Los planos de las tres primeras clases son los que se conseguían por los procedimien tos antiguos, utilizándose para la parte altimétrica unas veces los niveles, otras los clisímetro s y otras los eclímetros, como ahora tambien sucede y si bien algunos Topógrafos con los mode ler- nos aparatos á esto se concretan sin mas que determinar las distancias horizontales y algu nas veces las verticales con los datos estadimétricos, no nos ocuparémos de esta clase de planos por considerar suficiente lo ya dicho en el artículo 4.° del capítulo I y el 3.° del capítulo II de la *Parte anterior* relativamente á los antiguos procedimientos, ya que de los cálculos necesar ios para determinar las distancias horizontales y verticales, en el último caso aludido, nos hen nos ocupado ya en distintas ocasiones y á ellos aludirémos al hacerlo de la preparación de las ot ras clases de planos.

Estas, las cuatro últimas consignadas, corresponden á los modernos procedimientos y s olo difieren en que en la 4.ª y 5.ª se prescinde del cálculo de las coordenadas planimétricas, x é y, de los puntos característicos fijando su situación con referencia á cada estación gráficame nte por rumbo y distancia y en las 6.ª y 7.ª no se prescinde de tal cálculo consiguiendo el pla no numérico y construyendo el gráfico mediante las coordenadas ortogonales de todos los pun tos de estación y característicos ó de detalle; de manera que para ambas agrupaciones se han de hacer las mismas clases de cálculos, comprobaciones y construcciones relativamente á las es ta- ciones para fijar su situación planimétrica y las mismas operaciones exige la acotación de las alturas de todos sus puntos ó la determinación de las curvas de nivel; solo difieren en los cálculos y construcciones necesarias para fijar la situación planimétrica de los puntos caracter ris- ticos; podríamos por consiguiente concretarnos á indicar la realización de los cálculos y co ns- trucciones diferentes indicando despues el órden en que cada uno se ha de practicar; pero pa ara mayor facilidad describirémos cómo se ha de proceder en cada caso de los antes consigna dos limitándonos en los trabajos comunes ó ya explicados á consignar las oportunas referenc ias para evitar enojosas repeticiones.

En los planos gráfico-numéricos acotados

Para tener seguridad de que las comprobaciones en el cierre de las bases de operaciones ó de comprobación, segun que se siga el procedimiento ordinario ó el de poligonación con con n- probaciones sucesivas, no han de dar un error intolerable, es preciso, ademas de proceder co n todas las precauciones aconsejadas no levantar el aparato de una estación sin antes compro bar las observaciones y su resultado inmediato.

En la 1.ª estación, bastará terminar las observaciones dirigiendo el anteojo al punto de la banderola que marca, v. gr., la meridiana para ver si resultan las graduaciones que sirvieron de partida para los ángulos θ y φ y en todo caso, aunque rara vez será necesario, dirigirle tambien al punto de la banderola puesta en el extremo (II) del lado de la base de comprobación.

Inmediatamente despues se determinará para la estación siguiente, A, los valores de

D, x, y, z por medio de las fórmulas consignadas en el número 80, utilizando la Tabla ó aparato elegido al efecto: los resultados se consignarán con el signo que les corresponda segun los valores absolutos de θ y φ en la parte rayada de la línea y casillas correspondientes del registro general (número 75), y los cálculos en la casilla 10.ª del mismo; pero si esta se quisiera reservar para consignarlos con limpieza al repetirlos en casa, será mejor utilizar al efecto un cuaderno como el modelo inserto en el número 78.

Puesto el instrumento en estación en la 2.ª, nivelado y orientado se medirán los datos g, φ y θ á la estación anterior y con ellos y la diferencia i—m se calcularán los valores de D, x, y, z de la estación primera relativamente á la segunda, A y es claro que deberán resultar iguales las distancias, D, é iguales tambien, pero de signo contrario, las x, y, z; no resultarán ordinariamente, pero sus diferencias deben ser menores que la tolerancia admitida segun lo que digimos en los números 9 y 10 sin olvidar las consideraciones consignadas en el número 65: si resultan menores que la tolerancia se continúa el trabajo determinando la estación siguiente y demas puntos observables desde la 2.ª estación; en caso contrario se repite con toda clase de precauciones la observación completa á la primera estación y de seguro se encontrará la causa de la diferencia en la consiguiente repetición de los cálculos.

Hemos supuesto que la referencia de las estaciones fuese la directa sin puntos intermedios de comprobación; si estos se hubieran determinado, calculando por su medio dos veces la distancia horizontal y vertical y el rumbo, la comprobación sería mas completa y tambien se conseguirá con la referencia mixta.

Los cálculos sencillos (número 69), que exige esta con los puntos intermedios, se consignan en la 1.ª casilla del registro general para que siempre en él conste todo, como ya se dijo en su explicación (número 75) y puedan comprobarse; pero, si se quiere que consten con toda limpieza, vale mas dejar esta consignación para casa y ponerlos desde luego en el cuadernito de cálculos en el campo de que hemos hablado (número 78).

Con las mismas precauciones se calculan y comprueban las coordenadas planimétricas de las estaciones intermedias entre las extremas del primer lado de la base de comprobación y para hacerla en ella en la forma explicada en el número 70 se consignan los lados de la base de operaciones comprendidos por el de la de comprobación, sus rumbos, distancias y coordenadas medias en el registro correspondiente en la forma en que aparecen en el número 78, págs. 230 y 231, cuidando de no equivocar los signos (1) y se hacen los sencillos cálculos de comprobación allí, y en el número 70, indicados, viendo si las diferencias son tolerables y repartiéndolas como allí se propuso, si así procede, ó buscando y corrigiendo los errores que las motivaron en otro caso.

En la misma forma se procede para todas las poligonales comprobando y corrigiendo los

---

(1) Para evitar las graves equivocaciones consiguientes á consignar en las casillas de las coordenadas negativas las que fuesen positivas ó al contrario, lo mejor es poner comillas en las casillas contrarias antes de escribir aquellas, lo que se consigue rápidamente observando los valores absolutos de θ para las x é y, y los de φ para los de z teniendo en cuenta la dirección en que aumentan las graduaciones de los limbos, la admitida para la progresión de aquellas coordenadas y lo dicho sobre este particular en el número 8 del volúmen I.

Cuando al hacer la resta de las sumas de los valores positivos y negativos de cada clase de coordenadas se encuentra una diferencia muy notable, débese en primer lugar ver si hay alguna escrita en casilla de signo contrario y en segundo lugar si por mala colocación de la vírgula se ha multiplicado ó dividido por un múltiplo de 10 y tercero, finalmente si se ha tomado alguna abscisa por ordenada ó al contrario, porque casi siempre dependen aquellos falsos resultados de una de estas tres causas y para descubrir cual de ellas sea, no es, generalmente, necesario repetir los cálculos, pues aquellas comprobaciones se hacen con solo observar el cuadrante correspondiente á los valores de θ y φ y los valores de D: con un poco de experiencia *estas comprobaciones interesantísimas se hacen en pocos minutos.*

Como la consignación de las *coordenadas de los puntos característicos* se hace directamente sobre el registro general y en él no hay casillas para las positivas y negativas, ni medios de comprobación, se las ha de poner el signo que les corresponda y repasarlo con igual cuidado antes de deducir los valores de sus coordenadas al orígen mediante los de la estación correspondiente para evitar notables equivocaciones en la situación de tales puntos.

errores de cierre, si fueren tolerables, que sí lo serán si se ha procedido bien en las comprobaciones y correcciones de la base de este nombre.

Con todo esto se tendrán las coordenadas ortogonales corregidas de cada estación, de la base de operaciones y de la de comprobación, á la estación anterior y eligiendo para la 1.ª ó para una cualquiera los valores deducidos de triangulaciones anteriores generales ó especiales, ó los supuestos que convengan, se deducirán fácilmente en el registro correspondiente (número 78) las coordenadas de aquellas á un orígen comun.

Con esto quedan terminados los cálculos, *preparación de la construcción del plano*, que para todos los levantados por los modernos procedimientos se han de hacer simultáneamente con la medición de los datos; nos consta que muchas veces no se hacen; pero debe hacerlo el Topógrafo que trabaje á conciencia y no quiera exponerse á cometer errores ó equivocaciones, que le obliguen á volver sobre el terreno para corregirlos.

Como de todos modos se han de determinar las distancias horizontales y verticales de los puntos característicos relativamente á la respectiva estación, salvo los casos en que se crea conveniente utilizar los trasportadores reductores de Payt y Abate-Daga (número 83), á repasar y escribir en limpio, como queda indicado, los cálculos precedentes y á hacer los de las distancias horizontales y verticales de los puntos característicos se pueden destinar las horas que dejen libres los trabajos propios de campo y los días de mal tiempo, y como no exigen tanta precisión como los de las estaciones, para ganar tiempo y evitar molestias se deben emplear el Círculo ó Regla logarítmica ó el Cuadro gráfico explicados en el número 81 ú otros análogos ó alguna de las Tablas destinadas á tal objeto, como las nuevas de Orlandi, las de Jadanza, etc., haciendo caso omiso de las últimas cifras: aconsejamos al efecto el uso de nuestro Círculo, porque sin molestia y con grandísima rapidez se obtienen excelentes resultados, y sirviendo de entretenimiento en tales horas economiza despues mucho tiempo, ya que estos cálculos se han de hacer como preparación para la *construcción del plano*.

Veamos como se realiza esta en el caso de que se trata.

De la mayor diferencia en las X é Y y teniendo en cuenta lo que de las estaciones mas apartadas en estos sentidos se podrán separar los puntos característicos mas lejanos desde el mas determinados, se calculará fácilmente y con seguridad la extensión de papel que, segun la escala elegida, será necesario para que quepa el plano de todo el terreno y la dirección que á al efecto conviene dar al eje de las Y ó meridiana, que desde luego se traza en el papel.

Con ella por base se hace la cuadrícula decimétrica por cualquiera de los medios indicados en el número anterior y se escriben las correspondientes coordenadas planimétricas de sus vértices segun la escala; de manera que todos los puntos del plano puedan constar en el papel, aunque no lo haga el orígen adoptado.

Por cualquiera de los medios tambien indicados en el número anterior, se situan por sus coordenadas al orígen todas las estaciones señalándolas con un punto muy pequeño rodeado de un circulito que permita verle fácilmente y á su lado se escribe la letra mayúscula ó número romano que la designe en los registros y cróquis para ponerlo todo en relación.

Detallemos algo mas esta sencilla cuanto importante construcción ya que en el número anterior no hicimos otra cosa que indicar las condiciones de los medios, y supongamos para mayor facilidad que la escala del plano sea la de $^1/_{1000}$.

Es claro que á los vértices de cada cuadrado les corresponderán abscisa y ordenada de centenas, y por consiguiente ha de comprender cada uno los puntos que tengan por abscisa y ordenada la menor de cada una de aquellas y las decenas, unidades y fracciones de metro comprendidas entre dos sucesivas de cada clase de coordenadas y por consiguiente para fijar su situación bastará marcar sobre los dos lados del cuadrado correspondientes á las abscisas la propia del punto y en la recta que une las dos señales marcar el que dista de la de menor coordenada los centímetros, milímetros y fracciones correspondientes á las decenas, unidades y fracciones de metro de la del punto que se quiere situar.

Así se procede con el doble decímetro; pero como ello obliga á ponerle en tres posiciones

can de tinta los puntos, se escribe á su lado la letra minúscula con que se los designe en los cróquis y registros y entre paréntesis la altura, y se limpia nuevamente el plano, que conteniendo situados y acotados todos los puntos de estación y característicos, permitirá detallar todos los accidentes del terreno con presencia de los cróquis, dando por resultado final el plano *gráfico-numérico acotado*.

Si la acotación se ha hecho al objeto de determinar los accidentes altimétricos del terreno y de tal manera que la recta que une dos puntos próximos coincida con la superficie de aquel, de él se pueden deducir las curvas de nivel muy sencillamente convirtiéndole en *plano gráfico-numérico con curvas de nivel*, que ponga á la vista la accidentación altimétrica del terreno, lo que no hace directamente el acotado.

Esta transformación se consigue geométrica y numéricamente de las diferentes maneras siguientes:

Sean *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f* (fig. 108) seis puntos de una parte de un cerro elegidos de tal manera que, confundiéndose sensiblemente las líneas *a f*, *be* y *cd* con las de máxima pendiente, por sus *cotas* ó alturas sobre la superficie de nivel general de comprobación nos den á conocer las

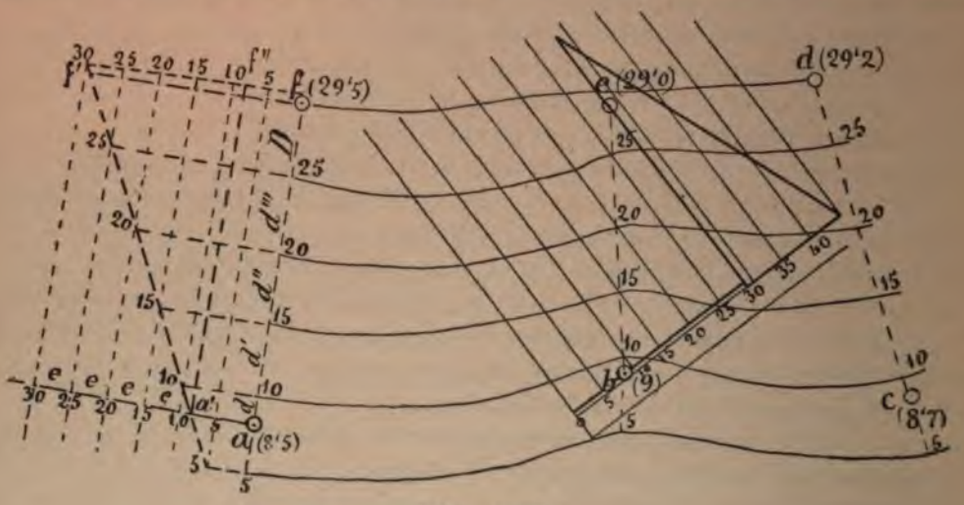


Fig. 108

condiciones altimétricas de aquel; es claro que si determinamos la proyección horizontal de los puntos en que las curvas de nivel, equidistantes, v. gr. metros, encuentran aquellas líneas y unimos tales puntos de cruce, tendrémos la proyección de aquellas curvas haciendo mas perceptible á la vista la accidentación altimétrica del terreno.

Las curvas de nivel no son otra cosa que la intersección de las superficies de nivel equidistantes, ó los planos horizontales que son sus elementos, con la del terreno y es evidente que dividirán las líneas de máxima pendiente en partes proporcionales á las alturas sucesivas de aquellos.

Para hacer esto mas evidente consideremos la sección vertical correspondiente á una línea de máxima pendiente.

Podemos suponer que su proyección horizontal, *af*, se encuentra en la superficie ó plano de comparación; si en sus extremos levantamos las verticales *a a'* de 8'5 m. y *f f'* de 29'5 m., la línea *a' f'* coincidirá con la de máxima pendiente del terreno, formándose el trapecio *aff' a'*, que consideramos rebatido sobre el plano horizontal del dibujo y en él las intersecciones del plano vertical de la sección con los horizontales equidistantes estarán representadas por las líneas paralelas á la base *af*, marcadas con los números representativos de sus alturas, y es tambien indudable que los puntos donde estas líneas cortan á la *a' f'* serán los buscados en la línea de máxima pendiente; de manera que, proyectándolos ó bajando desde ellos perpendiculares á la *af*, se tendrán los correspondientes á la proyección horizontal de los en que las cur-

Si este estuviera dibujado en tela lúcida se colocaría encima de la serie de paralelas marcando directamente los puntos; pero tambien ofrece inconvenientes su colocación en la posición oportuna y la necesidad de trazar la recta de unión de los puntos.

3.° *Este medio* se sustituye con ventaja por otro equivalente, que consiste en combinar una regla graduada en la escala del plano y una escuadra que se mueva sobre ella; pues haciendo coincidir el punto mas bajo con la graduación de la primera correspondiente á su altura ó á la diferencia antes indicada y el cateto recto de la escuadra con la del punto mas alto, regla y escuadra unidas se hacen girar alrededor del primero hasta que el canto de la escuadra pase por el otro punto y esto conseguido se corre la escuadra paralelamente asimisma marcando los puntos de intersección de su cateto recto con la línea de unión de los puntos dados cuando aquel señale en la regla las graduaciones correspondientes á la cota de las curvas ó de sus diferencias á la tomada como base: esto es enteramente lo mismo que la construcción anterior, pues la regla sustituye á la perpendicular á las paralelas y estas lo están por las diferentes posiciones del cateto recto de la escuadra, como en la figura se indica.

Se puede hacer muy fácilmente un sencillo aparato para realizar esta construcción.

En un doble decímetro de madera con la escala del plano se rebaja por encima de la graduación una faja paralela á la línea graduada para que sirva de base segura á la escuadrita y esta se rebaja tambien para que descansando sobre el papel del plano se apoye en aquella, por cuyo medio se podrán conservar fácilmente en la posición conveniente la regla y la escuadra en su movimiento giratorio alrededor del punto mas bajo de los dos, entre que se ha de marcar la proyección de los cruces de las curvas.

Estos medios geométricos son muy sencillos en su aplicación; pero tienen el inconveniente de la poca precisión de toda construcción gráfica y si se quieren utilizar en planos de distintas escalas, hay que resolver el mismo problema en cada uno ó medir las distancias no muy precisas resultantes en aquel en que se hizo, lo cual si puede admitirse para las escalas menores no es oportuno hacerlo para las mayores.

Solución numérica del mismo problema

Se deduce tambien de la sección vertical rebatida en la figura 108.

En efecto: en el triángulo $a'\,f'\,f''$, se tiene:

$a'\,f'' = D$, distancia entre los puntos del plano.

$f'\,f'' = z'' - z'$, siendo z'' la cota mayor y z' la menor de ellos.

Llamando e' á la diferencia entre la cota menor de los dos puntos y la que corresponde á la curva inmediatamente superior, e á la equidistancia y asimismo d, d', d'', d'''... á las distancias sucesivas del punto de cota menor á la proyección del cruce de cada una de las curvas, se deduce del triángulo $a'\,f''\,f'$ en su comparación con cada uno de los formados por las líneas proyectantes de los respectivos cruces:

$$z'' - z' : D :: e' : d = \frac{D \times e'}{z'' - z'}\ ;\ \text{ó Log. } d = \text{Log. } D - \text{Log. } (z'' - z') + \text{Log. } e'$$

$$\text{» » } e' + e : d' = \frac{D \times (e' + e)}{z'' - z'};\ \text{ó Log. } d' = \text{» » » + Log. } (e' + e)$$

$$\text{» » } e' + 2e : d'' = \text{» ; ó Log. } d'' = \text{» » » + Log. } (e' + 2e)$$

$$\text{» » } e' + 3e : d''' = \text{» ; ó Log. } d''' = \text{» » » + Log. } (e' + 3e)$$

Las distancias d, d', d'', d'''... son por consiguiente el cuarto término de proporciones, en que los dos primeros son constantes para todos los correspondientes á los cruces de las curvas entre dos puntos del plano de situación conocida y resolviéndolas por logaritmos no hay mas que añadir á la diferencia constante Log. D — Log. $(z'' - z')$ los de e', $(e' + e)$, $(e' + 2e)$... y en su consecuencia con nuestro Circulo logarítmico se determinan todas estas distancias con una sola posición del disco.

A este efecto se hace coincidir la magnitud logarítmica del sustraendo, Log. $z''-z'$, tomada en el disco con la correspondiente al minuendo, D, tomada en la corona y el orígen de aquel señalará el residuo al que se añadirá, por medio de la alidada, sucesivamente las magnitudes logarítmicas e', $e'+e$, $e'+2e$, $e'+3e$... tomadas en el disco y debajo del radio de su talco se leerán en la corona los valores de d, d', d'', d'''... comprobando con $z''-z'$, que corresponderá á D ó sea la distancia entre los dos puntos.

Esta solución, numérica enteramente cuando los puntos entre que han de determinarse los cruces de las curvas son una estación y los vistos desde ella, es mixta cuando se ha de medir sobre el plano la distancia D; pero de todos modos es mas exacta que las puramente geométricas antes indicadas y tiene la ventaja de poderse utilizar despues para el mismo plano construido en diferentes escalas sin mas que marcar con ella las distancias entre los puntos respectivos, lo que facilita mucho la construcción de las curvas.

Para realizar con mas seguridad y rapidez estos cálculos, *como todos los que exigen los procedimientos modernos*, y conservar sus resultados de una manera sencilla, es indispensable proceder con órden formando estados, en que aparezcan metódicamente las designaciones, los datos y los resultados; con esto se evita el grande inconveniente que muchos Topógrafos atribuyen á los planos numéricos, porque con poca molestia y en poco tiempo se consiguen tan estimables resultados; no sucedería lo mismo si para cada punto, ó para cada recta que une dos, se determinaran seguidamente las coordenadas ortogonales y los cruces de las curvas y ademas se tendría con ello grandes molestias y se expondría á cometer muchas equivocaciones por la diversidad de fórmulas y medios para resolverlas que se han de utilizar.

MODELO DE REGISTRO DE LOS PUNTOS DE CRUCE DE LAS CURVAS

Fórmula general. Log. d = Log. D — Log. $(z''-z')$ + Log. (é + ...)...

Designación de las líneas.	$a-b$	$a-c$	$a-d$	$b-g$	$b-h$	$e-i$	$e-m$	$d-o$	$d-p$
Distancias totales D. . .									
Diferencia de alturas $z''-z'$									
» » e'									
» » $e'+e$									
» » $e'+2e$									
» » $e'+3e$									
» » $e'+4e$									
» » $e'+5e$									
Distancias parciales d. .									
» » d' .									
» » d'' .									
» » d''' .									
» » d^{IV} .									
» » d^{V} .									
» » d^{VI} .									

Para los que de ahora nos ocupamos débese preparar un estado que puede ser de la forma del modelo que antecede y consignar en él por de pronto la designación de las rectas entre cada dos puntos, su distancia, la diferencia $z''-z'$ y los valores de e', $e'+e$, $e'+2e$..., lo cual entre dos se hace rápidamente; despues se consignan los resultados obtenidos con el Círculo ó la Regla logarítmica sin mirar al plano; cuando este trabajo está terminado, sobre él se

consignan los puntos de cruce y finalmente se trazan las curvas; siempre leyendo y escribiendo uno los datos y resultados en el estado y otro midiendo ó leyendo en el plano, en el aparato ó fijando los puntos entre los ya consignados en el primero, es indecible la rapidez y seguridad con que, procediendo así, se consiguen los resultados.

En los planos numéricos con gráfico, acotados ó con curvas de nivel

Como ya antes hemos dicho, la diferencia entre estos y los del grupo anterior consiste en que en ellos se calculan las coordenadas planimétricas, X é Y, de todos los puntos característicos, cuya situación se consigue geométricamente por rumbo y distancia en los precedentes.

Estos cálculos se realizan mediante el Círculo ó la Regla logarítmica, porque por ser en gran número ordinariamente, exigirían mucho tiempo haciéndolos de otra manera y aquellos aparatos dan mayor precisión que la necesaria economizando tiempo y molestias.

Así se consigue tener las tres coordenadas ortogonales de todos los puntos de estación y de detalle ó característicos á un mismo orígen, ó sea el *plano numérico*, que permite resolver todos los problemas numéricamente mediante sencillas fórmulas evitando los errores del graficismo.

En nuestro Registro general aparecen aquellas ordenadamente consignadas á la vez que los datos medidos, de que proceden, y esto dá grande seguridad en su conservación y comprobación y permiten la exacta construcción del plano en la escala que fuese necesario y la descripción inequívoca de sus partes y accidentes.

La construcción de los gráficos no difiere tampoco de los del grupo anterior sino en que se situan con mas seguridad, precisión y sencillez por medio de las coordenadas planimétricas que por rumbo y distancia utilizando la regla y escuadra graduadas ó el coordinatógrafo en la misma forma indicada para la de las estaciones del grupo anterior, comprobando con la distancia á la estación respectiva, y como en cada posición de la regla se pueden determinar muchos puntos, se opera con gran facilidad y rapidez entre dos operadores, uno que lee en el registro y otro que mediante el aparato fija y señala los puntos escribiendo su designación y cota dejando el plano perfectamente limpio.

Por este medio se puede construir á la vez el mismo plano en distintas escalas, lo que es muchas veces conveniente.

No creemos necesario detallar mas estas sencillas construcciones ni decir nada sobre la manera de deducir las curvas, porque se hace enteramente igual á como se dijo para el grupo anterior, tambien numéricamente.

85 — Dibujado, copia, reducción y amplificación de los gráficos de los planos numéricos.

Cuanto sobre estos particulares digimos relativamente á los planos simplemente geométr
números 25 á 28 inclusives y en el 59 con referencia á los que comprenden las curv
los numéricos modernos; pero tienen estos sobre aquell

un ejemplar de aquellos y conviene empezar por el plano de mayor escala, que una vez terminado sirve de cróquis para el de escala inmediatamente inferior y estos dos para los demas.

Esta manera de proceder tiene ademas la ventaja de descubrir algunas equivocaciones y de evitar por comparación las que pudieran cometerse en la construcción y dibujado y como por su medio pueden quedar los planos perfectamente limpios y siempre conviene por lo menos tener dos ejemplares en la escala mayor, se debe adoptar en los trabajos de alguna importancia sin perjuicio de construir al mismo tiempo los originales de los de escala reducida.

86 — Medición de la superficie de los gráficos de los planos numéricos y del terreno sin gráficos.

Son á ellos aplicables los procedimientos explicados en los números 30 á 37 inclusives y está generalmente admitido el empleo de los planímetros, porque en poco tiempo y sin molestias se consigue con ellos bastante precisión; pero cuando se trata de terrenos de gran valor, en que no es posible aplicar el procedimiento explicado en el número 30 ó no se tiene construído el plano, conociéndose las coordenadas planimétricas de todos los vértices de cada polígono

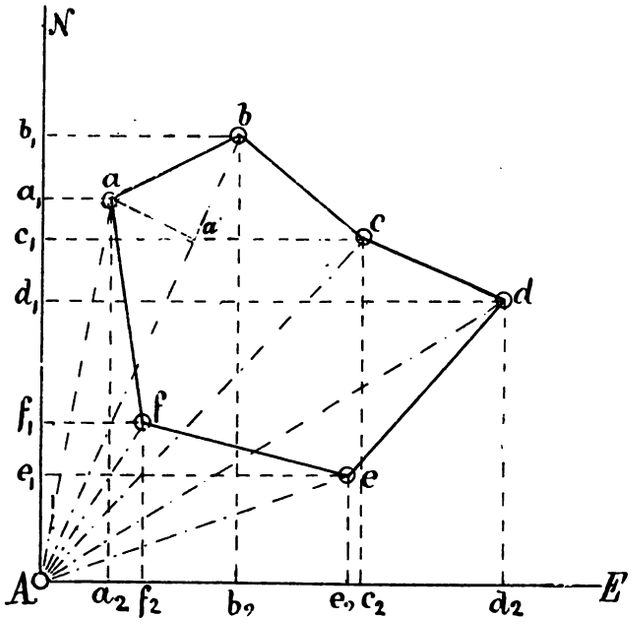


Fig. 109

se puede determinar su superficie mediante uno de los dos procedimientos, que vamos á explicar, porque no solo no exigen la previa construcción del plano, sino que dan mayor precisión que los planímetros, ya que con estos no se puede prescindir de la influencia de los errores del graficismo y sí con aquellos.

Determinación de la superficie de un polígono en función de las coordenadas θ y D de sus vértices.

Supongamos que desde la estación A hayamos determinado los vértices del polígono *a b c d e f*, figura 109, cuya superficie deseamos medir.

Conocerémos por consiguiente las distancias *A a*, *A b*, *A c*... que llamarémos d, d', d''... y sus rumbos θ_a, θ_b, θ_c...

La superficie del polígono referido es evidentemente igual á la suma de la de los triángulos *A a b*, *A b c*, *A c d* y *A d e* menos la suma de los *A e f* y *A f a*.

En cada uno de estos triángulos conocemos dos lados y el ángulo comprendido, porque este es igual á la diferencia de los rumbos de las visuales dirigidas á los extremos del tercer lado ($\theta_b - \theta_a$; $\theta_c - \theta_b$;...) y como el área de un triángulo es igual á la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido, esto es: $S = \frac{1}{2}(A\,a \times A\,b \times Sen.\ a\,A\,b)$ (1) nos será fácil calcular la superficie de cada uno y por consiguiente la buscada del polígono.

Pero ya hemos dicho que á este efecto á la suma de las áreas de unos triángulos se ha de restar la de otros y es preciso ver si el cálculo nos dá ya con signo negativo los que han de comprenderse en la segunda suma y como esto no puede resultar de las distancias, que son todas positivas, se ha de encontrar este signo en los senos.

Así sucede en efecto; pues siendo positivos $\theta_b - \theta_a$, $\theta_c - \theta_b$, $\theta_d - \theta_c$ y $\theta_e - \theta_d$ resultan negativos $\theta_f - \theta_e$ y $\theta_a - \theta_f$, cuidando de seguir el mismo órden en la deducción de los ángulos comprendidos por los lados considerados y teniendo en cuenta que los rumbos aumentan en la dirección de N E S y O (2).

Los datos y resultados de estos cálculos se disponen en un estado de la forma siguiente:

ESTACIONES	VÉRTICES DEL POLÍGONO	RUMBOS	ÁNGULOS EN LA ESTACIÓN	DISTANCIAS	Productos (d. d'. Sen. (θ'−θ) +	Productos (d. d'. Sen. (θ'−θ) −
	a	10'20c		106'4		
			15'50c		3379'67	»
	b	25'70		131'8		
			21'50		5584'10	»
	c	47'20		128'0		
			17'60		5101'82	»
A	*d*	64'80		146'0		
			13'60		2754'73	»
	e	78'40		89'0		
			— 43'80		»	2825'75
	f	34'60		50'0		
			— 24'40		»	1989'68
	a	10'20		106'4		
		Sumas.			16820'32	4815'43
		Diferencia ó 2 S.			12004'89	»
		Superficie.			6002'45	»

Segun los datos consignados el área del polígono de la figura 109 es de 6002'45 metros².

Si los vértices del polígono se hubieran determinado desde dos ó mas estaciones se le s pondría dividido en otras tantas porciones, el área de cada una se calcularía en la misma for y su suma daría la total del polígono.

(1) Para deducir esta fórmula, basta considerar que siendo la superficie del triángulo *A a b*

$$S = {}^1/_2\, A\,b \times a\,a',$$

en el rectángulo *A a a'* se tiene

$$a\,a' = A\,a \times sen.\ A$$

y sustituyendo en la anterior resulta

$$S = {}^1/_2 (A\,b \times A\,a \times Sen.\ A)$$

(2) Si lo hicieran en sentido contrario bastaría cambiar los términos de las sustracciones parciales para conseguir el mismo resultado; esto es, $\theta_a - \theta_b$, $\theta_b - \theta_c \cdots$

Para evitar equivocaciones se debe tener á la vista la figura.

Si las multiplicaciones se hacen numéricamente, el procedimiento resulta muy penoso; no tanto utilizando el Aritmómetro y menos aun con el Círculo logarítmico, aunque naturalmente no se consigue con él tanta precisión, si bien sí la suficiente para la gran mayoría de los casos prácticos.

La superficie hallada por las dos combinaciones solo difiere en 0'16 m.², que es despreciable, comprobándose los cálculos y la diferencia de su media 6004'67 á la de 6002'45 m.², que asciende á 2'22 m.², hallada por las coordenadas θ y D, depende de haber despreciado en las multiplicaciones de estas algunas cifras decimales para simplificarlas; pero de todos modos es mucho mas exacta que la que se puede conseguir por los procedimientos geométricos y los mecánicos y equivale á la medición directa por el sistema de perpendiculares, suponiendo que en uno y otro caso se midan con las debidas precauciones los datos, ofreciendo los procedimientos modernos grandes ventajas por la notable economía de tiempo y molestias, que con ellos se consiguen.

87 — Comparación entre los planos simplemente gráficos, los gráfico-numéricos y los numéricos con gráfico.

La causa determinante de la diferencia de opiniones defensoras de cada una de estas clases de planos consiste; en que los partidarios de la *primera*, exagerando el tiempo necesario para realizar el cálculo de las coordenadas de los puntos y las comprobaciones y las molestias que motivan, prescinden de ellos concretándose á las construcciones geométricas por no dar la debida importancia á la precisión y seguridad con que se debe operar, ni tener en cuenta que las dudas y angustias, que procediendo así motivan los consiguientes graves errores de cierre, producen con frecuencia mas molestias y pérdida de tiempo que las inherentes á los cálculos indicados; y como por otra parte suelen ser tambien partidarios de los antiguos aparatos y procedimientos, invierten mucho mas tiempo en incompletos trabajos de campo sin tener nunca la tranquilidad, que es consiguiente á la constante comprobación de los datos elementales y su combinación, sino se repiten las mediciones con notable aumento de tiempo y de molestias.

De manera que en planos de regular superficie y accidentación no se consigue casi nunca aquella supuesta economía en tiempo y molestias: sucede todo lo contrario en los completos, esto es cuando en ellos se hace constar la accidentación planimétrica y altimétrica, sin que nunca se alcance la seguridad y precisión necesarias; la 1.ª por falta de comprobaciones fidedignas y la 2.ª porque á los errores de la medición de los datos elementales se han de unir los propios del graficismo dependientes de la escala del plano y la falta de medios para hacer una repartición racional de los inevitables despues de anular los intolerables y las equivocaciones, que con tales procedimientos no es muchas veces posible separar de aquellos.

Por otra parte para conseguir planos del mismo terreno en escala mayor ó menor hay que repetir enteramente las mismas construcciones motivando mucha pérdida de tiempo y no pocas veces nuevas dudas y angustias, porque combinándose de distinta manera los errores del levantamiento y los de construcción no se consiguen análogos resultados (1).

Finalmente en la resolución geométrica de las cuestiones se cometen nuevos errores al medir los datos necesarios y es indudable que no se conseguirá el objeto con la precisión y seguridad muchas veces necesaria dando lugar á dudas que motivan con frecuencia la repetición total ó parcial de los trabajos de campo. y esto con tanto mayor motivo cuanto que el papel en que constan varía en dimensiones con el tiempo y con las condiciones atmosféricas inutilizándose completamente el plano no pocas veces.

En los planos numéricos con gráfico nada de esto sucede, porque en los trabajos de campo se repite la medición de los datos elementales y se comprueba su combinación descubriendo

(1) Hacemos caso omiso de las reducciones y ampliaciones mediante el pantógrafo, porque rara vez se consiguen con la necesaria precisión.

inmediatamente las equivocaciones y errores notables, y adquiriendo medios racionales de repartición de los inevitables se trabaja con seguridad y precisión, y como casi siempre se utilizan los aparatos y procedimientos modernos y por su medio se miden rápidamente los datos elementales, se completa mas el plano con la determinación de mayor número de puntos en menos tiempo y con menores molestias, cuando se procede con órden y se distribuyen los trabajos entre personal apto, que no se entorpezca en los suyos respectivos.

Los cálculos de coordenadas de las estaciones y su comprobación sobre el terreno, sino hay persona á esto dedicada, algo podrán aumentar el tiempo necesario; pero como dá completa seguridad evitando dudas y vacilaciones en los trabajos sucesivos y disminuye los de gabinete, aconsejamos se hagan siempre que sea posible; pero para poner mas de manifiesto la preocupación de los defensores del graficismo vamos á suponer que se dejen todos los cálculos para los trabajos de gabinete inmediatos y posteriores.

Hacémos esta separación, porque los primeros, mas urgentes y en menor número, se pueden fácilmente realizar en la misma localidad en que se hagan los trabajos de campo durante la noche y los otros en los dias de mal tiempo ó en la residencia habitual del Topógrafo, cuando se hayan terminado los de campo.

Consisten los trabajos de *gabinete inmediatos:*

1.° En pasar de tinta los datos del Registro general y la designación, distancias especiales y notas de los cróquis comprobando con las correspondientes referencias de unos á otros.

2.° En el cálculo de las coordenadas de las estaciones y los de comprobación de la base correspondiente.

Aunque cada operador, si hubiese distintas brigadas, hiciera 10 estaciones en el día, que rara vez sucederá si hay bastantes puntos característicos, procediendo con órden y la oportuna distribución del trabajo no se tardará en realizarlo todo hora y media conservando la orientación como hemos aconsejado, no pasando de tinta mas que los datos indispensables y haciendo los cálculos por órden de clase con Tablas apropiadas ó con el Círculo logarítmico y consignando los resultados metódicamente en los Registros general y de comprobaciones insertos en los números 75 y 78, y como todo esto no exige local especial, ni tableros ó grandes mesas se hace cómodamente en cualquier lugar descansando de las fatigas del día.

Procurando terminar cada jornada en un vértice de la base de comprobación se harán todos los del día procediendo con mas seguridad y tranquilidad de ánimo, y al mismo fin conducirá la resolución inmediata de las dudas, que puedan ofrecer los cróquis muy complicados, mediante la construcción de los planos aproximados de la respectiva estación con los cróquis circulares, segun digimos en el número 75.

Procediendo así, al terminar los trabajos de campo se tendrán las coordenadas de todas las estaciones á la respectiva y los cálculos de comprobación, y para los de gabinete quedarán:

1.° Acabar de pasar de tinta los cróquis y datos del Registro general comparándolos para comprobar.

2.° Determinar las *coordenadas corregidas* de las estaciones á las respectivas, lo que se hace fácilmente mediante los errores tolerables hallados en el Registro de comprobación, escribiéndolas en sus casillas correspondientes del Registro general.

3.° De ellos se deducen por suma algébrica las coordenadas al orígen despues de dar á la 1.ª las que la correspondan segun triangulaciones precedentes ó especiales ó las supuestas que se crean convenientes.

4.° Calcular las distancias horizontales y verticales, D y z, de todos los puntos característicos á la estación respectiva, lo que haciéndose con órden se realiza en tan poco tiempo que, con nuestro Círculo logarítmico de cada clase de estos cálculos se hacen cómodamente y con mas que la necesaria precisión 600 en una hora siendo dos los que los realicen, leyendo uno los datos y escribiendo los resultados y manejando otro el aparato.

Con Tablas como las de Cuartero, Orlandi ó Jadanza, seguramente con alguna práctica se

hacen de 150 á 200 solamente (1); pero tienen la ventaja de la mayor precisión, por lo que con ellas se pueden hacer los cálculos de las estaciones.

Los trabajos hasta ahora indicados son comunes á los *planos numéricos con gráfico* y *gráfico numéricos*.

A los primeros les corresponden ademas los siguientes:

5.° Calcular las coordenadas planimétricas, x é y, de todos los puntos característicos á la estación respectiva y deducir de ellas, mediante la suma algébrica con las correspondientes de la estación al orígen elegido, las de aquellos al mismo; todo lo que se hace rápidamente y sin molestias, con nuestro Círculo logarítmico lo 1.° y directamente lo 2.°

Antes de calcular las coordenadas z', x é y, conviene para evitar equivocaciones determinar el signo que á cada una corresponda segun los valores de φ y θ, teniendo presente que: z' es positivo cuando φ está entre 0^c-100^c ó 200^c-300^c y negativo cuando entre 100-200 ó

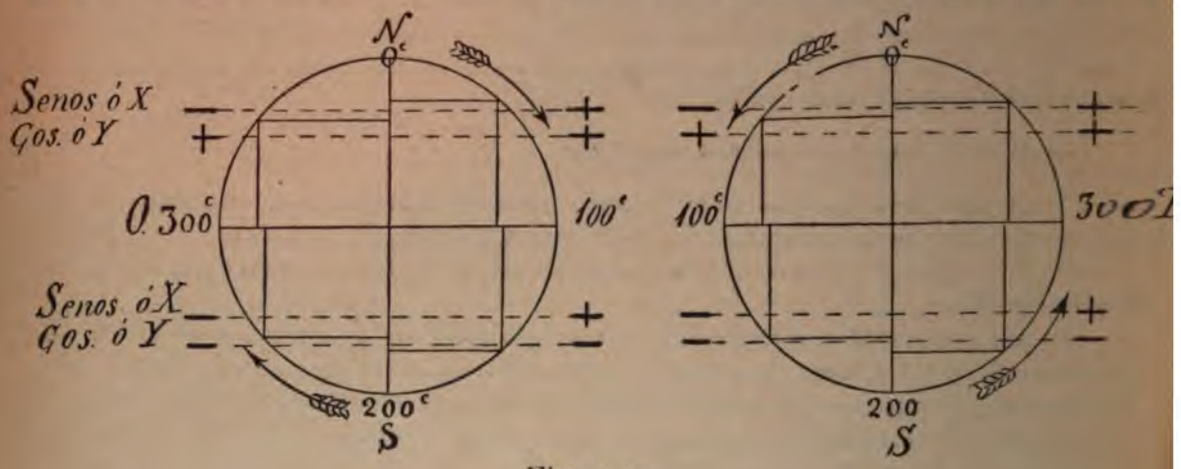


Fig. 110

300 - 400 y los signos de x é y se deducen fácilmente de la regla establecida en el número 8 del vol. I, que para mayor facilidad se representa gráficamente en la figura 110 (2), que se tendrá á la vista poniendo comillas en las casillas contrarias.

Con los trabajos antes indicados se tendrán en el Registro general las coordenadas ortoganales de todos los puntos de estación y característicos, ó sea *el plano numérico*, y con él se pueden resolver todas las cuestiones sin otros errores que los cometidos en el levantamiento disminuídos por la repartición racional consiguiente á las repetidas comprobaciones y con entera independencia de los propios del graficismo.

En efecto: la *diferencia de altura* entre dos puntos se consigue restando los valores de sus cotas, Z y Z'.

La *distancia* que los separa de la fórmula

$$D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

en que ΔX y ΔY son las diferencias de las abscisas y de las ordenadas correspondientes.

El *azimut* de la recta que los une de las fórmulas

$$\text{Tang. } \theta = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \; ; \; \text{Sen. } \theta = \frac{\Delta X}{D} \text{ ó Cos. } \theta = \frac{\Delta Y}{D}$$

(1) Con las nuevas de Orlandi se podrán hacer hasta 300 cálculos, teniendo en cuenta que en todas las citadas se hacen á la vez los correspondientes á las reducidas horizontal y vertical, D y z'.

(2) En la figura se indican los dos sentidos en que aumenta la graduación de los limbos azimutales suponiendo que las abscisas lo hacen de O á E; si debiera ser lo contrario, es fácil deducir el signo que para cada cuadrante corresponde á los senos y cosenos segun el sentido en que aumente la graduación y hacer la figura correspondiente.

con gráfico, que mejor que ningunos otros pueden satisfacer las necesidades del comercio de los hombres.

Los planos gráfico-numéricos solo difieren de los *numéricos con gráfico* en que, omitiéndose el cálculo de las coordenadas planimétricas, X é Y, de los puntos característicos, fijan su situación en el plano por rumbo y distancia; pero esta pequeña economía de tiempo, que pequeña es como se deduce de lo antes dicho, les priva de la conveniente comprobación por la distancia á la respectiva estación y de las soluciones numéricas de las cuestiones que despues ocurran, á no calcular entonces las suprimidas coordenadas planimétricas de los puntos necesarios, y de la mayor precisión con que el plano gráfico se consigue construyéndole por las coordenadas ortogonales que por las polares, ni puede hacerse con ellos la descripción numérica de los polígonos, que tantas ventajas presenta en la redacción de los documentos jurídicos.

Finalmente verémos oportunamente (números 113 á 116) que la *verificación exacta de los planos*, que es ó debe ser la justificación de su valor real, se realiza con suma facilidad y grande precisión en los planos numéricos, no tanto en los gráfico-numéricos y mucho menos en los simplemente gráficos, que siempre dejan dudas imposibles de resolver.

En honor de la verdad debemos consignar; que si para conseguir los *planos numéricos* fuera necesario realizar todas las mediciones y cálculos á que obligan las Instrucciones del nuevo Catastro prusiano, serían discutibles sus ventajas, porque son aquellos muy complicados y molestos; pero cuando al presente con los modernos aparatos y procedimientos se pueden conseguir mejores resultados muy sencilla y rápidamente, para quien estos conozca no cabe discusión; los *planos numéricos con gráfico deben ser preferibles á todos los demas.*

PARTE TERCERA

TRIANGULACIONES TOPOGRÁFICAS, NIVELACIONES DE PRECISIÓN Y REVISIÓN DE LOS PLANOS

8 — Clasificación.

Teniendo en cuenta que, segun lo demostrado en el número 48 del volúmen I, el *campo pográfico* puede comprender sin grave inconveniente la vasta extensión de 1.800.000 hectá-as (1) y que, aun en los terrenos de mejores condiciones, el mas perfeccionado de los procedi-ientos hasta ahora explicados no permite levantar el plano de mas de 10.000 sin exponerse á ue los errores cometidos en la medición de muchas distancias y ángulos realizada por necesi-d sin suficientes precauciones se acumulen, como ya se deduce de lo consignado en los nú-eros 71 y 72, no puede caber duda de que, para conseguir con la necesaria seguridad y preci-n los planos de mayor extensión en tan excepcionales condiciones y ordinariamente los que mprenden 3.000 ó mas hectáreas, hemos de utilizar otro procedimiento que nos permita de-minar con mucha mayor exactitud que aquellos la situación relativa de cierto número de ntos del terreno, que den á los procedimientos antes explicados base segura de comproba-n y corrección de los errores; y como esto solo se puede conseguir mediante una red de ángulos perfectamente enlazados, resueltos y compensados, que liguen aquellos puntos, re-ta necesaria la exposición metódica de la *teoría y la práctica de las triangulaciones topográfi-* que de ello se ocupan.

Por análogos motivos no bastan los procedimientos explicados para realizar las nivelacio- ordinarias, cuando se desea conocer con toda la posible exactitud la diferencia de nivel re puntos muy distantes y por lo mismo es preciso que para completar aquellos indiquemos menos los medios de conseguirlo mediante la exposición de los procedimientos modernos *las nivelaciones de grande precisión.*

Finalmente, es indispensable que el Topógrafo conozca los medios mas seguros y sencillos *verificación ó comprobación de los planos* gráficos ó numéricos, que se le presenten para su ficación; que pueda hacerla sin repetir las operaciones y fundar su juicio sobre base segura las menores molestias y gastos posibles.

En su consecuencia y como complemento de lo hasta aquí expuesto, nos hemos de ocupar estas interesantísimas cuestiones con la oportuna separación, á cuyo efecto dividirémos esta *rte* en tres capítulos.

---

(1) Conviene recordar que, segun lo demostrado entonces, en tal extensión la diferencia entre la tangente y arco de meridiano representa el error aproximado de $^1/_{20000}$, que solo se consigue en la medición de las bases de iangulación y la diferencia de las áreas representa un error aproximado de $^1/_{3200}$, que no tiene importancia en s trabajos topográficos; pero si se quisiera llevar la aproximación á la extraordinaria de $^1/_{50000}$ en las distancias y n las áreas habría que reducir el campo topográfico á 800.000 hectáreas.

CAPÍTULO I

TRIANGULACIONES TOPOGRÁFICAS (1)

89 — Preliminares.

Las triangulaciones topográficas pueden realizarse con entera independencia de las geodésicas, deducirse de las de esta clase preexistentes ó tener que relacionarse con ellas.

Estas diferentes condiciones obligan á utilizar distintos procedimientos y podrían servir de base para la clasificación de la materia; pero como complicando la exposición de los principios fundamentales y las modificaciones, que han de experimentar segun las condiciones variables, no permitirían darlos á conocer sin confusión, aunque habremos de tenerlos en cuenta para justificar las distintas reglas de aplicación, no los utilizarémos á aquel objeto.

Tambien motiva algunas variaciones en los procedimientos la condición general de que el terreno se extienda en todas ó en una sola dirección; porque si aquella implica la necesidad de una red triangular en polígonos entrelazados de cinco ó mas lados, la 2.ª conduce á darla la forma de cadena con frecuencia mediante cuadriláteros sucesivos y muchas veces ambas clases de redes se han de combinar para abrazar el terreno, cuyo plano se desea levantar; pero estas condiciones, menos que las precedentes, no pueden servir de base á la exposición de la materia de las triangulaciones, aunque tambien se han de tener en cuenta.

No pocas dificultades ofrece la clasificación sobre la base de *la teoría* y *la práctica* por ser muchos los principios y reglas variables segun las diferentes condiciones del terreno á que se han de aplicar, los medios disponibles y el objeto final que se propone conseguir, lo que hace indispensables explicaciones, que pueden tener ambos caracteres motivando alguna confusión ó repetición y por esto sin duda no ha sido aceptada hasta ahora; pero como es la que mas se acomoda al sistema adoptado para la exposición de la complegísima materia de que nos venimos ocupando, la adoptarémos tambien ahora dividiendo este capítulo en dos artículos.

ARTÍCULO PRIMERO

TEORÍA DE LAS TRIANGULACIONES TOPOGRÁFICAS

90 — Consideraciones generales.

Al consignar (número 88) que solo mediante una red de triángulos perfectamente enlazados, resueltos y compensados se puede conseguir determinar con mucha mayor seguridad y exactitud que por el sistema poligonal mas perfeccionado la situación de los puntos lejanos, que le han de servir de base en los planos de terrenos de grande extensión, tuvimos en cuenta que mediante la medición de un solo lado, *la base*, y los ángulos de los triángulos integrantes de la red podían resolverse todos por el cálculo procediendo sucesivamente de unos á otros y

(1) El holandés Snelio fué el primero que imaginó y utilizó las redes triangulares al medir la distancia entre dos ciudades por una de aquellas en cadena; hízolo á principios del siglo XVII, ó sea, poco despues de la invención de los logaritmos y consiguientes progresos de la Trigonometría.

por consiguiente fijar con la deseada exactitud la situación de sus vértices, que serían aquellos puntos; porque pudiéndose situar la base en la porción de terreno de mejores condiciones, medirla con aparatos especiales y todas las precauciones necesarias, se puede conocer su longitud con toda la precisión apetecible y reduciéndose ademas el número de estaciones á lo sumo al de los puntos determinables, que serán vértices comunes á muchos, los ángulos se podrán tambien medir con mas precauciones consiguiendo su valor con mucha exactitud y como por otra parte su íntima relación dá medios de descubrir y corregir los pequeños errores, así como los consiguientes á su combinación con los inevitables de la base, medios y precauciones inaplicables hasta cierto punto en la poligonación, resulta indudable aquella afirmación.

Pero á tal efecto es indispensable:

1.° Que los indicados puntos de comprobación, ó vértices de la triangulación, reunan determinadas condiciones para que cumpliendo su objeto no compliquen innecesariamente los trabajos;

2.° Que la *fórma de los triángulos* resultantes de su unión sea la mas apropiada para evitar la acumulación de los errores;

3.° Que la *longitud de los lados* ni sea tan pequeña que multiplique innecesariamente los puntos determinables y por consiguiente los trabajos y dé lugar á la cumulación de los errores, ni tan grande que dificulte la consecución del objeto, que con la triangulación nos proponemos;

4.° Que la *longitud de la base* sea proporcionada á la de los lados de los triángulos, se mida con el grado de precisión necesaria para conseguir la apetecible en la situación de los vértices de aquellos y se relacione fácilmente con ellos;

5.° Que los *ángulos* se midan tambien con la precisión necesaria al mismo objeto;

6.° Que *los triángulos y demas polígonos resultantes* de la unión de los puntos determinables se resuelvan y comprueben fácilmente y se corrijan de una manera racional;

y para poder expresar sencilla y numéricamente la situación relativa de los vértices, referir á ellos los de la poligonación y parcelación, á que han de servir de base, y relacionarlos con los de las triangulaciones geodésicas y con las líneas, planos y superficies geográficas en cuanto fuere necesario;

7.° Que se calculen las *coordenadas topográficas* de los vértices con la precisión deseable y

8.° Finalmente deducir de ellas y de las *geográficas* ó las *geodésicas* ya conocidas, las de estas clases que correspondan á algunos de tales puntos.

Antes empero de ocuparnos de estas especiales cuestiones debemos hacerlo brevemente de otras dos que tienen mucha influencia en su acertada resolución; son á saber:

A *Para conseguir el objeto que la Topografía se propone, ó sea, para determinar la situación relativa de los puntos característicos del terreno* EN TODA LA EXTENSIÓN DE SU CAMPO PROPIO *y por ende la distancia que horizontal y verticalmente los separa y el área de los polígonos, que en él se formaren, con el grado de precisión exigido por las necesidades ordinarias del comercio de los hombres,* ¿ES NECESARIO DIVIDIR EL CAMPO TOPOGRÁFICO EN SECCIONES DE 7 Á 10.000 HECTÁREAS, *como generalmente se supone?*

B *¿Lo es tambien admitir en ellas* DOS Ó TRES CLASES DE TRIÁNGULOS *formando otras tantas redes relacionadas entre sí?*

En cuanto á lo primero, aunque con la desconfianza del que reconoce su incompetencia, *creemos que la supuesta necesidad no existe,* ni es por consiguiente necesario reducir á tan estrechos límites las caras del poliedro circunscrito al esferoide terrestre, en que se suponen proyectados los planos topográficos; porque, como sencillamente demostramos en el número 48 del volúmen I y por nota recordamos en el 88, aunque se pretendiera conseguir la extraordinaria precisión de $^1/_{50000}$ podrían tales caras alcanzar la superficie de 800.000 hectáreas.

Lo que hay de cierto es que se confunde la situación relativa de los puntos considerada geométricamente, que es lo que buscamos por los procedimientos topográficos, con la misma situación considerada geográficamente y esto, como es natural, ha de variar por la convergen-

cia de los meridianos á la distancia en que esta sea sensible ó mejor dicho, llegue al límite de la tolerancia establecida para que se admitan como rectos y paralelos.

Tampoco consideramos resuelta así la dificultad; porque si en dos secciones cuadradas de 10.000 hectáreas, sucesivas en el sentido de los paralelos geográficos, se utilizan en cada una como ejes coordenados el meridiano y paralelo de su centro respectivo, los azimutes directo é inverso de las rectas que unen puntos de aquellas próximos á sus límites diferirán en 10 centígrados y su situación relativa quedará mal determinada.

¿No sería mas exacto y sencillo referir todos los puntos del plano á los mismos ejes rectangulares por sus coordenadas planimétricas y deducir de las geográficas del orígen las de esta clase de los principales de aquellos por medio de los primeros teniendo en cuenta la Longitud y Latitud de los lugares y la conocida dimensión de sus grados y convergencia consiguiente de los meridianos, como verémos mas adelante?

Procediendo así se tendrían con separación las coordenadas ortogonales topográficas y geográficas y podrían utilizarse unas ú otras como mejor conviniera sin la complicación de las secciones y los errores que son á ellas consiguientes.

En cuanto á lo segundo, creémos tambien que se ha exagerado bastante la necesidad de triángulos de distintos órdenes; porque si es indudable en planos en que fuera necesario un número muy grande de aquellos, cuyos lados se consideren base necesaria para dar seguridad á las poligonales, *que llamarémos normales*, ya que comprendiéndolos en otros sucesivamente mayores se resolverían los de los diferentes órdenes con *distintas tolerancias* facilitando los cálculos, se podrían localizar y repartir mas fácilmente los errores y con la división del trabajo se evitaría la necesidad de señalar simultáneamente grandísimo número de puntos y resolver la vez muchísimos triángulos, lo que complica los trabajos; tal subdivisión es innecesaria en terrenos de menos de 20.000 hectáreas, cuando se utiliza la poligonación con comprobaciones sucesivas, porque, como con este procedimiento el lado de los triángulos normales puede sin dificultad ninguna alcanzar la longitud de 4 ó 5 kilómetros haciendo necesarios en aquella superficie solamente de 20 á 25 triángulos, no es este número tan considerable que dé lugar á los inconvenientes indicados, ni aquella permitiría desarrollar una red de triángulos mucho mayores.

Verémos despues que la ilustradísima Comisión del Cuerpo de Estado Mayor encargada de levantar el plano de los alrededores de Jaca y altos valles de los ríos Aragón y Gállego, que aplicó con grande éxito aquel procedimiento, utilizó sin ningun inconveniente una sola red en superficie de mas de 120.000 hectáreas midiendo tres bases de comprobación, que es el medio mas seguro, cuando no puede al efecto utilizarse la red geodésica de tercer órden, y aquello se hizo en el terreno mas escabroso del Alto Pirineo, lo que demuestra que el límite antes fijado es mas bien exagerado por defecto que por exceso; si bien al fijarle hemos tenido en cuenta que como la forma general del terreno y su accidentación tienen mucha influencia en la resolución mas oportuna, no se puede señalar como regla general un límite mayor, ya que en ciertos casos podrá ser conveniente aceptar las distintas triangulaciones por tener que reducir la longitud de los lados de los triángulos normales.

Para corroborar las indicadas ventajas de las diferentes clases de triangulaciones copiamos del excelente libro del ilustre Ingeniero Erede (1) la figura 111, pues considerando en ella como triángulos normales los señalados con línea interrumpida, de segundo órden los de línea llena delgada y de primero los señalados con otras mas gruesas, se observa desde luego que desde los vértices de los primeros por intersección directa ó con referencia á ellos por inversa quedan determinados puntos céntricos de tales triángulos que pueden servir de comprobación á las poligonales; se vé tambien que los de segundo y primer órden ó simplemente estos se pueden extender por de pronto á todo el terreno para subdividir el trabajo completándole en una pequeña parte con los triángulos de tercero y cuarto órden y las correspondientes poligonación y

(1) Elementi di Topografía — 3.ª edit. 1894 — Lamina X, figura 210.

parcelación, todo lo que encontrará las oportunas comprobaciones sucesivamente en unas y otras operaciones permitiendo utilizar en cada clase la tolerancia conveniente sin que por esto se puedan acumular los errores, localizar y repartir sucesivamente los de la parcelación en la poligonación, los de esta en los triángulos de 4.° ó 3.er órden y los de estos en los de 2.° y 1.° y se comprende fácilmente que segun la extensión y accidentes del terreno se pueden aumentar ó disminuir los distintos órdenes de triángulos, siendo unas veces uno solo con ó sin puntos interiores determinados por intersección directa ó inversa, otras dos y otras tres, no pudiéndose establecer regla alguna fija sobre este particular en planos de terrenos de muy grande extensión, si bien para los de menos del tipo señalado será casi siempre mejor concretarse á los triángulos normales con algun punto interior determinado por intersección directa ó inversa; pues bastará con esto para proceder con base segura y se evitarán las complicaciones á que conducen los triángulos de 1.° y 2.° órden topográfico, cuando los lados de los normales tengan de 4 á 5.000 metros.

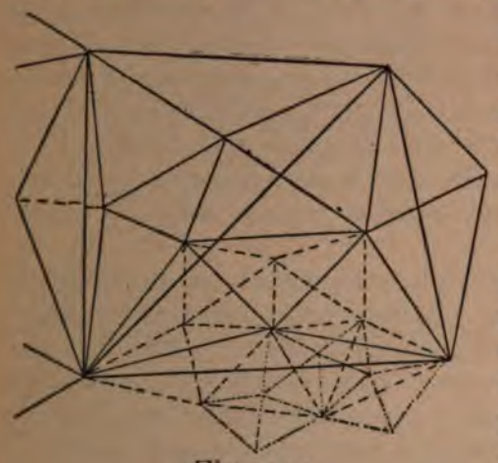


Fig. 111

Ordinariamente será tambien mas conveniente, en el caso de considerar necesarios dos ó tres órdenes de triángulos, desarrollar separadamente cada una de las redes por órden de mayor á menor cuidando de comprender en la de los triángulos normales los vértices de los de 2.° órden topográfico y en la de estos los del de 1.° para que les sirvan de comprobación y corrección de los errores, mas bien que deducir directamente unas de otras, como muchos aconsejan; esto dá lugar á formas inconvenientes de los triángulos y á grande confusión en los registros y en los cálculos.

A tal efecto es necesario medir las bases de partida y comprobación con la precisión correspondiente á la triangulación de órden superior y disponer la cadena de triángulos de su amplificación de manera que comprenda un lado de triángulos de cada órden, midiendo despues los ángulos correspondientes á cada uno con la precisión que sea necesaria para su respectiva tolerancia; pero la cadena de triángulos no ha de ser uniforme, sino que desde que se haya determinado un lado de triángulo normal deben tener esta categoría para determinar el lado del triángulo de 2.° órden y la de estos para conocer la longitud del lado del 1.°, todo lo que, si dará algun mas trabajo en la amplificación de la base, tambien mas seguridad y sencillez en los sucesivos, pudiendo de esta manera realizar grandes triangulaciones topográficas muy sencillamente en los países en que no estuvieran realizadas las de 2.° y 3.er órden geodésico; pues con las últimas se podrán simplificar aquellas.

91 — Condiciones generales de los vértices, como puntos de estación y de mira.

De su distribución en el terreno depende la forma de los triángulos y la longitud de sus lados, de lo que respectivamente nos ocuparémos en los dos números siguientes y por lo tanto en este nos hemos de concretar á indicar las condiciones que deben reunir bajo los dos conceptos de puntos de estación y de mira, pues para esto han de servir.

Como puntos de estación deben hallarse en terreno prominente, accesible, limpio de estorbos y desde él que se vean claramente todos los vértices del polígono compuesto de los triángulos normales en aquella concurrentes y, cuando se considere necesario utilizar distintos órdenes, los mas lejanos correspondientes á los respectivos triángulos, que tambien han de concurrir allí; es decir que las condiciones características son: *accesibilidad, facilidad en la puesta de estación y manejo de los aparatos y grande visibilidad de los puntos importantes del terreno.*

La no accesibilidad obliga á determinar tales puntos por intersección imposibilitando la mejor de las comprobaciones dependiente de la medida de los tres ángulos de cada triángulo; la dificultad en la puesta de estación y manejo de los aparatos induce á utilizar otras auxiliares y reducir al centro los ángulos en ellas medidos, si aquellas se encuentran de buenas condiciones, lo que no sucede muchas veces, y la falta de visibilidad de los vértices indicados imposibilitaría el enlace conveniente de los triángulos complicando en gran manera la triangulación.

Como puntos de mira los vértices se han de destacar claramente de todos los objetos que los rodean y á tal efecto se han de elegir los puntos salientes de las divisorias en cresta y las rocas ó puntos notables de los claros y calveros de las vaguadas y laderas en las montañas; en las llanuras, las vegas y anchos valles, las veletas de los campanarios y cúpulas, los pararrayos, chimeneas, puntos determinados en las azoteas y altos miradores de los edificios mas notables y especialmente los aislados, cuidando que se destaquen con claridad y precisión sobre el horizonte terrestre ó celeste en que aparezcan desde las diferentes estaciones desde donde se hayan de ver y á tal efecto los que hubieran de encontrarse en tierra se marcarán como se dirá en el artículo segundo evitando que se confundan con otros objetos al mirarlos desde las distintas estaciones.

Los mas visibles serán seguramente las veletas de los campanarios y de las cúpulas, los pararrayos, etc.; pero como no permiten hacer en ellos estación, no solo complican los cálculos con la reducción de los ángulos al centro, sino que implican la necesidad de utilizar otras estaciones auxiliares muchas veces difíciles de hallar de las condiciones deseables; de manera, que la elección y marcación de los vértices de la triangulación es uno de los trabajos mas penosos y de mayor trascendencia, pues de ellos dependen las buenas ó malas condiciones de aquella y es el que exige mayor movilidad y previsión, por lo que no deben escatimarse los medios de conseguirlo de la mejor manera posible.

92 — Forma mas conveniente de los triángulos.

Ya se consideren los del 1.°, ya los de 2.° ó 3.° órden topográfico es indudable que, bajo el concepto de la mejor distribución de los puntos y bases de comprobación, la forma equilateral debe ser la preferible por resultar iguales todas las bases de comprobación de las poligonales.

Tambien lo es bajo el concepto de la repartición de los errores angulares, porque esta se hace por partes iguales y es mas racional cuando lo son los ángulos de cada triángulo.

El equilátero por otra parte es el que á igualdad de perímetro abraza mayor superficie y por consiguiente en una determinada exige menor número de ellos á igualdad tambien de longitud de los lados.

Finalmente, como la mejor determinación de cada vértice corresponde á la intersección perpendicular de los lados, segun ya lo indica la construcción geométrica, no pudiendo haber mas que una de tal clase en cada triángulo, es evidente que para que los tres de cada uno queden mejor determinados es necesario que se acerquen lo mas posible á aquella condición y esto solo se consigue mediante la forma equilateral.

Pero esta no aumenta ni disminuye la longitud de los lados con relación al que sirve de base en cada triángulo y muchas veces es necesário hacerlo, ya para ascender de triángulos pequeños á otros mayores, ya para bajar de estos á aquellos y si bien todo se puede conseguir mediante pequeños triángulos equiláteros en cadena, como lo harémos ver al ocuparnos de la amplificación de la base de partida y del descenso á las de comprobación, puede en algunos casos convenir hacerlo directamente aceptando para los triángulos la forma isósceles mas acutángula y la rectángula respectivamente y conviene hacer constar la influencia que cada una de las tres formas indicadas tiene en la multiplicación de los errores de la base medida ó calculada y en los que en los lados tienen los cometidos en los ángulos, ya que en la resolución de cada triángulo se ha de partir del conocimiento de un lado y de sus tres ángulos.

El error Δc será por consiguiente tanto mayor cuanto mas lo sea la relación $\frac{B\,M}{A\,M}$ y como sabemos que esta es igual á la unidad cuando el ángulo $B = 90°$ y aumenta á medida que disminuye el ángulo B, se deduce que en el triángulo rectángulo isósceles el error cometido en los ángulos adyacentes á la base, ó lado conocido, produce en los opuestos otro menor que cuando aquel ángulo es agudo ó sea en los triángulos isósceles acutángulos y esto con tanto mayor motivo cuanto que siendo aquel proporcional á la longitud de los mismos lados esta tambien aumenta con aquella condición.

Parece de aquí deducirse que en los triángulos obtusángulos el error será todavía menor; pero no sucede así, porque, como la figura lo pone de manifiesto en ellos el error máximo se comete cuando los de los ángulos son uno por exceso y por defecto el otro trasladando el vértice B_1 á B'_1 ó á B''_1; aceptando el primero y bajando la perpendicular $B_1 D_1$ á la $A\,B'_1$, el error en c' sería $D_1 B'_1$ y de los triángulos $B_1 D_1 B'_1$ y $A\,B_1 M$, que se pueden considerar semejantes, resulta:

$$B'_1 D_1 = \Delta c' = B_1 D_1 \frac{A\,M}{B_1 M}$$

y como $$B_1 D_1 = c' \; Sen.\; e'$$

será $$B'_1 D_1 = \Delta c' = c' \; Sen.\; e' \frac{A\,M}{B_1 M}$$

De aquí resulta tambien que el error aumentará á medida que lo haga la relación $\frac{A\,M}{B_1 M}$ es decir, puesto que $A\,M$ es constante, á medida que disminuya $B_1 M$ y como esto sucede aumentando el valor del ángulo en B_1 y cuando este es de 90° aquella relación es igual á la unidad, resulta tambien, en tal concepto, que al triángulo rectángulo isósceles le corresponde el menor error.

Sin embargo hay que tener en cuenta que no se puede aceptar este resultado en absoluto, porque, influyendo en aquel valor el del lado, este disminuye aumentando el ángulo en B_1 pero al mismo tiempo ofrece el inconveniente de reducir el valor de los ángulos en A y C y consiguientemente la longitud de los lados opuestos (1).

93 — Longitud de los lados.

Como ya indicamos en el número 15, depende de las condiciones del terreno, de los procedimientos que se utilicen en la poligonación y parcelación, de la clase de aparatos disponibles y manera de manejarlos y de la mayor ó menor exactitud con que sea necesario conocer la situación relativa de los puntos característicos del terreno; á todo esto es consiguiente la diversidad de límites señalados para conseguir el objeto deseado en cada caso; porque es evidente que, cuando el terreno sea poco escabroso y dividido y en que no abunden los estorbos, en la parcelación y poligonación no se cometerán tantos errores como en las contrarias condiciones y la longitud de los lados ó bases de comprobación de la segunda podrá ser mayor; lo propio sucederá cuando se utilicen los mas perfectos procedimientos en lugar de hacerlo de los antiguos con medición directa de las distancias una sola vez, ya se apliquen en estos los itinerarios con la brújula, ya las antes y aun ahora por algunos preconizadas alineaciones rectas combinadas con perpendiculares; con buenos aparatos no se cometerán tantos ni tan grandes errores como con los malos y los puntos de comprobación podrán hallarse mas distantes y finalmente lo mismo ocurrirá cuando no fuese necesaria mucha precisión en la situación relativa de los

(1) Estas sencillas demostraciones las hemos tomado del excelente *Corso pratico di Topografia numerica* del ilustre Ingeniero Orlandi, páginas 250-253, que las utiliza especialmente para deducir el grado de precisión con que se han de medir los ángulos para conservar en los lados la que se desee conseguir como veremos despues.

puntos característicos por proponerse, v. gr., obtener solo una idea mas ó menos aproximada de las condiciones generales del terreno mediante el plano gráfico de pequeña escala, como ocurre con los mapas ordinarios, cuyo objeto es tan distinto de los catastrales de carácter jurídico.

Se comprende tambien fácilmente que la combinación de las indicadas condiciones puede conducir á resoluciones muy distintas de las que correspondieran á cada una de ellas y á todo es consiguiente que no pueda establecerse con seguridad la longitud mas conveniente para el lado de los triángulos normales, ni para los de 2.° y 1.er órden topográfico, cuando estos fueren necesarios.

Consiguientemente á todo esto creémos puede establecerse de una manera general *como longitud media de los lados de los triángulos normales:*

1.° *300 metros* cuando sin el auxilio de la poligonación y utilizando solo alineaciones rectas se hiciera la parcelación de terrenos muy divididos sin otro aparato que la escuadra, como sucedió en el Catastro del pequeño principado de Schwarz-burg-Sandershausen bajo la dirección del ilustre General Baeyer, lo cual sucederá ahora muy rara vez; ó cuando se empleara el procedimiento de Rabbini, que vino á hacer lo mismo mediante el auxilio de alineaciones rectas ó el de Rozas, que sirviéndose de tales vértices como puntos de estación detallaba por radiación utilizando un teodolito y la medición indirecta de las distancias por el sistema de diferencia de tangentes, que él llamaba de la Pértiga Rozas.

Se comprende que esta diminuta triangulación no es aplicable en planos de grande extensión, porque ofrecería muchos inconvenientes el señalamiento simultáneo y marcación de tantísimos vértices y el cálculo de tantos triángulos, que necesariamente deberían comprenderse en otros mayores haciendo indispensables redes de distintos órdenes complicando los trabajos; pero, si no es por todo esto recomendable, tampoco puede en absoluto desecharse, pues en terrenos limpios de estorbos y extremadamente divididos pudiera encontrar aplicación en cualquier de las formas indicadas.

2.° *1000 metros* cuando se haga poligonación con brújula y la parcelación mediante perpendiculares á sus lados ó á las alineaciones rectas en ella apoyadas ó en puntos determinados por intersección y se midan las distancias directamente con cinta ó cadena una sola vez, porque no consiguiéndose suficiente precisión y siendo frecuentes las equivocaciones, que no descubren con seguridad los planos gráficos con estos medios utilizados, es necesario aproximar los puntos de comprobación; por esto en la renovación del Catastro francés se dispone que se complete la triangulación de 3.er órden del E. M. y se haga otra de 4.° órden con lados de 1000 á 2000 metros, pues se admite la aplicación del sistema de alineaciones, aunque se ha de hacer uso de la cinta de acero.

3.° *2000 metros* puede alcanzar la longitud de los lados de los triángulos normales cuando, como se hizo en el nuevo Catastro prusiano, aunque se admite la medición directa se obliga á realizarla con reglones midiendo dos veces en sentido contrario, se utilizan las poligonales midiendo sus ángulos con buenos teodolitos y se calculan con cuidado las coordenadas planimétricas de sus vértices consiguiendo buenos planos numéricos, porque todo esto evita ó disminuye los errores y dá medios de comprobación y corrección.

Por esto tambien puede aceptarse la misma longitud tipo en el caso de que se apliquen buenos taquímetros con poligonación segun el sistema de Porro y la parcelación por radiación, segun los modernos procedimientos ordinarios y así se ha hecho con buen resultado en los Catastros modenés y general italiano.

4.° *5000 metros* pueden finalmente alcanzar los lados de los triángulos normales, si con buenos taquímetros se aplica el procedimiento de poligonación con comprobaciones sucesivas con las precauciones aconsejadas en los números 70 y 71, pues evitando las equivocaciones y descubriendo los errores los localiza y corrige dando seguridad y precisión.

Se comprende fácilmente que cuanto mayor sea el lado del triángulo normal mas sencilla será la triangulación, porque no solo será menor su número sino tambien menos necesario ad-

mitir distintos órdenes y de aquí las muchas ventajas del procedimiento ultimamente indicado, que por otra parte, como ya digimos (número 71) permite sin gran molestia completar el objeto de la triangulación con otros vértices trigonométricamente calculados por intersección directa ó inversa haciendo completamente innecesaria la complicación y trabajo de los triángulos de distintos órdenes, pues por su medio se llega con seguridad á los del 3.° de la triangulación geodésica y si esta no existiera con una especial de 15 kilómetros de lado se podría cubrir una grandísima extensión de terreno.

Cuando el triángulo normal tenga 2000 metros, para enlazarlos con los de 3.er órden geodésico no será necesario mas que otro órden topográfico, que podría ser de 5000 metros de lado; si solo alcanza aquel 1000 metros será conveniente utilizar los tres órdenes de 4 y 8000 metros y en el caso de tener solo 300 metros el lado de los triángulos normales será preciso utilizar tambien tres órdenes de triángulos, que podrían tener 1500, 4000 y 8000 metros de lado para enlazar aquellos con la triangulación geodésica; pero debemos repetir que todo esto son solo indicaciones y de ninguna manera reglas fijas, pues en cada caso el Topógrafo debe resolver lo que fuere mas conveniente segun las condiciones locales, los medios de que disponga, los procedimientos que utilice, la precisión que con ellos consiga y el objeto final que se proponga.

94 — Condiciones de las bases de partida y comprobación.—Terreno, longitud, aparatos de medición, precisión necesaria y manera de relacionarlas con los lados de los triángulos.

BASES DE PARTIDA Y DE COMPROBACIÓN

Aunque para resolver y comprobar todos los triángulos integrantes de una red sea suficiente el conocimiento de la verdadera longitud de un solo lado, *la base de partida*, ya que procediendo de unos á otros siempre en cada uno se llegará á conocer uno ó dos lados y los tres ángulos y siguiendo distintos caminos se podrán determinar, como verémos, dos valores de un mismo lado comprobando los cálculos utilizados en la resolución de los triángulos comprendidos en las dos séries y los demas que con ellos estén directamente relacionados, como quiera que si la base fuera errónea los triángulos obtenidos no serían los propios del terreno sino otros semejantes á ellos engañando al operador, para descubrir si existe ó no tal condición y corregir el error resultante en cada triángulo, se han de medir ademas alguna ó algunas *bases de comprobación* con las mismas precauciones que la de partida; pues es evidente que si á ellas se llega por diferentes séries de triángulos obteniendo para su longitud un valor, que no difiera del conseguido por la medición directa en mas de la tolerancia admitida, se tiene la seguridad de haber conseguido el objeto que con la triangulación nos proponíamos y el medio de compensar en gran parte los errores.

El Instituto Geográfico y Estadístico de España, dispone en el artículo 6.° de sus Instrucciones topográficas de 1878, que cuando no exista red de 3.er órden geodésico en el terreno, en que se haya de operar, se utilice una base de 500 á 1000 metros para cada 10.000 hectáreas y así será prudente proceder cuando la longitud de los lados de los triángulos normales llegue á 2 kilómetros y no se utilice el procedimiento de poligonación con comprobaciones sucesivas, pues con este y lados de 5000 ó mas metros no será necesario prodigar tanto las bases de comprobación.

Así lo ha puesto en evidencia la ilustradísima Comisión del Cuerpo de E. M. encargada del plano de Jaca y altos valles de los ríos Aragón y Gállego con su excelentísima triangulación de aquel escabrosísimo terreno, pues comprendiendo 1200 kilómetros cuadrados mediante 17 grandes polígonos y tres cadenas con un total de 108 triángulos, obtuvo toda clase de comprobaciones con solo cuatro bases.

No hay, pues, que prodigarlas innecesariamente, aunque sí medir siempre al menos una de comprobación.

Cuando en el terreno existan vértices del 3.er órden geodésico se comprenderán en los de la triangulación sirviendo sus lados ó sus coordenadas de comprobación haciendo innecesarias las bases de este género.

La base de partida y las de comprobación deben reunir las mismas condiciones de precisión y por consiguiente lo que sobre aquella digamos conviene á las segundas.

Sobre la longitud mas conveniente de la base nada está acordado; en cada caso se ha de resolver segun las condiciones del terreno, en que se pueda medir y las de los aparatos, con que se ha de operar; porque la *condición esencial* es que se determine su longitud con la precisión necesaria para que por su medio se consiga la de un lado de los triángulos normales ó de los distintos órdenes, que se crean necesarios, con la precisión acordada previamente.

El Instituto Geográfico y Estadístico, como ya hemos dicho, dispone que esté comprendida entre 500 á 1000 metros fijando la de los lados de los triángulos de 2 á 5000.

La precitada Comisión del E. M. aceptó como de partida una de 1445 metros y lados de 3 á 6000.

El ilustre Ingeniero Orlandi, dice, con razón, que sería conveniente que la longitud de la base fuera la misma que la de los lados de los triángulos normales; pero que como esto ofrecería grandes dificultades hay que contentarse con otra mas reducida midiéndola con grandes precauciones.

El ilustre Salmoiraghi describe (1) una triangulación realizada por el malogrado Villani, en que con lados de 2 á 8 kilómetros utilizó una base de partida de 221'5 metros y otra de comprobación de 186'87 metros medidas al $^1/_{20000}$ consiguiendo en un lado de 5.328'87 metros la aproximación de $^1/_{18818}$ y en otro de 8.709'27 metros la de $^1/_{33000}$ y en vista de estos resultados se declara partidario de las pequeñas bases.

Imposible es fijar límites absolutos, ni relativos, á la longitud de las bases; porque si bien parece que debiera estar en relación con la de los lados del triángulo normal, como su influencia en la precisión, con que la de estos se consiga, depende mas bien de la que se alcance en la medición de la base y de los ángulos de los triángulos auxiliares, con que se relacionen, se puede llegar al mismo resultado con bases de longitud muy distinta y por procedimientos diferentes.

Así en efecto se observa comparando las precitadas triangulaciones de Villani y de la Comisión del E. M.; el primero con sus pequeñas bases llegó á calcular el lado de un triángulo de 1.er órden topográfico con la precisión de $^1/_{33000}$ y la segunda con base de 1445'58 metros comprobó mediante tres polígonos y los triángulos auxiliares de amplificación y descenso, en otra de 1875'87 metros por la poligonal mínima de 22.775'03 metros, resultando en la diferencia de las longitudes medida y calculada de la segunda solo 0'21 metros, consiguiendo por lo tanto una apreciación en la distancia de los extremos de las bases comparadas de $^1/_{100000}$.

Cuanto mas se aproxime la longitud de la base al lado del triángulo normal, mas fácilmente se relacionarán y menor lugar se dará á la acumulación de los errores; pero lo que principalmente se ha de procurar es medirla y los ángulos de los triángulos auxiliares con la mayor precisión posible y esto depende de las *condiciones del terreno y de los aparatos disponibles para realizar tales mediciones.*

El terreno en que la base se ha de medir ha de ser plano, horizontal ó ligera y uniformemente inclinado, limpio de estorbos, unido y firme y tal que desde sus extremos se vean claramente los vértices de los triángulos inmediatos, que directamente ó con otros en cadena hayan de servir para deducir de la longitud de aquella la de un lado del triángulo normal ó de órden superior que fuere necesario.

Como quiera que la medición de estas bases se puede realizar con cinta de acero, con sencillos reglones ó con otros sostenidos por pies ó trípodes, es consiguiente que pueden variar sin inconveniente algunas de las indicadas condiciones; pues como con los últimos los reglones

(1) Les Cleps, página 33.

no están en contacto con el suelo, no dificultan su horizontalidad y contacto las yerbas, piedras y pequeñas matas, que tanto molestan en la buena colocación de los sencillos y cinta de acero, que han de descansar sobre aquel.

Los paseos de las carreteras y ferrocarriles, los prados y tierras labradas y muy especialmente las peladas lomas presentan lugar oportuno para la medición de las bases.

Pudieran estas ser poligonales en lugar de rectas, con tal que desde un extremo se vea el otro, pues midiendo con cuidado los lados y los ángulos podría deducirse la longitud de la recta que los une por el mismo procedimiento explicado para los lados de la base de comprobación del procedimiento de poligonación con comprobaciones sucesivas; pero esto complicaría la medición y expondría á mayor error del tolerable, por lo que debe, en cuanto sea posible, elegirse la base recta.

Al mismo efecto debe procurarse que el terreno sea horizontal ó suave y uniformemente inclinado y, si ni aun esto se pudiera conseguir, se subdividirá en porciones que lo sean, midiendolas con la cinta ó los sencillos reglones en el sentido de la pendiente y reduciendo su distancia al horizonte.

APARATOS DE MEDICIÓN Y MANERA DE UTILIZARLOS

Al describir en el número 72 del volúmen I la *cinta de acero* ó *flege* digimos: que utilizado con muchas precauciones en terreno llano y limpio de estorbos podía servir para medir bases topográficas y que así lo disponían las Instrucciones del Instituto Geográfico y Estadístico.

La ilustradísima y nunca bastantemente ponderada Comisión del Cuerpo de E. M., que realizó la excelente triangulación de Jaca y altos valles de los ríos Aragón y Gállego, *por no disponer de otros aparatos*, utilizó tambien la cinta de acero en la medición de sus bases y consiguió tan excelentes resultados con las precauciones tomadas, que nada creémos mejor que indicar estos y aquellos relativamente á la base de partida, para que sirvan de norma en casos tales.

La cinta de acero utilizada tenía 20 metros, estaba dividida en metros, decímetros, centímetros y milímetros y antes de emplearla se contrastó cuidadosamente (1) con el metro patrón haciéndola descansar en el suelo con tensión natural.

Elegida una porción recta de la carretera de Navarra para la base y señalados sus extremos con prismáticos sillarejos, se subdividió en siete secciones de pendiente uniforme, que despues se determinó con un buen nivel para reducir su longitud al horizonte y mediante un teodolito se fijaron en cada una grandes clavos á la distancia aproximada de 100 metros.

---

(1) Como el error inicial del utensilio ó aparato que se utilice en la medición de las bases es *sistemático* y se repite muchas veces en ella en el mismo sentido, tiene suma importancia anularle en lo posible mediante una cuidadosa contrastación y tener directa ó indirectamente en cuenta las variaciones que pueda sufrir y la influencia de la temperatura y la humedad especialmente.

Estas no se miden ordinariamente en cada posición del utensilio al hacerlo en las bases topográficas y por consiguiente no se tienen en cuenta tales influencias y, como el *metro-patrón* está calculado para la temperatura de 0c, resulta defectuoso á las de 10c á 25c, en que generalmente se utiliza para la contratación del utensilio medidor, y este para la medición de las bases, sino se descuenta de su longitud en aquel momento la que corresponde á la dilatación por la temperatura en los de metal y por la temperatura y la humedad en los reglones de madera.

Para hacer ver la necesidad de esta reducción basta tener en cuenta, que siendo los *metros-patrones de acero ó de latón, los primeros* se alargan por metro y 1c de temperatura, término medio, 0'01173 milímetros y *los segundos* 0'01859 milímetros.

Por consiguiente á la temperatura media de 17c y en los 20 metros de la cinta de acero, resultaría un exceso de longitud en el utensilio de medición, unidad real de la medida,

con el metro-patrón de acero $0'01173 \times 17 \times 20 = 3'9882$ ó 4 milímetros
» » » » » latón $0'01859 \times 17 \times 20 = 6'3206$ ó 6 »

que habrá que rebajar de la longitud resultante de colocar con sumo cuidado sobre un durmiente fijo é invariable 20 veces el metro-tipo uno á continuación de otro; pues de no hacerlo así, solo por este concepto en una base de 1000 metros se cometería el error de 200 milímetros ó $^1/_{5000}$ en el primer caso y de 300 milímetros ó $^1/_{3333}$ en el

Sujetando una cuerda bien estirada entre cada dos clavos y despues de limpiar de la yerba, piedrecillas y demas pequeños estorbos y de afirmarle en donde era nece fué colocando el fleje en contacto con la cuerda con la misma tensión natural con que trastó y señalando sus extremos con una navaja sobre el suelo expresamente afirmado y al efecto (1).

Cinco veces se midió cada una de las siete secciones de la base, tres en un sentido en otro, comparando en cada una los resultados parciales con la media para ver si las di cias estaban ó no comprendidas en la tolerancia: hízose despues la comparación entre las dias de ida y vuelta de las longitudes parciales y con la media de ambas se calcularon las dientes mediante la diferencia de alturas y la distancia reducida al horizonte en ambos sent consiguiendo una excelente comprobación.

Concretándonos á los totales medios de las mediciones de ida y vuelta que fueron

el 1.º . . . . 1445'636
el 2.º . . . . 1445'658

resulta una diferencia con el término medio aceptado solo de 11 milímetros y la aproximació probable de $^1/_{100000}$, cuyo sorprendente resultado ni es indispensable en las triangulaciones to pográficas, ni fácilmente conseguible con la cinta de acero y si bien mucho se puede esperar de las exquisitas precauciones utilizadas y de la inteligencia con que se realicen, rara vez un resultado tan maravilloso, que podría hacer sospechar la existencia de fortuítas y engañosas compensaciones, si, como antes hemos dicho, no se viera corroborada tan sorprendente precisión con la conseguida en la comprobación de la 1.ª base de este género.

Para que sirvan de modelo copiamos en las páginas 326 y 327 los estados y cálculos utilizados en la medición de la base y su reducción al horizonte á que hemos hecho referencia, los que con la autorización competente, nos ha proporcionado nuestro buen amigo el inteligentísimo Topógrafo ahora Coronel de E. M. D. Francisco González Jordana.

---

segundo, errores que aumentarian naturalmente con la temperatura del momento de la operación, por lo cual siempre será conveniente tenerla en cuenta y hacer la modificación correspondiente á la temperatura de cada cintada comparada con la de la contrastación, pues con aquella rebaja se reduce su longitud á la temperatura de la contrastación á la correspondiente al metro-tipo á 0c y por consiguiente aumentando la temperatura lo hará la de la cinta disminuyendo la verdadera de la base medida y lo contrario ocurrirá cuando la temperatura en el momento de la operación sea menor que en el de la contrastación; solo podrán eludirse estos trabajos haciendo la contrastación á una temperatura que se calcule próximamente igual á la de la medición de la base acomodando las horas en que esta se mida á la temperatura atmosférica próximamente igual á aquella.

Para contrastar reglones se hará en la longitud tipo, determinada con el metro-patrón, igual reducción; pero habría que tener en cuenta la humedad del ambiente; ya que, si bien en la madera no tiene tanta influencia la temperatura, sí la tiene la humedad; pues, segun Prévot, en uno de 5 metros puede alcanzar 2 milímetros en algunas semanas y 0'5 milímetros en un día, lo cual implicaría la necesidad de contrastar su longitud en cada uno de estos; pero estas variaciones se pueden, sino anular, reducir en gran manera sometiéndolos, antes de la contrastación, á un baño prolongado por algunas horas en aceite hirviente ó darlas algunas manos de ella y despues dos al menos de pintura al óleo, precauciones inevitables para conseguir la medida de las bases con la necesaria seguridad, que siempre será mayor con los reglones que con las cintas, pues con las precauciones indicadas están menos expuestos á variaciones intolerables.

Estos posibles errores, y los demas consiguientes á la medición directa de las bases, inducen á elegirlas cortas siempre que el terreno se preste á su ampliación mediante sencillas cadenas triangulares, por mas que, como luego decimos, otros motivos inclinen á elegirlas lo mas grandes posibles, porque los ángulos se pueden medir con mayor precisión y la comprobación se consigue en el primer lado del triángulo normal disponiendo convenientemente las cadenas de ampliación.

(1) Es mas seguro utilizar baldosetas, en que con un lápiz se marca una cruz muy fina y se dejan engastadas en el suelo para repetir la medición en caso de duda; pero no deben servir para las distintas mediciones, en que debe hacerse que el extremo de la cinta llegue á diferentes puntos, pues, sin esta precaución, instintivamente los portadores de la cinta la estiran mas ó menos para hacerla llegar siempre al mismo, consiguiéndose una falaz coincidencia que engaña al operador.

MEDICIÓN DE LA BASE DE PARTIDA *A B*

MEDICIONES	PENDIENTES 1.°=A−1	2.°=1−2	3.°=2−3	4.°=3−4	5.°=4−5	6.°=5−6	7.°=6−7	TOTALES
1.ª	551'420	155'845	216'992	167'851	90'919	105'173	157'436	1445'636
2.ª	551'428	155'849	216'998	167'859	90'917	105'175	157'432	1445'658
Sumas	1102'848	311'694	433'990	335'710	181'836	210'348	314'868	2891'294
Promedio	551'424	155'847	216'995	167'855	90'918	105'174	157'434	1445'647

NIVELACIÓN Y REDUCCIÓN EN EL SENTIDO *A B*

LONGITUD PROMEDIO DE LAS DOS MEDICIONES = 1445'647

Pendientes niveladas	Puntos observados	Lecturas de mira	Diferencias parciales de nivel +	Diferencias parciales de nivel −	Diferencias totales de nivel +	Diferencias totales de nivel −	Distancias	Reducción al horizonte	Distancias reducidas
	A	2'175	1'599	»					
	a	0'576							
	a	2'088	1'068	»					
	b	1'020							
A−1	*b*	2'264	1'358	»	6'357	»	551'424	$\sqrt{(551'424)^2-(6'357)^2}=$	
	c	0'906						$\sqrt{304028'017}$ » log. A−1 = 2'7414568	551'387
	c	2'182	1'242	»					
	d	0'940							
	d	2'156	1'090	»					
	1	1'066							
1−2	1	2'150	1'658	»	1'658	»	155'847	$\sqrt{(155'847)^2-(1'658)^2}=$	
	2	0'492						$\sqrt{24285'539}$ » log. 1−2 = 2'1926739	155'838
	2	1'980	0'922	»					
2−3	*a*	1'058			1'844	»	216'995	$\sqrt{(216'995)^2-(1'844)^2}=$	
	a	1'742	0'922	»				$\sqrt{47083'429}$ » log. 2−3 = 2'3364340	216'987
	3	0'820							
	3	1'882	0'760	»					
3−4	*a*	1'122			1'496	»	167'855	$\sqrt{(167'855)^2-(1'496)^2}=$	
	a	1'864	0'736	»				$\sqrt{28173'064}$ » log. 3−4 = 2'2249170	167'848
	4	1'128							
4−5	4	1'790	0'480	»	0'480	»	90'918	$\sqrt{(90'918)^2-(0'480)^2}=$	
	5	1'310						$\sqrt{8265'852}$ » log. 4−5 = 1'9586438	90'917
5−6	5	1'808	0'468	»	0'468	»	105'174	$\sqrt{(105'174)^2-(0'468)^2}=$	
	6	1'340						$\sqrt{11061'352}$ » log. 5−6 = 2'0219041	105'172
6−*B*	6	1'870	0'890	»	0'890	»	157'434	$\sqrt{(157'434)^2-(0'890)^2}=$	
	B	0'980						$\sqrt{24784'672}$ » log. 6−B = 2'1970916	157'431
Diferencia de nivel entre *A* y *B*.			13'193	»			1445'647	Base *A B* reducida.	1445'580

Número 94

NIVELACIÓN Y REDUCCIÓN EN EL SENTIDO *B A*

LONGITUD PROMEDIO DE LAS DOS MEDICIONES = 1445'647

Pendientes niveladas	Puntos observados	Lecturas de mira	Diferencias parciales de nivel +	Diferencias parciales de nivel −	Diferencias totales de nivel +	Diferencias totales de nivel −	Distancias	Reducción al horizonte	Distancias reducidas
B — 6	B	0'980						$\sqrt{(157'434)^2 - (0'888)^2} =$	
	6	1'868	»	0'888	»	0'888	157'434	$\sqrt{24784'677}$ » log. B.—6 = 2'1970916	157'
6 — 5	6	1'180						$\sqrt{(105'174)^2 - (0'464)^2} =$	
	5	1'644	»	0'464	»	0'464	105'174	$\sqrt{11061'355}$ » log. 6 — 5 = 2'0219042	105'
5 — 4	5	1'138						$\sqrt{(90'918)^2 - (0'482)^2} =$	
	4	1'620	»	0'482	»	0'482	90'918	$\sqrt{8265'850}$ » log. 5 — 4 = 1'9586437	90'
	4	1'130							
	a	2'148	»	1'018				$\sqrt{(167'855)^2 - (1'486)^2} =$	
4 — 3	a	1'356			»	1'486	167'855		
	3	1'824	»	0'468				$\sqrt{28173'093}$ » log. 4 — 3 = 2'2249173	167'
	3	1'098							
	a	1'950	»	0'852				$\sqrt{(216'995)^2 - (1'822)^2} =$	
3 — 2	a	1'092			»	1'822	216'995		
	2	2'062	»	0'970				$\sqrt{47083'509}$ » log. 3 — 2 = 2'3364345	216'
2 — 1	2	0'495						$\sqrt{(155'847)^2 - (1'655)^2} =$	
	1	2'150	»	1'655	»	1'655	155'847	$\sqrt{24285'548}$ » log. 2 — 1 = 2'1926739	155'
	1	1'328							
	a	1'722	»	0'394					
	a	1'036							
	b	1'962	»	0'926					
	b	1'108							
	c	2'040	»	0'932					
	c	1'190							
	d	2'084	»	0'894					
1 — A	d	1'286			»	6'349	551'424	$\sqrt{(551'424)^2 - (6'349)^2} =$	
	e	2'072	»	0'786				$\sqrt{34028'119}$ » log. 1 — A = 2'7414569	551'
	e	1'245							
	f	2'068	»	0'823					
	f	1'264							
	g	2'050	»	0'786					
	g	1'208							
	A	2'016	»	0'808					
Diferencias de nivel entre *B* y *A* . . .							13'146	1445'647	Base *B A* reducida	1445'

Distancia *A B* reducida = 1445'581
Distancia *B A* reducida = 1445'581
Promedio = 1445'581

Diferencia de nivel entre *A* y *B* = 13'1
Diferencia de nivel entre *B* y *A* = 13'1
Promedio = 13'1

En el número 73 del volúmen I describimos tambien las condiciones de los *reglones ordinarios y manera de utilizarlos* en la medición de las bases y distancias entre puntos del terreno y es claro que en las primeras, despues de contrastar cuidadosamente los reglones, se han de tomar las mismas precauciones que para medirlas con la cinta de acero, á fin de no cometer errores en el cambio de dirección ni en la falta de horizontalidad ó la inclinación uniforme correspondiente á la pendiente general de cada sección de la base.

El manejo de los reglones ha de ser naturalmente mas enojoso que el de la cinta; pero tambien mas exacto el resultado, por la poca influencia que en ellos tiene la temperatura, la invariabilidad de su longitud por la tensión, que sin grandes precauciones tanto puede influir en la longitud de la cinta, la facilidad de la coincidencia de sus extremos siguiendo el procedimiento que aconsejamos en el número 73 del volúmen I, con los tres reglones y la de ponerlos horizontales ó con la misma pendiente del terreno mediante un nivel de burbuja (1), porque todos los inconvenientes que entonces atribuímos á su manejo en la medición de las distancias ordinarias no se presentan en las bases, ya que el terreno elegido para estas no debe presentar los estorbos y grandes pendientes que motivaban aquellos; pero se debe tener mucho cuidado al anotar el número de reglones y partes de ellos comprendidos en cada sección para no incurrir en equivocaciones y á este efecto conviene numerarlos y tomar nota de ellos en un registro especial y así mismo cuidar que los peones al trasladarse de un punto á otro se separen de la línea y al colocarlos lo hagan lateralmente para no dar golpes á los ya colocados al intentar la coincidencia de sus extremos, si se emplean los reglones comunes y de las líneas que fijan los de su longitud útil si se utilizan los que aconsejamos mayores que ella y como en el 1.er caso será difícil colocarlos en justo contacto sin dar golpes al precedente, que pudieran motivar retrocesos ó que se interpongan granos de arena que motiven errores y en el 2.° caso será tambien difícil hacer la exacta coincidencia de las líneas de fé de sus extremos, en los destinados especialmente á la medición de bases conviene dividir en milímetros un centímetro de los contiguos á la línea de fé y al lado opuesto formar un nónius de 10 partes con 9 de aquellos haciéndolo en cada extremo, pero de manera que en uno quede el nónius dentro de la longitud útil y en el otro fuera de ella, á fin de que coincidiendo próximamente la línea de fé de dos reglones colocados uno á continuación de otro, si aquella coincidencia no se consigue, el nónius de cada reglón combinado con el centímetro graduado del otro permitan conocer con repetición la fracción de milimetro que haya de aumentarse ó restarse á la longitud normal del reglón, que en cada uno debe escribirse al lado de su número de órden despues de la contrastación contemporánea con la medición de la base, que se ha de hacer segun se indica en la nota de la página 324 y para que la graduación en milímetros y los nónius expresados resulten de buenas condiciones se harán sobre collares de metal, que pueden ser fijos ó con un pequeño movimiento de corrección, que permitirá hacer que la longitud útil sea siempre la del número de metros justos de los reglones utilizados.

El ilustre Ingeniero Orlandi, dice (2), que con reglones de 4 metros se pueden medir en una hora 200 de base y que repitiendo 4 veces se puede conseguir la aproximación de $^1/_{...}$ suficiente en las bases topográficas.

Deduce esta apreciación de los datos experimentales de Lorber; pero del ejemplo que consigna, y cuyo error medio calcula muy acertadamente, resulta para el relativo en una base de 382'507 metros $^1/_{84787}$, que no consideramos difícil conseguir con los reglones de 4 ó 5 metros en la medición de las bases topográficas, si se puede elegir al efecto terreno de las condiciones antedichas especialmente si se utilizan los tres reglones de la forma antes propuesta, porque por su medio los errores sistemáticos de contacto y retrocesos é inicial del utensilio se reducen

(1) Como las pendientes serán siempre pequeñas se puede disponer el nivel de manera que su base la marque estando centrada la burbuja y así será mas fácil la comprobación y en caso necesario se le dará al reglón calzando uno de sus extremos con un poco de tierra.

(2) Corso prático... página 244.

al accidental de lectura de los nónius extremos, que á lo sumo será en cada reglón de o'1 milímetro y con los de 4 metros, en la distancia de 100, de o'1 $\sqrt{25} = o'5$ milímetros.

Cuando esto no suceda completamente por abundar los cantos rodados, herbajes y matas bajas, el fleje de acero y los reglones sencillos darían malos resultados y habría que emplear el *aparato de Clerc con simples pies*, como el representado en la figura 113, que permite mantenerlos á conveniente altura sobre tales estorbos, ó mejor aun el *modificado con robustos trípodes*, que dan á los reglones completa estabilidad.

En la figura 114 representamos el que de esta clase construye Salmoiraghi (1) y en ella se observa fácilmente que cada reglón termina en un extremo por un semicilindro vertical y en el otro por una lengüeta terminada por otro horizontal con movimiento mediante cremallera, que permite apreciar el décimo de milímetro á la vista; cuando están en coincidencia los ceros de la escala y del nónius la distancia entre las dos generatrices mas exteriores de los semicilindros es de 4 metros justos (2), que es la longitud del reglón á la que hay que añadir lo que en cada caso se saca la lengüeta para hacer la coincidencia de los semicilindros de los dos reglones sucesivos.

Por medio de la cuerda se ponen en alineación los centros de los trípodes y consiguientemente los reglones; calzando los piés de los primeros se pone vertical la tabla de los mismos y

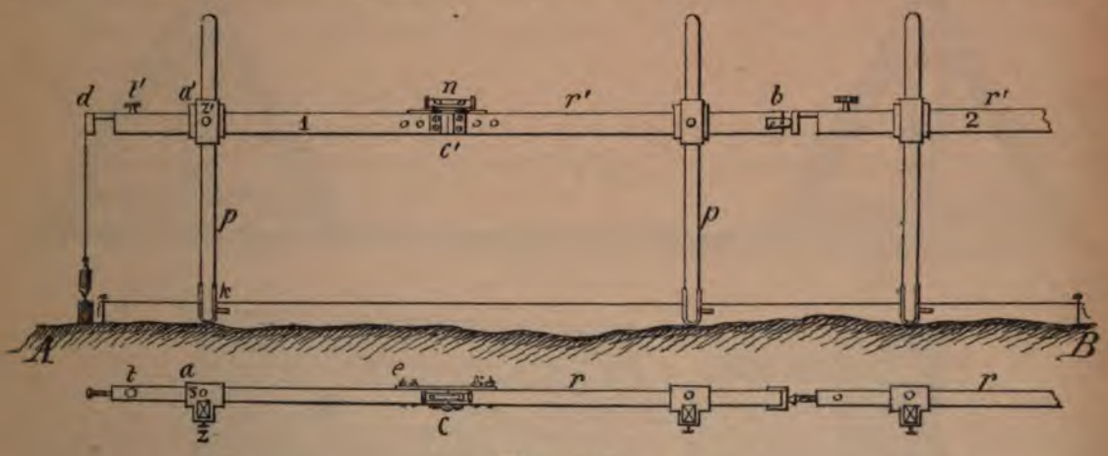


Fig. 113

horizontal á la altura conveniente su canto mediante los soportes verticales de aquellos y un nivel de burbuja: para proceder con soltura y rapidez cada reglón y sus trípodes deben llevarlos dos peones que caminando fuera de la línea le colocan en alineación de manera que su extremo se acerque, pero no toque, al precedente y despues de horizontarle y colocarle á la altura conveniente el operador saca la lengüeta hasta conseguir el contacto con el cilindro vertical del reglón anterior tomando nota de la longitud total del reglón con el número que le corresponde.

Antes de levantar un reglón se recoge la lengüeta con cuidado evitando todo golpe con el inmediato.

Con este aparato se puede fácilmente conseguir en dos ó cuatro mediciones la apreciación de $^1/_{20000}$, aunque el terreno presente los pequeños estorbos antes referidos; pero con ellos será

---

(1) Con tres reglones de 4 metros con lengüeta graduada y caja de embalaje y seis trípodes se vende á 750 francos.

(2) Así se dice; pero debe comprobarse en la contrastación teniendo en cuenta la temperatura del ambiente en el momento en que se hace, la del momento de la operación y la dilatación del metro-patrón utilizado, porque sino se hace así se comete un error que no se pone de manifiesto en las bases de comprobación, que adolecerán del mismo defecto consiguiéndose las dimensiones no del polígono verdadero sino de otro á él semejante; es necesario no olvidar esto que pasa para muchos desapercibido.

algo molesta la colocación de los trípodes en la posición conveniente para que los reglones tengan la necesaria horizontalidad y contacto con el que le precede y le sigue (1).

Precisión necesaria en las bases topográficas.—Dependiendo de ella la de la situación de los vértices de la triangulación y debiendo servir las coordenadas que determinan aquella á la longitud de las rectas que los unen para comprobar los resultados de la poligonación, es claro que cuanto mayor sea la precisión con que las bases se midan mayor seguridad darán al operador; pero como aquello no se consigue sin molestias y pérdida de tiempo es preciso concretarse á lo necesario, que naturalmente ha de estar en relación con la precisión conseguible en las poligonaciones y ya digimos en el número 9 que la *tolerancia en las bases* ó sea la máxima diferencia

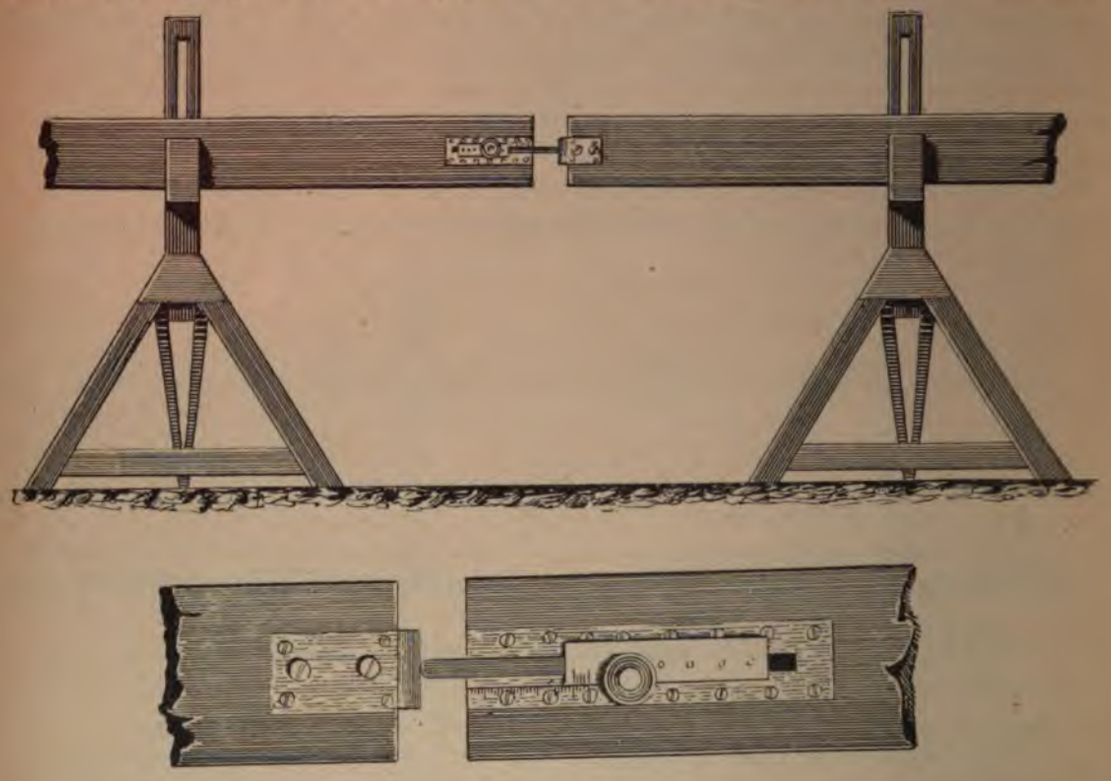


Fig. 114

admisible entre cada dos mediciones de ellas debería ser de $^1/_{5000}$ á $^1/_{10000}$ segun la importancia de las triangulaciones y hemos visto en los ejemplos citados de Villani, de Orlandi y de la Comisión del E. M. que se puede conseguir mayor precisión sin apelar á precauciones ni aparatos extraordinarios.

Debemos hacer constar sin embargo que ordinariamente se determina la tolerancia en cada caso teniendo en cuenta el valor que segun la escala adoptada corresponde á la magnitud gráfica apreciable ó sea á 2 ó 2'5 décimas de milímetro; de manera que si el plano se ha de construir en la escala de $^1/_{5000}$, y el lado medio del triángulo normal es de 5000 metros, la tolerancia relativa en ellos puede alcanzar $^1/_{5000}$ ó $^1/_{4000}$; pero se reduce mucho cuando los lados de los triángulos son mucho menores y no creémos procedente fijar esta base gráfica y sí la de la posible

(1) Se puede muy bien sustituir el aparato de Clerc con los reglones propuestos bien contrastados y simples caballetes, que permitan colocarlos horizontales de 0'75 á 1'25 m. de altura, como fácilmente se puede conseguir y en los terrenos llanos de pequeños estorbos colocándolos sobre sencillos trozos de madera calzándolos convenientemente para obtener la altura y horizontalidad deseadas y en este caso puede ponerse la cuerda alineadora sobre ellos con suma facilidad á poca altura del suelo, lo que permitirá hacer la referencia á cada extremo de sección y á los de la base con mucha precisión.

apreciación segun las condiciones de los aparatos disponibles y los recursos tratándose de un plano numérico, como ha de serlo la triangulación, porque si el objeto inmediato es conseguir un gráfico en determinada escala puede ser despues necesario hacerle en otra mayor en todo ó en parte y en el estado de *incertidumbres tolerables*, que, copiándole de Salmoiraghi, insertamos en el número 11, hicimos constar las muy diferentes que, segun la escala, corresponden para la misma distancia en la medición de esta y de los ángulos: en todo caso *si se apela á este medio* se ha de fijar la tolerancia con referencia á la escala mayor, que se pueda considerar necesaria reduciendo el error numérico gráfico á los límites que sirvieron á Salmoiraghi para calcular el estado referido y en este caso allí se encuentran las tolerancias admisibles para cada distancia, aunque deben tomarse en el concepto de *errores medios posibles* en la medición de las bases y no como límites de las diferencias entre las distintas mediciones, que no sería fácil, ni necesario conseguir.

Manera de relacionar las bases á los lados de la triangulación.

Varía con las condiciones de la base y de la red triangular proyectada, pero como tipos de procedimiento se pueden fijar dos que sirvan de norma en los casos generales.

Cuando la base es grande relativamente al lado del triángulo normal puede utilizarse lo que se llama *amplificación por rombo* y cuando aquella es pequeña la *amplificación por cadena* y es consiguiente que las condiciones de cada caso harán variar las de estos procedimientos típicos.

El *primero* consiste en lo siguiente:

Sea I-II figura 115, un lado del triángulo normal y *A B* la base medida, desde cuyos extremos no se ven los vértices I y II; elegidos los auxiliares *C* y *D* desde los que se ven en buenas

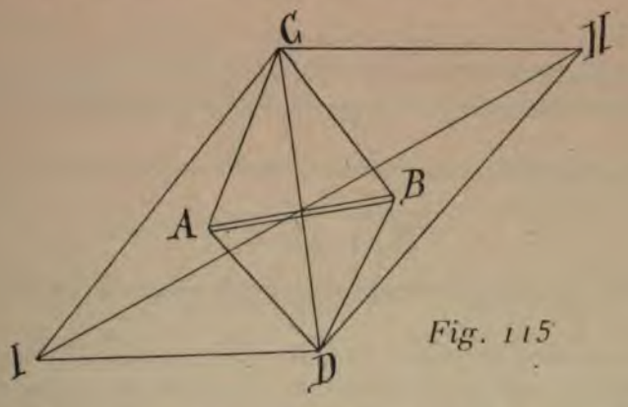


Fig. 115

condiciones aquellos, los *A* y *B* y entre sí, haciendo estación en los seis vértices se medirán los ángulos indicados en la figura y en las estaciones I y II los de la triangulación allí concurrentes para no tener que repetirlas y con tales datos se resolverán sucesivamente los triángulos *A B C*, *A B D*, *D B C* y *A C D* comprobando con los dos valores obtenidos para *C D* y resolviendo con este lado y los ángulos correspondientes los triángulos *C D I* y *C D II* y despues los *ICII* y *IDII* se tendrán tambien dos valores del lado I-II comprobando, cuyo lado servirá de base á los triángulos normales adyacentes.

Para descender de un lado cualquiera de la triangulación á la base de comprobación se puede seguir el mismo procedimiento comparando los valores deducidos para aquel por el cálculo de los triángulos de la red correspondiente y ascendiendo de la base de comprobación ó bien haciéndolo con la longitnd de esta obtenida por medición directa y la deducida de la resolución de los triángulos formados para descender á ella desde el lado del último normal sin mas diferencia que cambiar el órden de la resolución de aquellos; es decir sucesivamente *I C II*, *I D II*, *I D C* y *II D C* consiguiendo con los dos valores de *C D* una comprobación de los cálculos; despues los *C D B* y *C D A* y *A C B* y *A D B* obteniendo dos valores para *A B* que compro-

barán tambien los cálculos y comparando su media con la de los valores obtenidos por la medición directa se tendrá la comprobación buscada.

El error de cierre ó sea la diferencia entre la longitud deducida y la obtenida por medición es función de los en esta cometidos y los consiguientes á los propios de la base de partida, de los errores de los ángulos de los triángulos que forman la cadena que une las dos bases y los de los cálculos y por consiguiente para determinar el error relativo se ha de comparar el de cierre con la poligonal mínima formada por los lados de los triángulos integrantes de los que en forma de cadena relacionan las dos bases.

Este procedimiento ademas de su sencillez tiene la ventaja de ofrecer las indicadas comprobaciones de los cálculos y las que en los triángulos y cuadriláteros tienen los ángulos, de manera que dá mucha seguridad y sencillos medios de corrección.

El *segundo* consiste en lo siguiente:

Si desde una pequeña base *A B*, figura 116, queremos ascender al lado I-II mucho mayor (1), por medio de los triángulos *A B C*, *A C D*, *I A D* y *I C D* determinarémos, como en el caso anterior, dos valores de *I D* y con su media y los ángulos correspondientes se resolverán los

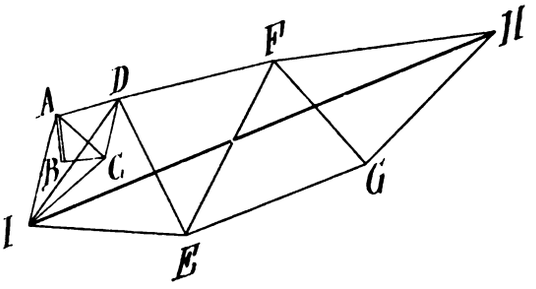


Fig. 116

triángulos *I E D*, *E D F*, *F E G* y *F G II* y mediante los azimutes y valores de los lados *I D*, *D F*, *F II* se determinarán las coordenadas planimétricas de *II* con relación á *I* y con los de los lados *I E*, *E G* y *G II* se determinarán las mismas coordenadas comprobando la situación de II con relación I.

Si la diferencia es tolerable, con el término medio de los valores respectivos de X é Y y por la fórmula

$$D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

se calcula la distancia I-II que sirve de base para la resolución de los triángulos correspondientes.

Este es el procedimiento que utilizó Villani en la triangulación explicada por Salmoiraghi en su excelente libro *Les Cleps* consiguiendo con una base de 221'50 metros el lado I-II de 878'48 metros con la incertidumbre de 0'012 por 1000.

Si se cuida de elegir los vértices de la red triangular en cadena de manera que formen cuadriláteros, cuyos vértices respectivos sean visibles desde cada uno, midiendo los ángulos que con los lados forman las diagonales se podrá medir dos veces un mismo lado comprobándose y así mismo se hará mejor de los ángulos por las propiedades de esta clase de polígonos y se procederá con mas seguridad.

Como tiene mucha influencia en las buenas condiciones de una triangulación los medios que se utilicen para la amplificación de la base y la consignación de los datos y resultados en registros apropiados, creémos oportuno dar á conocer lo mas brevemente que nos sea posible los utilizados por la antes citada Comisión del Cuerpo de Estado Mayor en la triangulación de Jaca.

La figura 117, representa en la escala de $^1/_{100000}$ el primer polígono con la base, *A B*, de partida y triángulos auxiliares para la amplificación.

---

(1) Copiamos la figura de la consignada por Salmoiraghi en la lámina 1.ª de su libro «Les Cleps» para explicar la triangulación de Villani, á que hemos hecho referencia.

Con la longitud, 1445'58 metros, medida de aquella y los tres ángulos de cada triángulo, mediante la resolución de los de números I, II y III se calculó el valor del lado *O I*, que tomado como base del triángulo IV se comprobó con el valor para él deducido en el triángulo X despues de la sucesiva resolución de los V, VI, VII, VIII y IX, resultando una diferencia en los valores logarítmicos de o'oooo651, que se corrigió segun las reglas establecidas, de que despues nos ocuparémos.

Para que sirva de norma copiamos en la página siguiente el estado registro de la resolución de los triángulos auxiliares utilizados para la amplificación de la base aplazando para des-

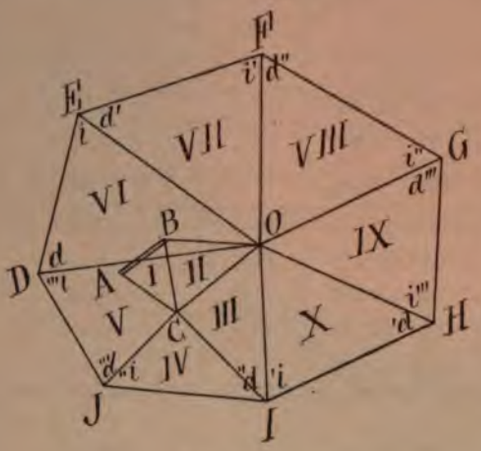


Fig. 117

pues la explicación del sistema de comprobación y corrección de ángulos y solo advirtiendo ahora que, como el valor de los lados de cada triángulo se obtuvo mediante las sencillas y conocidas fórmulas

$$a = \frac{c}{\text{Sen. } C} \times \text{Sen. } A\,;\quad b = \frac{c}{\text{Sen. } C} \times \text{Sen. } B$$

ó

$$\text{Log. } a = \text{Log. } c - \text{Log. Sen. } C + \text{Log. Sen. } A$$
$$\text{Log. } b = \text{» } \quad \text{» } \quad + \text{Log. Sen. } B$$

colocando en la linea de *A B*, *base*, el logaritmo de su longitud en la casilla de los lados, que es el *c* de la fórmula precedente, y en la de los senos de los ángulos el complemento del logaritmo del ángulo opuesto, *C*, y en esta misma casilla en la línea de los ángulos en *B* y en *A* respectivamente la diferencia de sus logaritmos á 10, sumando el complemento logarítmico de Sen. *C* con el Log. Sen. *B* se escribe sobre la línea superior el resultado, que es el valor de Log. Sen. *B* — Log. Sen. *C* y haciendo lo propio con el Log. Sen. *A* se escribe la suma debajo de la línea inferior y sumando respectivamente cada una de estas sumas con el Log. *A B* se obtiene, con la 1.ª el Log. *A C* y con la 2.ª el Log. *B C*, que se escriben en la respectiva línea en la casilla de los Log. de los lados y de ellos se deducen los valores de estos, que se escriben en la casilla siguiente; disposición muy conveniente para facilitar los cálculos.

En los triángulos sucesivos se pone siempre en medio el lado conocido, que en él sirve de base y cuyo valor y logaritmo se copia del triángulo anterior ó del que se dedujo el que se acepta.

Con esta explicación no dará lugar á duda alguna la inteligencia de los datos y resultados consignados en el estado siguiente; debemos sin embargo advertir que los valores que representamos con cifras mas gruesas se escriben con tinta roja para llamar sobre ellos la atención.

TRIÀNGULOS AUXILIARES DE PARTIDA

CÁLCULO DE SUS LADOS

MEDIDA DE LA BASE $A\,B = 1445.58$ m.

Triángulos	Vértices	ANGULOS Observados	ANGULOS Corregidos	Lados	LOGARITMOS De los senos con su signo correspondiente	LOGARITMOS De los lados	Valor de los lados
1	2	3	4	5	6	7	8
					o'1357648		
	B	69° 22' 5"	**69° 22' 3"**	*C A*	$\bar{1}$'9712108	3'2958069	**1976'09**
I	*C*	43° 12' 20"	**43° 12' 19"**	*B A*	o'1645540	**3'1600421**	**1445'58**
	A	67° 25' 40"	**67° 25' 38"**	*B C*	1'9653864	3'2899825	**1949'77**
		180° o' 5"	**180° 0' 0"**		o'1299404		
					o'1981664		
	B	80° 40' 5"	**80° 39' 53"**	*O C*	$\bar{1}$'9942097	3'4881489	**3077'15**
II	*O*	38° 42' 10"	**38° 41' 58"**	*B C*	o'2039567	3'2899825	**1949'77**
	C	60° 38' 20"	**60° 38' 9"**	*B O*	1'9402777	3'4342169	**2717'79**
		180° o' 35"	**180° 0' 0"**		o'1442344		
					o'0535225		
	O	50° 39' 0"	**50° 38' 53"**	*I C*	1'8883287	3'5416714	**3480'74**
III	*I*	43° 7' 40"	**43° 7' 34"**	*O C*	o'1651938	3'4881489	**3077'15**
	C	86° 13' 40"	**86° 13' 33"**	*O I*	$\bar{1}$'9990571	3'6523998	**4491'59**
		180° o' 20"	**180° 0' 0"**		o'1642509		

95 — Medición de los ángulos.—Precisión necesaria.—Manera de conseguirla haciendo estación en el vértice y fuera de él (1).

Si los ángulos de los triángulos integrantes de una red no se midieran con suficiente precisión para que los errores cometidos en la base se multipliquen lo menos posible en los demas lados al deducirlos por el cálculo y evitar que se cometan en estos otros intolerables consiguientemente á los de los ángulos, serían vanas todas las precauciones que tomáramos para conseguir la longitud de aquella con la mayor exactitud y la forma mas apropiada de los triángulos porque, como ya digimos en el número 92, aunque la base fuera completamente exacta, el error absoluto que en los lados se comete consiguientemente al de los ángulos es, con referencia á la figura 112,

en los triángulos isósceles acutángulos $D\,B'' = \Delta\,c = c$ Sen. $e\,\frac{B\,M}{A\,M}$ (1.ª)

en los id. id. rectángulos $D\,B'' = \Delta\,c = c$ Sen. e (2.ª)

por ser $\frac{B\,M}{A\,M} = 1$

en los id. id. obtusángulos $B_1'\,D_1 = \Delta\,c' = c'$ Sen. $e'\,\frac{A\,M}{B_1'\,M}$ (3.ª)

(1) Aunque en la práctica sea mas conveniente determinar la *orientación verdadera de la base* antes de medir los ángulos al objeto de determinar directamente el azimut de los lados de todos los triángulos, hemos considerado mas oportuno aplazar la explicación de la manera de conseguir aquella para cuando tratemos de la correspondiente al cálculo de las *coordenadas de los vértices de la triangulación.*

no está justificada la preferencia que hoy se dá al *procedimiento de reiteración*, que ademas resulta mas molesto que el de la *repetición*.

El número de mediciones de cada ángulo necesarias para conseguir su valor con la apetecible precisión, varía naturalmente con las condiciones del goniómetro utilizado, estado de corrección en que se halle y delicadeza é inteligencia con que se maneje; la diferencia en los resultados que se vayan consiguiendo con repetición hará ver las que en cada caso se necesiten, pero para dar ideas claras sobre este particular creémos oportuno consignar la opinión de algunas personas y entidades respetables.

El ilustre Ingeniero Orlandi, razonando con la claridad y buen juicio que campea en su excelente *Corso pratico* tantas veces citado, dice (páginas 258 y siguientes):

«Con instrumentos tales como el taquímetro y Clepe gran modelo, haciendo uso de los dos microscopios se puede admitir que la aproximación en la *lectura* no es inferior á $0'005^c$. En cuanto al *error de puntería*, depende de la amplificación del anteojo y suponiéndola de 20 diámetros sería de $\frac{120''}{20} = 6'' = 0'001852^c$; de donde resulta que con *observación sencilla* por estos dos conceptos se puede cometer un error de

$$\varepsilon = \sqrt{0'005^2 + 0'001852^2} = 0'00533^c$$

Debemos hacer notar que si se utilizan los cinco hilos de cada microscopio, con la media se conseguirá menor error en la lectura y que el de puntería es siempre menor que el supuesto, como ya hemos demostrado; por consiguiente que el antes deducido para la observación sencilla le consideramos exagerado para el Clepe gran modelo; pero continuémos el razonamiento del ilustre Orlandi, porque puede servir de norma para resolver en cada caso el problema de que se trata.

»Para una observación completa, que comprende dos punterías con las posiciones directa é inversa del anteojo, el error medio se reducirá á

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = 0'00377^c$$

»Haciéndose *n reiteraciones* (1), el error medio de la media sería

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{n}} = \frac{0'00377^c}{\sqrt{n}}$$

»Ahora bien, si se tiene en cuenta que para cada ángulo se han de medir dos direcciones en cada una de las que se puede cometer un error ε_m, se tendrá en definitiva el error medio ε'_m, que podrá afectar al valor del ángulo y será

$$\varepsilon'_m = \varepsilon_m \sqrt{2}$$

ó sea

$$\varepsilon'_m = \frac{0'00533^c}{\sqrt{n}}$$

»Suponiendo en esta expresión $n = 2 \ldots 3 \ldots 4 \ldots 8$ tendrémos para

los valores de $n =$	2...	3...	4...	5...	6...	7...	8
los de ε'_m	37'7"	30'7"	26'5"	23'7"	21'7"	20'0"	18'7"

(1) Debemos recordar que en el procedimiento de *repetición* no se acumulan los errores de lectura, que son los mayores, como en el de *reiteración* y á este se refiere el razonamiento con la agravante de ser evidentemente exagerado el error de puntería.

»Como en los números 87 y 88 ha demostrado que cuando se quiera conseguir la aproximación de $^1/_{20000}$ el error angular no debe pasar de 0'00185^c en los triángulos de 1.er órden, ni de 0'0031^c en los de 2.° y 3.° resulta que, aunque se quiera tener la aproximación de $^1/_{30000}$, no se necesitarán mas de 8 reiteraciones en los triángulos de 1.er órden y 3 en los de 2.° y 3.°».

En el artículo 24 de sus Instrucciones topográficas de 1878 el Instituto Geográfico y Estadístico de España, ordena que se midan los ángulos con teodolitos de Brunner de apreciación teórica de 10" perfectamente comprobados y corregidos, dos veces con la posición directa é inversa del anteojo, por reiteración (1).

La Instrucción I dictada en 15 de Abril de 1889 por la Dirección General del nuevo Catastro italiano, previene en el párrafo 17, que con teodolitos ó taquímetros de limbos al menos de 13 centímetros y apreciación de 10" se hagan cuatro mediciones de cada ángulo, dos con el anteojo en posición directa y otras dos con la inversa.

Leyendo en cada una con los dos nónius ó microscopios casi siempre se conseguirá mayor precisión que la antes considerada necesaria; pero como cuanto mas se consiga será mejor, se procederá con mayor seguridad y cuesta poco tiempo hacer estas cuatro mediciones, *aconsejamos que se acepte este número tomando para valor del ángulo la media de los obtenidos por observación directa é inversa, como se indica en los modelos siguientes.*

Es muy importante tener preparados *registros apropiados,* en que se anoten de una manera clara y segura los datos de observación, la prueba de sus buenas condiciones y los resultados inmediatos y por lo mismo no consideramos superfluo ocuparnos aquí de la forma de tales registros para cada uno de los procedimientos de repetición y reiteración teniendo en cuenta que en ambos se han de hacer constar el *azimut* verdadero ó supuesto de cada dirección y el *ángulo* que forman cada dos sucesivas de las concurrentes en la estación, que serán datos esenciales para la compensación de los errores, para la resolución trigonométrica de los triángulos de la red y para el cálculo consiguiente de la situación relativa de sus vértices.

Cuando se utilizaba el *procedimiento de repetición,* que ahora está sin razón casi completamente abandonado, se concretaba á determinar como graduaciones de partida y final la media de las señaladas por los nónius reducidas á los grados del 1.° y su diferencia se dividía por el número de repeticiones, consignándose los datos en cuaderno auxiliar y solo el número de repeticiones, su valor total y el valor medio del ángulo en el estado. Difícil es consignar todos los datos y resultados en forma de estado, pero creémos que puede hacerse su combinación en la forma de la página siguiente.

Para el procedimiento de *reiteración* se utilizan distintos modelos de registro, comprendiendo en unos los ángulos azimutales y zenitales y en otros solo los primeros y separadamente los segundos, que unas veces se anotan en estados apropiados, como lo hace el Instituto Geográfico y Estadístico de España en su formulario número 7 y otras se prescinde de ellos ó se toman las notas necesarias en relaciones independientes, como se observa en la Instrucción I del Catastro general italiano y en el excelente *Corso pratico* de Orlandi por concretarse á la determinación planimétrica de los vértices.

Para que sirvan de norma creémos oportuno copiar en las pág. 340 y 341 el *modelo de la primera clase* utilizado por la ilustrada Comisión de E. M. en el plano de Jaca con los datos correspondientes á los ángulos del triángulo A B C de la figura 117 y los concurrentes en el vértice O; debiendo advertir que se midieron con un buen teodolito Trougthon de apreciación teórica de 10" y en la pág. 342 *el de la segunda clase,* que consigna el Ingeniero Orlandi en las pág. 262-263 de su repetido libro, cuyos datos se tomaron sin duda con un taquímetro gran modelo.

Si en cuenta se tiene que cada ángulo *azimutal* se consigue restando las dos direcciones inversas concurrentes en el vértice y el *zenital* de cada dirección restando de 90° el ángulo de ascensión ó sumando el de depresión, no exige el modelo utilizado por la Comisión de Estado

(1) En la triangulación de Jaca y altos valles de los ríos Aragón y Gállego, se atuvieron á estas Instrucciones consiguiendo excelentes resultados.

MODELO DE REPETICIÓN DE LOS ÁNGULOS

Día 21 de Septiembre de 1894.—Ligeramente nublado

ESTACIÓN A *(Extremo occidental de la base de partida)* i = 1'65

ÁNGULO B A C (1)

	Nónius	GRADUACIONES Inicial	Final	Diferencias	Número de repeticiones = s
Observación directa	1.° ó A	0'000c	149'839	149'839	2
	2.° ó B	200'005	349'842	149'842	2
	Sumas.			299'681	4
	1.er valor de B A C.			74'9227c	»
Observación inversa	1.° ó A	349'850	200'004	149'846	2
	2.° ó B	149'840	399'995	149'845	2
	Sumas.			299'691	4
	2.° valor de B A C			74'9227c	
	1.° id. de id.			74'9202c	
	Suma.			149'8429	
	Valor medio de B A C.			74'9214c	

Azimut de A B. . . . . .

Id. de A C. . . . . .

			1.°	2.°	3.°	4.°	Medios
Zenitales de	A B	I.	99'364	'36	'35	'355	99'357
		II	'358	'36	'36	'35	
	A C	I.	98'163	'16	'158	'165	98'163
		II	'170	'17	'16	'16	

Alturas de { B = 3 metros ; i — m = — 1'35 metros
C = 2'5 id. ; i — m = 0'85 id.

(1) Este es el primero del triángulo I de la figura 117, que, como los datos fundamentales, hemos tomado de la excelente triangulación de Jaca á que hemos hecho referencia.

Los nónius 1.° y 2.° están ordinariamente señalados en los aparatos modernos con las letras A y B y con I y II los del limbo vertical, que dan las alturas zenitales.

Conocido el azimut de A B, v. gr., y el ángulo B A C, su suma dá directamente el de la dirección A C.

Destinando una página del registro para cada uno de los ángulos y las alturas zenitales de sus lados se conservan todos los datos é inmediatos resultados con completa claridad.

Mayor ninguna explicación; *es claro, sencillo y completo* en el concepto de comprender los ángulos azimutales y verticales; pero no en el de la aplicación de la regla de Bessel ó de observar con el anteojo invertido y de cambiar la graduación inicial; de manera que en la misma se repite la medición de cada ángulo en las dos vueltas de horizonte con la sola diferencia de hacer girar la alidada en contrario sentido y por consiguiente si en la referida triangulación dió buenos resultados á causa de las muchas precauciones con que se hicieron las lecturas y la inteligencia de los observadores, no es de aconsejar que se omitan las expresadas condiciones (1).

El modelo 2.°, copiado del *Corso pratico* de Orlandi, es incompleto, porque no comprende los ángulos zenitales; pero en cambio con la aplicación de la regla de Bessel y las cuatro vueltas de horizonte con distinta graduación inicial, lo que contando con la observación de los dos nónius dá de cada dirección 16 medidas, y con el cálculo del arco de reiteración que hace, ha de dar lugar á una grande precisión, innecesaria en las triangulaciones topográficas, en las que bastarían dos vueltas de horizonte; pero esto tiene el inconveniente de no medir cada dirección en las diferentes regiones del limbo para compensar los errores de su falta de construcción, que es el objeto que se propone con el cambio de graduación inicial en las distintas vueltas de horizonte, si bien es de advertir que en los buenos aparatos cuidadosamente corregidos tales errores ó no existen ó son despreciables.

En el caso de concretarse á las dos vueltas de horizonte ó *stratos*, como las llaman los Ingenieros italianos, en el espacio del 3.° y 4.° se podrían consignar los datos correspondientes á los ángulos zenitales de las direcciones completando en tal concepto el modelo de Orlandi.

Este de todos modos exige algunas aclaraciones, que consignarémos en vista de las que hace tan ilustrado Ingeniero, porque penetrándose bien de sus condiciones no será difícil á cada uno arreglar el modelo que mas le convenga.

Las iniciales d é i consignadas en la casilla 2 indican la posición *directa* é *inversa* del anteojo y en su línea correspondiente se escriben las graduaciones señaladas en cada nónius, su media y la media de la dirección; pero solo en las 3.ª y 7.ª los grados, que con la diferencia de 200^{c} se observarán en los dos nónius en la posición directa é inversa del anteojo.

La graduación inicial, 3'900^{c}, de la 1.ª vuelta de horizonte no debe ser la que corresponda á la dirección de la aguja magnética, como aconseja Orlandi siguiendo á otros Ingenieros, sino la del azimut verdadero ó supuesto de la visual y cuando se estacione en el extremo opuesto de ella el *inverso*, con lo que, no solo se evitan los cálculos de reducción, como ya digimos (número 68), sino que dá inmediatas comprobaciones, porque es claro que si partiendo de OD (figura 117), por ejemplo, tenemos para OG un azimut y al estacionar en G, partiendo de GF, encontramos para GO el inverso exacto, quedarán comprobadas las observaciones intermedias y si en su comparación hallamos una notable diferencia conocerémos que se han cometido errores ó equivocaciones y próximamente el lugar donde hayan ocurrido y esto es muy importante.

Los resultados de observación á cada punto se consignarán en cada vuelta de horizonte en la línea designada *d* en la casilla 2 y se dará la vuelta entera, es decir que se visarán todos los puntos observables terminando en el primero para ver si el aparato ha sufrido ó no algun movimiento, para repetir las observaciones si le hubiere habido ó resultara en la graduación señalada por los nónius una diferencia intolerable comparada con la antes leída.

Si así no sucede, se invierte el anteojo y haciendo girar la alidada se dirige la visual al punto de partida leyéndose y anotándose las graduaciones señaladas por los nónius ó microscopios, *que deberán ser las inversas* de las antes leídas, si el aparato está bien corregido y no se ha cometido error en la lectura, y como en los grados no habría mas diferencia que la de 200^{c} correspondiente á la inversión del anteojo y consiguiente movimiento de la alidada, no se ano-

(1) Debemos hacer constar que esto lo sabían perfectamente y así nos lo advirtió el ilustradísimo hoy Coronel D. Francisco Gómez Jordana al remitir tales datos, pero tuvieron que proceder como lo hicieron para sujetarse á las instrucciones recibidas.

PRIMER MODELO D ■

ÁNGULOS OBSERVADOS

Día 21 de Septiembre de 1894 (1) Estación *A* (Extremo

PRIMERA VUELTA

Puntos vistos	LIMBO AZIMUTAL 1.er nónius	LIMBO AZIMUTAL 2.° nónius	LIMBO ZENITAL Elevación	LIMBO ZENITAL Depresión
J	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	6° 34′ 50″	»
C	296° 48′ 20″	116° 48′ 20″	1° 57′ 10″	»
B	229° 22′ 40″	49° 22′ 40″	0° 34′ 20″	»
J	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	6° 34′ 50″	»

Día 22 de Septiembre de 1894

O	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	2° 4′ 50″	»
A	150° 2′ 0″	330° 2′ 20″	»	0° 28′ 20″
C	80° 40′ 0″	260° 40′ 0″	1° 37′ 20″	»
O	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	2° 4′ 50″	»

Día 21 de Septiembre de 1894

O	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	0° 48′ 0″	»
B	299° 21′ 40″	119° 21′ 40″	»	1° 37′ 40″
A	256° 9′ 20″	76° 9′ 20″	»	2° 0′ 0″
I	86° 13′ 40″	266° 13′ 40″	14° 30′ 0″	»
O	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	0° 48′ 20″	»

Día 16 de Agosto de 1894

G	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	0° 38′ 0″	»
F	295° 29′ 20″	115° 29′ 20″	6° 53′ 20″	»
E	239° 46′ 20″	59° 46′ 20″	4° 0′ 40″	»
B	202° 12′ 40″	22° 12′ 20″	»	2° 6′ 40″
D	196° 47′ 0″	16° 47′ 20″	»	0° 53′ 10″
C	163° 30′ 20″	343° 30′ 20″	»	0° 51′ 20″
J	163° 40′ 0″	343° 40′ 20″	2° 12′ 0″	»
I	112° 51′ 20″	292° 51′ 20″	10° 46′ 30″	»
H	48° 19′ 0″	228° 19′ 0″	3° 24′ 40″	»
G	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	0° 38′ 0″	»

SEGUNDA VUELTA

Puntos vistos	LIMBO AZIMUTAL 1.er nónius	LIMBO AZIMUTAL 2.° nónius	LIMBO ZENITAL Elevación	LIMBO ZENITAL Depresión
J	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	6° 34′ 50″	»
B	229° 22′ 40″	49° 22′ 40″	0° 34′ 20″	»
C	296° 48′ 20″	116° 48′ 20″	1° 57′ 10″	»
J	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	6° 34′ 50″	»

Estación *B* (Extremo

O	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	2° 4′ 50″	»
C	80° 40′ 0″	260° 40′ 20″	1° 37′ 20″	»
A	150° 2′ 0″	330° 2′ 20″	»	0° 28′ 20″
O	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	2° 4′ 50″	»

Estación *C* (Polvorín

O	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	0° 48′ 0″	»
I	86° 13′ 40″	266° 13′ 40″	14° 30′ 0″	»
A	256° 9′ 20″	76° 9′ 20″	»	2° 0′ 0″
B	299° 21′ 40″	119° 21′ 40″	»	1° 37′ 40″
O	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	0° 48′ 20″	»

Estación *O* (Ermita

G	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	0° 38′ 0″	»
H	48° 19′ 0″	228° 19′ 0″	3° 24′ 40″	»
I	112° 51′ 20″	292° 51′ 20″	10° 46′ 30″	»
J	163° 40′ 0″	343° 40′ 0″	2° 12′ 0″	»
C	163° 30′ 20″	343° 30′ 20″	»	0° 51′ 20″
D	196° 47′ 0″	16° 47′ 0″	»	0° 53′ 10″
B	202° 12′ 40″	22° 12′ 20″	»	2° 6′ 40″
E	239° 46′ 40″	59° 46′ 40″	4° 0′ 40″	»
F	295° 29′ 20″	115° 29′ 20″	6° 53′ 20″	»
G	0° 0′ 0″	180° 0′ 0″	0° 38′ 0″	»

tan y sí la fracción observando si son ó no tolerables las diferencias; si lo son, se anotan en l línea de *i* y se dirige sucesivamente la visual á los demas puntos haciendo análogas lecturas anotaciones comprobando nuevamente en el punto de partida, con lo cual queda terminada l *primera vuelta de horizonte.*

El llamado *arco de reiteración* ó sea el número de grados en que se ha de variar la graduación inicial en cada una para medir cada azimut en todas las regiones del limbo, se determina dividiendo 200ᶜ por el número de reiteraciones; en el caso del modelo será 50ᶜ y por consiguiente despues de volver el anteojo á su 1.ª posición se correrá la alidada 50ᶜ justos en lo po-

(1) Las fechas indican claramente que las observaciones no se hicieron en el órden en que aparecen en los estados y no hay inconveniente en proceder así con tal que se consignen claramente en los registros borradores, especialmente en los terrenos muy accidentados, como los Altos Pirineos, pues el órden conveniente se establece en el gabinete y en el campo no siempre se pueden realizar las marchas siguiéndole estrictamente.

ÁNGULOS DEDUCIDOS

occidental de la base de partida) — Altura del instrumento 1'65

ÁNGULOS AZIMUTALES						ÁNGULOS ZENITALES				
Ángulos	PRIMERA VUELTA		SEGUNDA VUELTA		Valor del ángulo	Visuales	Primera vuelta	Segunda vuelta	Valor del ángulo	OBSERVACIONES
	1.er nónius	2.° nónius	1.er nónius	2.° nónius						
C A B	67° 25' 40"	67° 25' 40"	67° 25' 40"	67° 25' 40"	67° 25' 40"	*A C*	88° 2' 50"	88° 2' 50"	88° 2' 50"	
						A B	89° 25' 40"	89° 25' 40"	89° 25' 40"	A tres metros sobre el suelo.
oriental de la base de partida) — Altura del instrumento 1'61										
A B C	69° 22' 0"	69° 22' 20"	69° 22' 0"	69° 22' 0"	69° 22' 5"	*B C*	88° 22' 40"	88° 22' 40"	88° 22' 40"	
C B O	80° 40' 0"	80° 40' 0"	80° 40' 0"	80° 40' 20"	80° 40' 5"	*B O*	87° 55' 10"	87° 55' 10"	87° 55' 10"	A tres metros sobre el suelo.
						B A	90° 28' 20"	90° 28' 20"	90° 28' 20"	
de Santa Bárbara) — Altura del instrumento 1'57										
O C B	60° 38' 20"	60° 38' 20"	60° 38' 20"	60° 38' 20"	60° 38' 20"	*C B*	91° 37' 40"	91° 37' 40"	91° 37' 40"	
B C A	43° 12' 20"	43° 12' 20"	43° 12' 20"	43° 12' 20"	43° 12' 20"	*C A*	92° 0' 0"	92° 0' 0"	92° 0' 0"	
I C O	86° 13' 40"	86° 13' 40"	86° 13' 40"	86° 13' 40"	86° 13' 40"	*C I*	75° 30' 0"	75° 30' 0"	75° 30' 0"	
						C O	89° 11' 50"	89° 11' 50"	89° 11' 50"	
de Santa Cruz) — Altura del instrumento 1'52										
G O F	64° 30' 40"	64° 30' 40"	64° 30' 40"	64° 30' 40"	64° 30' 40"	*O F*	83° 6' 40"	83° 6' 40"	83° 6' 40"	
I O E	55° 43' 0"	55° 43' 0"	55° 42' 40"	55° 42' 40"	55° 42' 50"	*O E*	85° 59' 20"	85° 59' 20"	85° 59' 20"	
E O D	42° 59' 20"	42° 59' 0"	42° 59' 40"	42° 59' 40"	42° 59' 25"	*O D*	90° 53' 10"	90° 53' 10"	90° 53' 10"	
D O J	33° 7' 0"	33° 7' 0"	33° 7' 0"	33° 7' 0"	33° 7' 0"	*O J*	87° 48' 0"	87° 48' 0"	87° 48' 0"	
J O I	50° 48' 40"	50° 49' 0"	50° 48' 40"	50° 48' 40"	50° 48' 45"	*O I*	79° 13' 30"	79° 13' 30"	79° 13' 30"	
I O H	64° 32' 20"	64° 32' 20"	64° 32' 20"	64° 32' 20"	64° 32' 20"	*O H*	86° 35' 20"	86° 35' 20"	86° 35' 20"	
H O G	48° 19' 0"	48° 19' 0"	48° 19' 0"	48° 19' 0"	48° 19' 0"	*O G*	89° 22' 0"	89° 22' 0"	89° 22' 0"	
I O C	50° 39' 0"	50° 39' 0"	50° 39' 0"	50° 39' 0"	50° 39" 0'	*O C*	90° 51' 20"	90° 51' 20"	90° 51' 20"	
C O B	38° 42' 20"	38° 42' 0"	38° 42' 20"	38° 42' 0"	38° 42' 10"	*O B*	92° 6' 40"	92° 6' 40"	92° 6' 40"	

sible, dirigiendo la visual al primer punto y leyendo la graduación en cada nónius se anotarán en las casillas 9 y 10; se aprieta bien el limbo y visando sucesivamente todos los demas puntos y anotando las graduaciones de los nónius se llega al de partida, se invierte el anteojo y se completa la 2.ª vuelta de horizonte como se hizo en la 1.ª

Las 3.ª y 4.ª se hacen lo mismo sin otra diferencia que añadir á la graduación inicial de la 1.ª 100c y 150c respectivamente.

Se determinan despues la media de los nónius en la posición directa é inversa y la dirección media resultante para cada una en las dos, en cada vuelta de horizonte, que se escriben en las casillas 7, 12, 17 y 22 y restando las tres últimas sucesivamente de la 1.ª se obtienen los respectivos *arcos de reiteración* y con su media respectiva se reducen en cada vuelta de horizonte las graduaciones leídas á la inicial y la media de ellas será la correspondiente á cada dirección; por ejemplo: para la visual 78—80 se tiene:

Segundo modelo de reiteración de los ángulos

(43) Estación en el punto 78 (Santa María) (página 54 del registro del reconocimiento)

15 de Mayo de 1903 — por la tarde — cielo cubierto

Puntos observados: 1.°) La Contra (80); 2.°) Mezzo Campo (77); 3.°) Monte Rosso (79); 4.°)...

Puntos vistos	Posición del anteojo	1.ª VUELTA					2.ª VUELTA					3.ª VUELTA					4.ª VUELTA					ARCOS DE REITERACIÓN			LECTURAS REDUCIDAS Á LA NORMAL				
		LECTURAS				Dirección media	LECTURAS				Dirección media	LECTURAS				Dirección media	LECTURAS				Dirección media							Dirección definitiva
		Grados	NÓNIUS I	NÓNIUS II	NÓNIUS Media		Grados	NÓNIUS I	NÓNIUS II	NÓNIUS Media		Grados	NÓNIUS I	NÓNIUS II	NÓNIUS Media		Grados	NÓNIUS I	NÓNIUS II	NÓNIUS Media		1.°	2.°	3.°	1.ª vuelta	2.ª vuelta	3.ª vuelta	4.ª vuelta	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
80	*d*	3	900	895	897		53	880	890	885		103	910	920	915		153	870	860	865									
						3'900					53'884					103'910					153'867	49'984	100'010	149'967	3'900	3'8977	3'8956	3'8963	3'8974
	i		905	900	902			890	875	883			900	910	905			860	880	870									
77	*d*	64	820	810	815		114	800	810	805		164	830	820	825		214	790	800	795									
						64'815					114'800					164'828					214'785	49'985	100'013	149'970	64'8150	64'8137	64'8136	64'8143	64'8141
	i		810	820	815			790	810	795			825	820	823			770	780	775									
79	*d*	136	890	890	890		186	880	900	890		236	900	910	905		286	870	880	860									
						136'895					186'885					236'910					286'870	49'990	100'020	149'975	136'8950	136'8987	136'8956	136'8993	136'8971
	i		900	900	900			875	885	880			920	910	915			880	880	880									
																						2'959	'043	2'912					
																					Arcos medios de reitera.			10797					

graduación inicial 3'900 y la de la 2.ª vuelta 53'884 en el supuesto de ser de 50ᶜ el arco de reiteración; pero como este solo fué de 49'9863 resulta 53'8840 — 49'9863 = 3'8977 para la dirección inicial de la 2.ª vuelta de horizonte y en la misma forma se deducen para las otras y de ellas la dirección media general ó definitiva provisional, porque despues habrá tal vez que modificarla para la compensación de los triángulos.

Reducción de los ángulos al vértice ó centro de estación.

Hemos supuesto hasta ahora que los ángulos se medían haciendo estación en el vértice; pero esto no es posible en algunos casos, como sucede cuando para observarlos mejor se eligen las veletas de los campanarios, ó de los altos miradores y otros semejantes y entonces se ha de estacionar en puntos próximos desde donde se vean todos ó la mayor parte de los vértices de la vuelta de horizonte y el próximo.

Si se puede elegir un punto accesible y estacionable con el aparato, desde el que se vean todos los demas, lo mejor sería tomarle como vértice y utilizar el punto mas visible para su referencia y busca; si aquello no sucede, como ocurrirá no pocas veces, se eligen dos ó los que fueren necesarios y con los ángulos que desde ellos se midieren comprendiendo el punto inaccesible se deducirá el valor de los que en este tuvieran su vértice, en la forma que vamos á explicar siguiendo á Salmoiraghi (1), que es de las mas sencillas de cuantas conocemos.

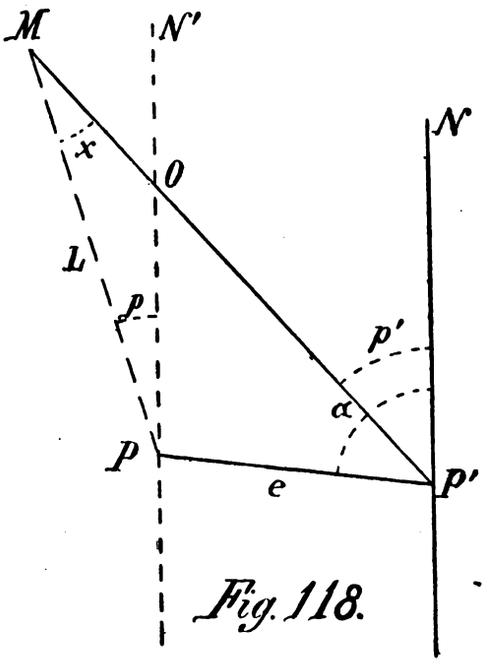


Fig. 118.

Sea P (figura 118) el vértice inaccesible y P' un punto estacionable á menos de 10 metros de él (2), desde el que se vean todos ó la mayor parte de los comprendidos en la vuelta de horizonte y sea M uno de estos.

Haciendo estación en P' medirémos con las precauciones indicadas los azimutes de los planos visuales dirigidos á los vértices de la vuelta de horizonte y al mas próximo ó los ángulos que forman cada dos sucesivos y como no serán exactamente iguales á los que formarían los concurrentes en el verdadero vértice, P, hemos de buscar la corrección que se ha de hacer á cada dirección.

A tal efecto: sea $P'N$ la del diámetro 200ᶜ — 0ᶜ del limbo, que se puede fijar arbitrariamente ó de manera que á la visual $P'M$ corresponda el azimut inverso de MP aproximadamente y PN' su paralelo en P.

Estacionando en P' podrémos medir los ángulos p' y α y la distancia $PP' = e$ y por su medio hemos de calcular el ángulo p.

Segun de la figura se deduce fácilmente, resulta:

$p' = MON' = p + x$ por ser MON' externo del triángulo MOP, y por lo tanto $p = p' - x$.

Pero del triángulo MPP' resulta, llamando L al MP,

$$\text{Sen. } x = \frac{e \text{ Sen. } (\alpha - p')}{L}$$

y como por ser x muy pequeño se puede tomar el seno por el arco

(1) Les Cleps, página 109.

(2) El art. 17 de la Instrucción topográfica del Instituto Geográfico y Estadístico de España señala muy acertadamente este límite y ordena que se mida con todo cuidado esta distancia.

$$x = \frac{e \text{ Sen. } (\alpha - p')}{L}$$

que se puede convertir en decimo-milígrados ó segundos centesimales multiplicándole por 636620 y resulta

$$x = \frac{e \text{ Sen. } (\alpha - p')}{L} \times 636620$$

La corrección, x, varía para cada dirección, porque lo hacen p' y L, en magnitud y signo, siguiendo en estos la ley de los senos y si bien se ha de cuidar de ver cual le corresponde en cada caso no puede ofrecer dificultad haciendo la resta $\alpha - p'$ de manera que siempre resulte positivo el residuo y teniendo presente el signo que corresponde al seno en cada cuadrante, como se observa en el siguiente ejemplo, que comprende varios ángulos.

Puntos	DATOS		$e = 4^m55$. $\alpha = 52^{gr}4$ cálculo de x						RESULTADOS
	p' lecturas normales	L	$\alpha - p'$	log. sen. $(\alpha - p') + 10$	log. $e \times 636620$	c. log. L $+ 10$	log. x	x décimo-milígrados	$p = p' - x$
	gr	m	gr						
1	15'7587	5760'5	36'64	9'73583	6'46189	6'23954	2'43726	+273'7	15'731
2	98'4590	12453'2	353'94	9'82087	6'46189	5'90472	2'18748	—154'0	98'474
3	177'5745	7420'6	274'83	9'96513	6'46189	6'12956	2'55658	—360'2	177'610
4	245'3227	4845'1	207'08	9'04526	6'46189	6'31470	1'82185	— 66'3	245'329
5	315'4235	5630'4	136'98	9'92219	6'46189	6'24946	2'63354	+430'0	315'380

Para evitar dudas debemos hacer constar:

1.° Que la corrección en cada azimut ó ángulo se hace al valor medio de las reiteracione

2.° Que el valor de L se calcula aproximadamente resolviendo el triángulo correspon diente antes de hacer la corrección del ángulo p', pues generalmente los pequeños errores aquella distancia cometidos no tienen influencia sensible en el valor de x.

3.° Que el valor de e se debe determinar con cuidado; pero sin exageraciones, porque p su pequeñez con relación á L no tiene influencia en el valor de x y este será tanto menor cuan to menor sea tambien aquella relación y

4.° Finalmente que por ser e muy pequeño el ángulo α se puede medir mirando por en— cima del anteojo, pues no es necesaria mayor apreciación de 5 á 6 centígrados.

Esto se corrobora con los cálculos del estado precedente, pues del valor de p' solo se res— tan los enteros de x, que se dá en décimo-milésimas de grado ó segundos centesimales y cuyo logaritmo se obtiene con la suma de los que le preceden.

96 — Comprobación de los ángulos en cada triángulo y polígono y compensación de los errores resultantes.

Para que en la resolución sucesiva de los triángulos integrantes de una red no se acumulen los errores cometidos en la base y en los ángulos, se ha de procurar por de pronto comprobar y compensar estos separadamente antes de que puedan combinarse con aquellos y los consiguientes de los lados, que en los triángulos sucesivos han de servir de base para su resolución.

Tres medios muy sencillos se utilizan al efecto:

El 1.° consiste en deducir de las mediciones precedentes los ángulos de cada triángulo y ver si su suma es igual á dos rectos.

Si así resulta, se consideran como buenos los valores obtenidos; en caso contrario, si la ferencia es tolerable se distribuye por partes iguales entre los tres ángulos; sino lo es, se ısca la causa del error y sino fuera debido á una equivocación en los cálculos precedentes, ıe permita subsanarle, habrá que repetir la medición angular, cuando se haya hecho la ımprobación en todos los triángulos.

El error será tolerable cuando sea menor que el triplo de la precisión necesaria considerada ı el número anterior, esto es, 36" ó 18" (0'011^c ó 0'0055^c), segun que se quiera conseguir la : $^1/_{10000}$ ó $^1/_{20000}$.

El 2.° medio se utiliza despues del 1.° en los casos en que, teniendo varios triángulos un :rtice comun, constituyan polígono cerrado, como los IV, V, VI... X de la figura 117, pues sabido que la suma de los ángulos en *O* debe ser igual á 360° ó 400^c.

Si esta condición se verifica con los ángulos directamente medidos ó modificados en virtud :l primer medio de comprobación, se admiten como buenos; en caso contrario, si la diferen- a es tolerable en el mismo supuesto anterior, se distribuye por partes iguales entre todos los ıgulos allí concurrentes y para que se verifique la condición antes dicha, en cada triángulo se ımpensa añadiendo ó quitando á cada uno de los otros dos ángulos la mitad de lo que se ıya restado ó sumado al concurrente en el vértice comun á todos los triángulos integrantes :l polígono que se considera.

Esta 2.ª corrección afectará á la 1.ª disminuyendo su importancia si son de signo contrario aumentándola si son de igual signo y en este caso debe observarse si la corrección excede ó) de la tolerancia prefijada.

El tercer medio sencillo y directo consiste en sumar en cada polígono cerrado los ángulos ırregidos integrantes de los de su perímetro, esto es, los señalados en la figura 117, con las tras *d* é *i*, iniciales de derecha é izquierda; pues, como es sabido, su suma debe ser igual á ntas veces dos rectos como lados tiene menos dos, ó sea, en el caso de la figura, á 10 rectos.

La diferencia resultante es lo que se llama *error de cierre angular*.

Si se compara esta diferencia con la conseguida mediante la suma de los ángulos directa- ente obtenidos con la medición y los corregidos consiguientemente á cada una de las dos co- ecciones anteriores se descubrirá probablemente si los mayores errores se han cometido en s ángulos perimetrales ó en los que tienen su vértice comun en el centro del polígono y los sultados conseguidos con las dos precedentes correcciones y este conocimiento puede tener ı algunos casos mucha trascendencia.

Para calcular la *tolerancia admisible* y la manera racional de *repartir el error resultante* re- ›rdarémos que de los triángulos integrantes del polígono resulta:

$$\frac{DO}{EO} = \frac{\text{Sen. } i}{\text{Sen. } d}$$

$$\frac{EO}{OF} = \frac{\text{Sen. } i'}{\text{Sen. } d'}$$

$$\frac{OF}{OG} = \frac{\text{Sen. } i''}{\text{Sen. } d''}$$

$$\frac{OG}{OH} = \frac{\text{Sen. } i'''}{\text{Sen. } d'''}$$

$$\frac{OH}{OI} = \frac{\text{Sen. } {}^{IV}i}{\text{Sen. } {}^{IV}d}$$

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{\text{Sen. } {}^{V}i}{\text{Sen. } {}^{V}d}$$

$$\frac{OJ}{OD} = \frac{\text{Sen. } {}^{VI}i}{\text{Sen. } {}^{VI}d}$$

Multiplicando estas igualdades se tiene:

$$\frac{OD \times OE \times OF \times OG \times OH \times OI \times OJ}{OE \times OF \times OG \times OH \times OI \times OJ \times OD} \frac{\text{Sen.}i.\ \text{Sen.}i'.\ \text{Sen.}i''.\ \text{Sen.}i'''.\ \text{Sen.}'i.\ \text{Sen.}''i.\ \text{Sen.}'''i.}{\text{Sen.}d.\ \text{Sen.}d'.\ \text{Sen.}d''.\ \text{Sen.}d'''.\ \text{Sen.}'d.\ \text{Sen.}''d.\ \text{Sen.}'''d.} = 1$$

porque en el 1.er miembro son iguales los factores del numerador y denominador y por con siguiente

$$\Sigma \text{ log. sen. } i - \Sigma \text{ log. sen. } d = 0$$

que es la *condición de cierre angular; ó sea que la suma de los logaritmos de los senos de los ángulos de la izquierda menos la de los de la derecha sea igual á cero.*

Esto no se verifica en la práctica con completa exactitud y para determinar el límite tolerable, suponiendo que los triángulos sean equiláteros y que la tolerancia en cada uno alcance $12'' = 0'0037^c$, como en las Tablas con 7 decimales, al seno de 60° á los 12″ corresponde una diferencia tabular de 146 unidades del último órden y en la ecuación de condición anterior puede suceder que el error en la suma de los senos de los ángulos *i* sea igual á $n \times 146$, siendo *n* el número de triángulos, y que suceda lo propio, pero con signo contrario, en los senos de los ángulos *d*, resulta que la *tolerancia en el error de cierre puede representarse, en el caso supuesto, por* $2n \times 146$ por ser el mayor error posible con la admitida para cada ángulo, que como ya digimos, corresponde á la precisión de $^1/_{10000}$.

Para repetir el *error de cierre determinado* se divide por 2 n; se ven los segundos que, segun el valor de cada ángulo, corresponde al cociente y el número resultante para cada uno suma á los ángulos *i* y se resta á los *d* ó al contrario, segun que el error de cierre sea negativo ó positivo; pero como esa diferencia entre la suma de los logaritmos de los senos de los ángulos *i* y la de los *d* implica otra en los dos valores del lado, que figura el primero en los numeradores y el último en los denominadores, se prefiere hacer la corrección tomando por base diferencia de sus logaritmos, como se dirá en el número siguiente con referencia á la triangulación de Jaca, que pondrémos como ejemplo práctico.

Segun digimos en el número 8, en las Instrucciones para el nuevo Catastro italiano considera *plausible* una campaña de triangulación cuando $\frac{\Sigma \Delta}{n} < 15''$; es decir, cuando medio de cada triángulo no pasa de 15″ (0'0046c) y *buena* sino llega á 20″ (0'0061c).

Estas comprobaciones y correcciones se realizan sucesivamente en los triángulos auxiliares para ascender de la base á los normales ó del órden que se considere conveniente desarrollar los que sirven para descender de ellos á las bases de comprobación y los integrantes de cada polígono; pero al comprobar, por ejemplo, el que tiene su centro en J, figura 119, la diferencia que se encontrare entre la suma de los ángulos allí concurrentes y 360° ó 400c no se reparti entre todos, sino entre los de los triángulos XIV, XV, XVI y XVIII, porque los IV y V ya fueron corregidos con referencia al polígono O y lo mismo se hará relativamente á la corrección del error angular de cierre; pues no deben comprenderse en su cálculo y repartición los ángulos de aquellos dos triángulos.

Los ángulos medidos y corregidos se anotan en los estados utilizados para la resolución de los triángulos y comprobación y corrección por el cierre de los polígonos, de que nos vamos á ocupar en el número siguiente.

97 — Resolución de los triángulos integrantes de la red.—Comprobación de cada uno los polígonos resultantes y de los componentes de porciones importantes de aquella.—Error de cierre en cada uno y su repartición.—Redes en cadena; comprobación y repartición de errores en los cuadriláteros resultantes.

La figura 119 representa en la escala de $^1/_{100000}$ cuatro polígonos y una cadena de triángulos con la base de partida y dos de comprobación de la triangulación excelentísima realizada por la Comisión del E. M. de Jaca y altos valles del Aragón y Gállego tantas veces citada, que ah

Aunque en estas fórmulas se hacen constar repetidamente el Sen. *B*, Sen. *C* y Sen. *O*, se comprende que no son iguales los ángulos indicados y sí los que teniendo aquellos vértices comunes corresponden á cada uno de los triángulos considerados.

Obsérvase en cada triángulo que para conseguir el logaritmo de un lado se resta del logaritmo del sen. del ángulo opuesto el del ángulo que lo está al lado que en cada uno sirve de base añadiendo el logaritmo de este á aquel resto; por consiguiente si se coloca en cada triángulo el complemento del log. sustraendo entre los de los senos de los otros dos ángulos y se escribe sobre ellos su suma con el superior y debajo la correspondiente del inferior, sumando cada una de estas con el logaritmo de la base, que naturalmente se escribe en la casilla correspondiente en la línea del log. del sen. de su ángulo opuesto, se tendrán los de los otros dos lados en la línea en que figuran los log. de los sen. de sus ángulos opuestos, con cuya disposición se facilitan los cálculos, se presentan claramente los datos y resultados y se evitan las equivocaciones.

Todo esto y las comprobaciones y correcciones inmediatas de los ángulos se hará mas evidente con una sencilla explicación del estado inserto en la página 334, en que aparece la resolución de los triángulos auxiliares de partida de la triangulación de Jaca.

En la casilla 1.ª se escriben los números indicativos de los triángulos en el mismo órden que se ha de seguir en su resolución.

En la casilla 5.ª escribiendo en medio la designación de la base, debajo se pone la que ha de servir de tal en el triángulo siguiente y encima el tercer lado.

En la 2.ª se escribe en la línea de cada lado la designación del ángulo opuesto y en la 3.ª su valor respectivo.

Se suman estos y si la diferencia entre su suma y 180° ó 200ᶜ es tolerable, se reparte entre ellos escribiéndose los corregidos *con tinta roja* en la casilla 4.ª

En la 6.ª se escribe en la línea de cada ángulo el log. del seno del corregido, menos en el opuesto á la base, que se sustituye por su complemento; la suma de este con el superior se anota encima de la raya superior y la de aquel con el inferior debajo de la raya inferior.

En la casilla 7.ª, en la línea de la base, se escribe *con tinta roja* el logaritmo de su longitud y sumándole con el superior á la raya de la casilla anterior se tiene el Log. del lado correspondiente que se escribe en la casilla 7.ª y lo mismo se hace con la suma de aquel con el log. que se halla por debajo de la línea inferior de la casilla anterior.

Finalmente con los Log. de la casilla 7.ª se determina el valor de cada lado del triángulo escribiéndole en la 8.ª y línea correspondiente *con tinta roja*, como todo lo deducido ó corregido sobre lo que convenga fijar la atención.

Enteramente lo mismo se hace en los triángulos siguientes, cuidando de colocar en medio en la casilla 5.ª el lado conocido, en su línea en la 2.ª la designación del ángulo opuesto y en las 7.ª y 8.ª el logaritmo y longitud antes determinados y de colocar el último el lado que ha de servir de base en el triángulo siguiente.

Como se vé, en el caso de que se trata no hay en los triángulos auxiliares mas comprobación que la de la suma de los tres ángulos de cada triángulo y su corrección correspondiente.

No sucede lo mismo en los integrantes del polígono O, cuyos datos y resultados se consignan en el estado de las páginas 350 y 351, que copiamos del recibido del inteligentísimo Topógrafo Coronel de E. M. D. Francisco Gómez Jordana; pues en él aparecen todas las comprobaciones y correcciones de que antes nos hemos ocupado, con un órden y claridad suma.

En las casillas 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, 7.ª, 8.ª y 9.ª, se consignan los datos naturales ó corregidos y los resultados obtenidos directamente en la misma forma antedicha, prescindiendo en la última de los logaritmos de los lados innecesarios para la resolución de los triángulos sucesivos.

En la 10.ª se consigna el número de unidades del 7.º órden logarítmico del seno de cada ángulo para la variación de 1″ para tener en cuenta su suma ó su media en la corrección por error de cierre obtenido en los dos valores logarítmicos de O I inicial y final del cálculo de los triángulos del polígono.

Comprobados y corregidos en la casilla 14 los ángulos con vértice comun en *O*, se modifican los valores ya antes corregidos consignados en la casilla 4.ª y modificando convenientemente los otros dos de cada triángulo para que se verifique la condición de ser su suma igual á dos rectos los nuevamente corregidos se consignan en la casilla 5.ª

Los log. de los senos de estos son los que se anotan en la casilla 8.ª y con ellos y los de la base respectiva se obtienen los de los lados, que aparecen en la casilla 9.ª consiguiendo dos valores logarítmicos para *O I*, que dan una diferencia ó *error de cierre* de 651 unidades del 7.º órden logarítmico, que, como se detalla en la casilla 14.ª, es inferior á la tolerancia de 24" en cada ángulo que se había previamente señalado y por eso se calcula inmediatamente despues la corrección angular necesaria para compensar tal error.

Aplícase tal corrección á los ángulos ya antes corregidos y consignados en la casilla 5.ª anotando los nuevos en la 6.ª y con ellos y la base respectiva se calculan los logaritmos y longitudes de los lados, que se hacen constar en las casillas 12 y 13 tambien con tinta roja.

Terminada la resolución de los triángulos del polígono *O*, se procede á realizar la de los componentes del siguiente *D*, prescindiendo de los triángulos *V* y *VI* ya resueltos en el anterior, y tomando como base de partida el lado *D J* se comprueba con *D E*, cuyos dos valores, el obtenido en el polígono *D* y el correspondiente de *O*, darán el *error de cierre*.

Así se continua hasta que en el polígono *M* se desciende á la 1.ª base de comprobación $A_1 B_1$ (1) habiendo resultado, en el caso á que nos referimos, de la

medición directa. . .	1875'87 metros
calculada	1876'08 »
Diferencia	0'21

ó sea 1'12 por 10.000 con relación á la longitud de la base.

Pero como la poligonal mas corta recorrida desde *B* á B_1 formada por los lados *B O*, *O D*, *D M*, *M P* y $P B_1$, tiene una longitud de 22.518'05 metros, resulta el error relativo, en este concepto, de 0'93 por 100.000 lo que es una soberbia comprobación de las excelentes condiciones de la triangulación realizada sin aparatos de medición de bases y con goniómetros nada excepcionales en lo mas escabroso del alto Pirineo y esto pone en evidencia cuanta influencia tiene en la consecución de los buenos trabajos topográficos la inteligencia y exquisito celo del operador.

Hasta ahora nos hemos ocupado de la *red en polígonos* y conviene decir algo de las formadas *en cadena*.

La triangulación de Jaca hecha por la Comisión de E. M. nos presenta un ejemplo notable de la combinación de las dos clases; pues se compone en conjunto de 17 polígonos y tres cadenas, que arrancan de aquellos, siguiendo una de ellas la *Canal de Berdún* y las otras dos los altos valles de los ríos Aragón y Gállego.

Nos concretarémos á la primera.

Si fuera independiente, podíase ascender de la base al lado del primer triángulo normal en la misma forma que antes se hizo continuando la observación de los datos y resolución de los triángulos hasta llegar á la base de comprobación $A_3 B_3$; pero, como no se ofrecen las mismas condiciones de comprobación y corrección angular que los reunidos en polígonos cerrados, conviene procurárselas de otra manera.

---

(1) Esto se hizo mediante la resolución de los triángulos *LVIII (N P B*, con la base *P N*), *LVII (P P, B*, con la base *P B*,) y *LVI (P, B, A*, con la base *P, B*,).

Muchas veces es mas cómodo en los descensos, cuando se miden los ángulos de los triángulos y no los azimutes de sus lados de los que aquellos se deducen, proceder en sentido inverso y la numeración de los triángulos parece indicar que así se hizo en la triangulación á que nos venimos refiriendo; en este caso la comprobación se encontraría en la comparación de los dos valores de *P N*; pero no hay inconveniente en medir los ángulos de los triángulos en este órden y resolverlos en el contrario para llevar la comprobación á la base, $A_1 B_1$ directamente medida y en este caso conviene indicarlo por la numeración correlativa de los triángulos.

CIERRE DEL POLÍGONO *O* (ERMITA DE

Triángulos	Vértices	Angulos observados	Angulos corregidos: Por el cierre del triángulo	Angulos corregidos: Por la suma de los del centro	Angulos corregidos: Definitivos	Lados	Logaritmos provisionales: De los senos con su signo correspondiente	Logaritmos provisionales: De los lados	Diferencia tabular para 1"
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	O	50° 48′ 45″	50° 48′ 33″	**50° 48′ 32″**	**50° 48′ 32″**	*J I*			
IV	*J*	49° 55′ 30″	49° 55′ 18″	49° 55′ 18″	**49° 55′ 14″**	*O I*	o‘1162449	3‘6523998	17″7
	I	79° 16′ 20″	79° 16′ 9″	79° 16′ 10″	**79° 16′ 14″**	*O J*	$\bar{1}$‘9923386	3‘7609833	4″0
		180° 0′ 35″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″		o‘1085835		
	O	33° 7′ 0″	33° 7′ 5″	**33° 7′ 4″**	**33° 7′ 4″**	*D J*			
V	*D*	67° 26′ 35″	67° 26′ 40″	67° 26′ 40″	**67° 26′ 35″**	*O J*	o‘0345593	3‘7609833	8″7
	J	79° 26′ 10″	79° 26′ 15″	79° 26′ 16″	**79° 26′ 21″**	*O D*	$\bar{1}$‘9925784	3‘7881210	3″9
		179° 59′ 45″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″		o‘0271377		
	O	42° 59′ 25″	42° 59′ 27″	**42° 59′ 25″**	**42° 59′ 25″**	*E D*			
VI	*E*	67° 21′ 15″	67° 21′ 16″	67° 21′ 17″	**67° 21′ 13″**	*O D*	o‘0348424	3‘7881210	8‘8
	D	69° 39′ 15″	69° 39′ 17″	69° 39′ 18″	**69° 39′ 22″**	*O E*	$\bar{1}$‘9720250	3‘7949884	7‘8
		179° 59′ 55″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″		o‘0068674		
	O	55° 42′ 50″	55° 42′ 48″	**55° 42′ 46″**	**55° 42′ 46″**	*F E*			
VII	*F*	71° 16′ 05″	71° 16′ 4″	71° 16′ 5″	**71° 16′ 0″**	*O E*	o‘0236357	3‘7949884	7′1
	E	53° 1′ 10″	53° 1′ 8″	53° 1′ 9″	**53° 1′ 14″**	*O F*	$\bar{1}$‘9024580	3‘7210821	15‘8
		180° 0′ 5″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″		1‘9260937		
	O	64° 30′ 40″	64° 30′ 47″	**64° 30′ 45″**	**64° 30′ 45″**	*G F*			
VIII	*G*	53° 55′ 0″	53° 55′ 7″	53° 55′ 8″	**53° 55′ 3″**	*O F*	o‘0924897	3‘7210821	15‘4
	F	61° 34′ 0″	61° 34′ 6″	61° 34′ 7″	**61° 34′ 72″**	*O G*	$\bar{1}$‘9441805	3‘7577523	11″4
		179° 59′ 40″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″		o‘0366702		
	O	48° 19′ 0″	48° 19′ 4″	**48° 19′ 2″**	**48° 19′ 2″**	*H G*			
IX	*H*	69° 53′ 20″	69° 53′ 23″	69° 53′ 24″	**69° 53′ 20″**	*O G*	o‘0273185	3‘7577523	7″7
	G	61° 47′ 30″	61° 47′ 33″	61° 47′ 34″	**61° 47′ 38″**	*O H*	$\bar{1}$‘9450961	3‘7301669	11″3
		179° 59′ 50″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″		$\bar{1}$‘9724146		
	O	64° 32′ 20″	64° 32′ 27″	**64° 32′ 26″**	**64° 32′ 26″**	*I H*			
X	*I*	65° 47′ 0″	65° 47′ 7′	65° 47′ 7″	**65° 47′ 3″**	*O H*	o‘0399982	3‘7301669	9″5
	H	49° 40′ 20″	49° 40′ 26″	49° 40′ 27″	**49° 40′ 31″**	*O I*	$\bar{1}$‘8821696	3‘6523347	17″2
		179° 59′ 40″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″	180° 0′ 0″		$\bar{1}$‘9221678		

SANTA CRUZ) Y CÁLCULO DE SUS LADOS

Logaritmos corregidos		Valor de los lados
De los senos con su signo correspondiente	De los lados	
11	12	13
0'0055775		
$\bar{1}$'8893255	3'6579773	4549'64
0'1162520	3'6523998	4491'59
$\bar{1}$'9923402	3'7609920	5767'56
0'1085922		
$\bar{1}$'7720441		
$\bar{1}$'7374804	3'5330361	3412'21
0'0345637	3 7609920	5767'56
$\bar{1}$'9925804	3'7881361	6139'54
0'0271441		
$\bar{1}$'8685502		
$\bar{1}$'8337043	3'6566863	4536'14
0'0348459	3'7881361	6139'54
$\bar{1}$'9720281	3'7950101	6237'49
0'0068740		
$\bar{1}$'9407370		
$\bar{1}$'9170978	3'7357471	5441'86
0'0236392	3'7950101	6237'49
$\bar{1}$'9024659	3'7211152	5261'57
$\bar{1}$'9261051		
0'0480308		
$\bar{1}$'9555334	3'7691460	5876'87
0'0924974	3'7211152	5261'57
$\bar{1}$'9441862	3'7577988	5725'31
0'0366836		
$\bar{1}$'9005481		
$\bar{1}$'8732265	3'6583469	4553'52
0'0273216	3'7577988	5725'31
$\bar{1}$'9451006	3'7302210	5373'05
$\bar{1}$'9724222		
$\bar{1}$'9956367		
$\bar{1}$'9556347	3'7258577	5319'34
0'0400020	3'7302210	5373'05
$\bar{1}$'8821768	3'6523998	4491'59
$\bar{1}$'9221788		

COMPENSACIONES

14

Angulos en el centro

Observados			Corregidos		
50°	48′	33″	50°	48′	32
33°	7′	5″	33°	7′	4
42°	59′	27″	42°	59′	2[illegible]
55°	42′	48″	55°	42′	4[illegible]
64°	30′	47″	64°	30′	4[illegible]
48°	19′	4″	48°	19′	2
64°	32′	27″	64°	32′	2[illegible]
360°	0′	11″	360°	0′	[illegible]

Corrección = — 11″

4 ángulos á 2″ =
3 ángulos á 1″ =
Suma =

Tolerancia

0'0000292 × 14 = 0'0004088
log. O I (Dato) = 3'6523998
log. O I (Calculado) = 3'6523347
Diferencia = 0'0000651
Σ Δ de los logs. de los senos = $\bar{1}$'9999349
Suma = 0'0000000

Corrección angular

Σ Δ por 1″ = 146'9

651 : 146'9 = 4'43 4'43 × 7 = 31″'c

Se aumentan los ángulos de la derecha y se disminuyen los de la izquierda

3 ángulos en 5″ = 15″
4 ángulos en 4″ = 16″
Total 31″

En primer lugar se observará que cada dos triángulos sucesivos forman un cuadrilátero y si se eligen los vértices de manera que desde cada uno se vean los otros tres, se podrán medir los ángulos que con los lados adyacentes formen las diagonales, esto es, los 8 que numerados correlativamente aparecen en la figura 120 y cuya suma será igual á cuatro rectos y á dos cada una de los cuatro comprendidos en cada uno de los triángulos *A B C* y *A C D* formados por la diagonal *A C*, así como de los *A B D* y *D B C* formados por la diagonal *D B* y suponiendo que la medida de cada uno de estos ángulos tenga el mismo *peso*, esto es, *que todos tengan iguales condiciones de precisión*, LA COMPENSACIÓN DE LOS ERRORES SE CONSEGUIRÁ: *corrigiendo primero cada uno de los ángulos del primer par en la cuarta parte de la diferencia de su suma á 180° ó 200ᶜ y haciéndolo igualmente despues con los antes corregidos combinados segun el segundo par de triángulos*, por cuyo medio, sino se llega á la completa compensación, se acercará mucho á ella, quedando de todos modos bien comprobada la medición de los ángulos.

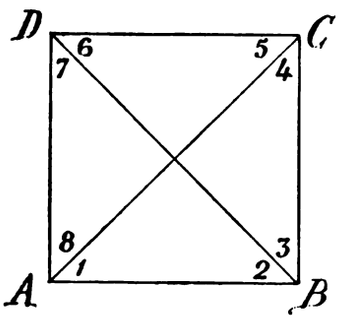


Fig. 120

Para que mejor se comprendan las precedentes indicaciones, copiamos del ilustre Salmoiraghi (1) el siguiente ejemplo práctico añadiendo la indicación de la diferencia entre el valor que se acepta para cada ángulo y el obtenido por la medición, á fin de poderlas tener en cuenta en las sucesivas correcciones.

	1.ª comparación. Par *DCB, BAD*			2.ª comparación. Par *CBA, ADC*		Corrección resultante en los valores medios medidos
ANGULOS	Valores deducidos de las reiteraciones	Valores corregidos	ANGULOS	Valores corregidos por la 1.ª comparación	Valores definitivos	
1	50'0015	49'9948	3	49'9953	49'9941	— 0'0079
2	50'0250	50'0183	4	49'9915	49'9903	— 0'0079
3	50'0020	49'9953	5	49'9965	49'9953	— 0'0027
4	49'9982	49'9915	6	50'0215	50'0203	— 0'0027
Σ	200'0267	199'9999		200'0048	200'0000	
E	+ 0267			+ 0048		
corr.	— 0067			— 0012		
5	49'9980	49'9965	7	49'9985	49'9997	— 0'0003
6	50'0230	50'0215	8	49'9835	49'9847	— 0'0003
7	50'0000	49'9985	1	49'9948	49'9960	— 0'0055
8	49'9850	49'9835	2	50'0183	50'0195	— 0'0055
Σ	200'0060	200'0000		199'9951	199'9999	— 0'0328
E	+ 0060			— 0049		
corr.	— 0015			+ 0012		

Ademas, si suponemos conocido el valor de *A B* por la amplificación de la base, con él y los de los ángulos corregidos se calculará el valor del lado *B C* por el triángulo *A B C* y el de

(1) «Les Cleps»... pág. 108.

A D por el *A B D* y con el primero el de *D C* en el triángulo *D B C* y el mismo por el *A L* cuyos dos valores nos darán otra importante comprobación.

Si la diferencia es tolerable se acepta la media de los dos valores como el propio de *D C* con él como base se resuelve el cuadrilátero siguiente y así se continua de uno á otro hasta llegar á la base de comprobación.

Aunque rara vez será necesario por la insignificancia de la modificación, pueden corregirse los ángulos modificando los opuestos 3 y 8 en lo necesario para que el valor de *D C* en ambos triángulos resulte igual á la media admitida, y para que en cada uno la suma de sus tres ángulos sea 180° ó 200ᶜ se corregirán los otros ángulos por mitad y en sentido contrario, todo lo que es fácil mediante los logaritmos de los senos respectivos y teniendo en cuenta el valor que en cada uno corresponde á 1" ó á 1ᶜᶜ.

Si en la comprobación de la base de este género resultara alguna diferencia tolerable podrá compensarse en la misma forma distribuyendo el error por partes iguales entre todos los lados que sirvieran de base en los sucesivos cuadriláteros.

Consignamos estas indicaciones como medios de ilustración solamente, porque procediendo con cuidado será innecesaria su aplicación en las triangulaciones topográficas y es bastante molesta.

Para no complicar excesivamente los registros de cálculo la última corrección podrá hacerse en el valor anterior de los lados y de los ángulos ó de sus logaritmos con tinta roja sobre las cifras negras ó con la azul ó violeta sobre las rojas.

Tambien se puede hacer la comprobación de una cadena de triángulos utilizando la *orientación* y *las coordenadas planimétricas;* pero cuando se compara la orientación deducida para una base de comprobación con la medida directamente *es preciso no olvidar la influencia de la convergencia de los meridianos* y tenerla tambien en cuenta en la corrección de la correspondiente á los lados intermedios.

El primer medio le utilizó la Comisión de E. M. para el enlace de la red central poligonales en cadena y el segundo para la comprobación de cada cadena, *que corroboró muy acertadamente con un lado comun á todas consiguiendo un resultado sorprendente.*

Para no alargar excesivamente esta referencia, teniendo en cuenta que aunque no nos hayamos ocupado todavía de las coordenadas ortogonales de los vértices de una triangulación ya hemos dicho sobre ellas lo suficiente para que nuestros lectores puedan comprenderlo y que en el caso en que utilizó tan ilustrada Comisión la orientación no hay que tener en cuenta la convergencia de los meridianos, porque se refiere la comprobación á un mismo lado, considerando oportuno que se conozca el razonamiento analítico de estas interesantes comprobaciones y correcciones copiamos en las páginas siguientes, los dos estados registros recibidos de aquella inteligentísima Comisión para que sirvan de norma en casos análogos sin otra explicación que advertir que los números que aparecen en carácter mas grueso, en el original están escritos con tinta roja.

Triángulos	Vértices	ÁNGULOS Observados	ÁNGULOS Corregidos	Lados	Azimutes	LOGARITMOS De los senos de los ángulos con su signo	LOGARITMOS De los lados	LOGARITMOS De los senos y cosenos de los azimutes	LOGARITMOS SUMAS
								$\bar{1}$'9597633	3'5814474
	P_1	»	47'0999	$Q\ Q_1$	273'0171	»	3'6216841	$\bar{1}$'6141267	3'2358108
LX	Q_1	»	95'9378	$P_1\ Q$	16'0548	»	3'7920280		
	Q	»	56'9623	$Q_1\ P_1$	168'9549	»	3'6850407	$\bar{1}$'6707613	3'3558020
								$\bar{1}$'9461740	3'6312147
						0'1089189			
								$\bar{1}$'9959970	3'7899566
	Q_1	85'0312	85'0308	$R_1\ P_1$	108'6303	$\bar{1}$'9878819	3'7939596	$\bar{1}$'1308147	2'9247743
LXI	R_1	54'6450	54'6446	$P_1\ Q_1$	368'9549	0'1210370	3'6850407		
	P_1	60'3250	60'3246	$Q_1\ R_1$	253'9857	$\bar{1}$'9095579	3'7156356	$\bar{1}$'8750396	3'5906752
		200'0012	200'0000					$\bar{1}$'8205169	3'5361525
						0'0305949			
						$\bar{1}$'9451650			
								$\bar{1}$'9173014	3'5781020
	R_1	52'8050	52'8088	$Q_1\ S_1$	338'0531	$\bar{1}$'8678247	3'6608006	$\bar{1}$'7503333	3'4111339
LXII	S_1	63'1200	63'1238	$R_1\ Q_1$	53'9857	0'0773403	3'7156356		
	Q_1	84'0637	84'0674	$S_1\ R_1$	201'1769	$\bar{1}$'9862547	3'7792306	$\bar{2}$'2668350	2'0460656
		199'9887	200'0000					$\bar{1}$'9999258	3'7791564
						0'0635950			
						$\bar{1}$'8833772			
								$\bar{1}$'9930292	3'6556370
	S_1	45'1988	45'2001	$T_1\ R_1$	111'3757	$\bar{1}$'8141376	3'6626078	$\bar{1}$'2497843	2'9123921
LXIII	T_1	64'9975	64'9987	$R_1\ S_1$	1'1769	0'0692396	3'7792306		
	R_1	89'8000	89'8012	$S_1\ T_1$	246'3770	$\bar{1}$'9944029	3'8428731	$\bar{1}$'8233061	3'6661792
		199'9963	200'0000					$\bar{1}$'8728446	3'7157177
						0'0636425			
						$\bar{1}$'9846652			
								$\bar{1}$'9995366	3'8270749
	T_1	69'3600	69'3583	$S_1\ A_3$	302'9404	$\bar{1}$'9476225	3'8275383	$\bar{2}$'6643719	2'4919102
LXIV	A_3	74'0800	74'0783	$T_1\ S_1$	46'3770	0'0370427	3'8428731		
	S_1	56'5650	56'5634	$A_3\ T_1$	177'0187	$\bar{1}$'8899312	3'7698470	$\bar{1}$'5480208	3'3178678
		200'0050	200'0000					$\bar{1}$'9710660	3'7409130
						$\bar{1}$'9269739			
						0'0702485			
								$\bar{1}$'9798579	3'8199534
	A_3	81'5500	81'5491	$U_1\ T_1$	119'2395	$\bar{1}$'9814986	3'8400955	$\bar{1}$'4736825	3'3137780
LXV	U_1	60'6725	60'6717	$T_1\ A_1$	377'0187	0'0887499	3'7698470		
	T_1	57'7800	57'7792	$A_3\ U_1$	258'5678	$\bar{1}$'8965397	3'7551366	$\bar{1}$'9006893	3'6558259
		200'0025	200'0000					$\bar{1}$'7823546	3'5374912
						$\bar{1}$'9852896			
						0'0273852			
								$\bar{1}$'4921912	3'2747130
	A_3	63'4850	63'4846	$V_1\ U_1$	179'8945	$\bar{1}$'9242598	3'7825218	$\bar{1}$'9779718	3'7604936
LXVI	V_1	57'8425	57'8421	$U_1\ A_3$	58'5678	0'1031254	3'7551366		
	U_1	78'6737	78'6733	$A_3\ V_1$	322'0524	$\bar{1}$'9751609	3'8334229	$\bar{1}$'9734054	3'8068283
		200'0012	200'0000					$\bar{1}$'5308554	3'3642783
						0'0782863			
						$\bar{1}$'8915452			
								$\bar{1}$'9972994	3'7222675
	A_3	54'2450	54'2446	$X_1\ V_1$	292'9078	$\bar{1}$'8765909	3'7249681	$\bar{1}$'0460026	2'7709707
LXVII	X_1	116'6112	116'6108	$V_1\ A_3$	122'0524	0'0149543	3'8334229		
	V_1	29'1450	29'1446	$A_3\ X_1$	376'2970	$\bar{1}$'6454004	3'4937776	$\bar{1}$'5608423	3'0546194
		200'0012	200'0000					$\bar{1}$'9691753	3'4629526
						$\bar{1}$'6603547			
						0'0314034			
								$\bar{1}$'8541535	3'3793344
	A_3	97'0950	97'0975	$B_3\ X_1$	349'3082	$\bar{1}$'9995484	3'5251810	$\bar{1}$'8447140	3'3698950
LXVIII	B_3	75'9112	75'9137	$X_1\ A_3$	176'2970	0'0318550	3'4937776		
	X_1	26'9862	26'9888	$A_3\ B_3$	73'3945	$\bar{1}$'6142157	3'1398483	$\bar{1}$'9609157	3'1007640
		199'9924	200'0000					$\bar{1}$'6083749	3'7482232
						$\bar{1}$'6460707			

Número 97

COORDENADAS PARCIALES				COORDENADAS GENERALES		VALOR DE LOS LADO
x		y				
+	−	+	−	X	Y	
	3814'57		1721'12	40322'13	17619'39	4184'89
1 545'75		5998'87		38053'31	21897'14	6194'81
2 268'82			4277'75	41867'88	23618'26	4842'18
6 165'32			840'96	38053'31	21897'14	6222'42
	2268'82	4277'75		34156'81	18460'35	4842'18
	3896'50		3436'79	40322'13	17619'39	5195'60
	3785'31	2577'11		34156'81	18460'35	4579'32
3896'50		3436'79		34268'00	24474'25	5195'60
	111'19		6013'90	38053'31	21897'14	6014'93
4525'19			817'32	34268'00	24474'25	4598'41
111'19		6013'90		29631'62	19277'67	6014'93
	4636'38		5196'58	34156'81	18460'35	6964'23
	6715'45	310'39		29631'62	19277'67	6722'62
4636'38		5196'58		27552'55	24784'64	6964'23
2079'07			5506'97	34268'00	24474'25	5886'36
6606'22			2059'58	27552'55	24784'64	6919'83
	2079'06	5506'97		23025'39	21337'25	5886'36
	4527'16		3447'39	29631'62	19277'67	5690'32
1882'40			5760'94	27552'55	24784'64	6060'69
4527'16		3447'39		21142'99	27098'19	5690'32
	6409'56	2313'55		23025'39	21337'25	6814'33
	5275'55		590'16	27552'55	24784'64	5308'45
6409'56			2313'55	26418'54	27688'35	6814'33
	1134'01	2903'71		21142'99	27098'19	3117'29
	2395'16	2343'66		27552'55	24784'64	3351'05
1134'01			2903'71	28813'70	25344'69	3117'29
1261'15		560'05		26418'54	27688'35	1379'90
				$A_3\ B_3$ (Medida directamente)		1380'13
				Diferencia		0'23

Número 97

TRIANGULACIÓN DE LA CANAL DE BERDÚN

Triángulos de partida

DATOS

$$Q P_1 \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{1545{,}75^2 + 5998{,}87^2} = \sqrt{2389343{,}0625 + 35986441{,}2769} =$$

$$\sqrt{38375784{,}3494} = 6194{,}81 \text{ m.} \qquad \log. Q P_1 = 3{,}7920280$$

$$\log. \text{tag. azimut de } Q P_1 = \log. \Delta X - \log. \Delta Y = 3{,}1891393 - 3{,}7780694 = \bar{1}{,}4110699$$

$$\text{azimut de } Q P_1 = 216{,}0548^c$$

$Q M = 4891{,}34$ m. $\qquad \log. Q M = 3{,}6894276 \qquad$ azimut de $Q M = 184{,}7889^c$

Triángulos	Vértices	Angulos observados	ANGULOS CORREGIDOS: Por el cierre del triángulo	Por la corrección de orientación	Por la corrección de la distancia	Lados	LOGARITMOS PROVISIONALES: De los senos de los ángulos con su signo	De los lados	LOGARITMOS CORREGIDOS: De los senos de los ángulos con su signo	De los lados	Diferencia tabular para 1"
									0'0757456		
	Q	88'2250	88'2259	**88'2282**	**88'2282**	$Q_1 M$			$\bar{1}$'9925326	3'7651732	
LIX	Q_1	61'8375	61'8383	61'8371	**61'8363**	$Q M$	0'0832095	**3'6894276**	**0'0832130**	**3'6894276**	*4'66*
	M	49'9350	49'9358	49'9347	**49'9355**	$Q Q_1$	1'8490384	3'6216755	$\bar{1}$'8490435	**3'6216841**	*6'84*
		199'9975	200'0000	200'0000	**200'0000**		1'9322479		$\bar{1}$'9322565		
									$\bar{1}$'8930127		
	Q	56'9650	56'9646	**56'9623**	**56'9623**	$Q_1 P_1$			$\bar{1}$'8921279	3'6850407	
LX	Q_1	95'9362	95'9358	95'9370	**95'9378**	$Q P_1$	0'0008851	**3'7920280**	**0'0008848**	**3'7920280**	0'43
	P_1	47'1000	47'0996	47'1007	**47'0999**	$Q Q_1$	1'8287769	3'6216900	$\bar{1}$'8287713	**3'6216841**	7'47
		200'0012	200'0000	200'0000	**200'0000**		$\bar{1}$'8296620		$\bar{1}$'8296561		19'40

COMPENSACIONES

Por la corrección de orientación del lado común $Q Q_1$

Triángulo *LIX*. Azimut de $Q Q_1$ = azimut de $Q M$ + ángulo $M Q Q_1$ = 184'7889 + 88'2259 = 273'0148
Triángulo *LX*. Azimut de $Q Q_1$ = azimut de $Q P_1$ + ángulo $P_1 Q Q_1$ = 216'0548 + 56'9646 = 273'0194

Diferencia = 0'0046

Se aumenta el ángulo $M Q Q_1$ y se disminuye el $P_1 Q Q_1$ en 0'0023 c

Por la corrección de la distancia del lado común $Q Q_1$

log. $Q Q_1$ (cálculado en el triángulo *LIX*) = 3'6216755
log. $Q Q_1$ (cálculado en el triángulo *LX*) = 3'6216900

Diferencia = 0'0000145

145 : 19'4 = 7"99 $\qquad$ 7"99 × 2 = 15"98

Se corrigen los ángulos del triángulo *LIX* en 8"
Id. id. id. *LX* en 8"

Total = 16"

98 — Trisección directa é inversa.

Hasta ahora hemos tratado de la resolución de los triángulos ó sea de la manera de expresar numéricamente la situación relativa de sus vértices en el supuesto de que se midan los tres ángulos de cada uno de aquellos; pero muchas veces conviene hacerlo de puntos interiores ó exteriores á ellos en que no se pueda ó no se quiera hacer estación y sean visibles desde dos ó tres vértices ya determinados ó bien fijar la situación de uno de aquellos puntos, en que se hace estación, midiendo los ángulos que entre sí forman las visuales dirigidas á tres ó mas vertices préviamente determinados: lo *primero* no es otra cosa que la aplicación del sistema de intersección tan utilizado en los antiguos procedimientos para determinar gráficamente algunos puntos de comprobación y la triangulación de que hemos hablado (núm. 70) complementaria y relacionada con las bases de operación y de comprobación en la aplicación del procedimiento de *poligonación con comprobaciones sucesivas* y lo *segundo* es el llamado *problema de la carta*, á que tambien hemos hecho referencia; la diferencia esencial consiste, en que como ahora la situación de los puntos conocidos lo está con mucha precisión y numéricamente representada, en la misma forma se ha de hacer la referencia de los puntos que se trata de determinar; por eso y porque en la directa, si solo hiciéramos una intersección, no se tendría la comprobación necesaria, es por lo que llamamos al procedimiento *trisección directa é inversa*.

La *primera* es sumamente sencilla de comprender y de aplicar.

En efecto: si suponemos que desde los vértices A, B y C (figura 121), que pudieran ser los Q, E y R de la figura 119, nos conviniera determinar otro, D, en que no quisiéramos ó no pudiéramos hacer estación, pero que le hubiéramos visto desde aquellas, midiendo los ángulos A, B', B'' y C, es claro que deduciendo el valor de los otros dos D' y D'', que son respectivamente iguales á 180° ó $200^c-(A+B')$ y $200^c-(B''+C)$ por la resolución del triángulo ABD tendríamos un valor de BD y otro por la del triángulo BCD y comparando estos dos valores comprobaríamos la situación de D con relación á A, B y C.

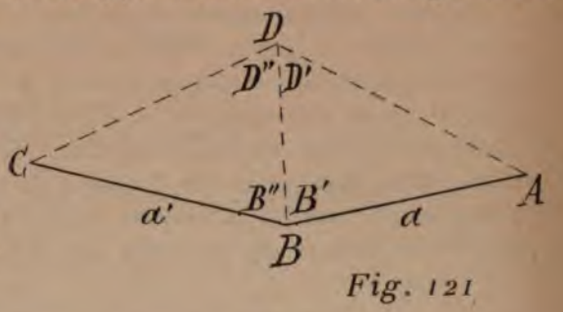


Fig. 121

La Instrucción I dictada por la Dirección General del nuevo Catastro italiano establece en su párrafo 33 como *tolerancia de la diferencia de los dos valores de BD* el $^1/_{3300}$ de su longitud ó en sus logaritmos *15 unidades* del 5.° órden decimal; pero, añade, «la media de todas las diferencias halladas en los logaritmos de los lados comunes á dos triángulos no debe ser mayor de 5 unidades del 5.° órden para que el trabajo en junto se considere plausible», expresando por nota que tal límite se ha deducido de trabajos realizados y que los que se vayan haciendo podrán motivar su variación.

Para consignar los datos, cálculos y resultados, se utiliza un estado de la forma del que se inserta en la página siguiente (1):

Aunque se aplica este procedimiento al caso indicado, mas generalmente se hace á puntos interiores de cada triángulo para deducir los de órden inferior ó simplemente para aumentar los puntos de comprobación de las poligonales y relacionarlas con una triangulación preexistente; pero como la solución es la misma no hay para que nos ocupemos aquí de este caso.

La *trisección inversa* es bastante más complicada que la directa y es conocida por *problema de Pothenot, de Snelio ó de vértice de pirámide;* no debe confundirse con la así llamada por algunos Autores, que suponen dirigida una de las visuales desde punto de situación ya conocida, que en nuestro concepto debe considerarse como *trisección mixta*, pues participa de las condiciones de la directa é inversa.

(1) Copiamos este estado registro del inserto en la página 280 del *Corso pratico* de Orlandi.

MODELO Y EJEMPLO NUMÉRICO PARA EL CÁLCULO DE LOS PUNTOS DETERMINADOS POR INTERSECCIÓN

DATOS	ANGULOS		CÁLCULO DE B D		Figuras y observaciones
	MEDIDOS	DEDUCIDOS	EN EL TRIÁNGULO A B D	EN EL TRIÁNGULO B C D	
1	2	3	4	5	6
A B C = 144 c '9074	B' = 88 c '9630	B'' = 55 c '9444	log. A B = 3'2521478	log. B C = 3'3461332	
log. A B = 3'2521478	A = 50 '5556	D' = 60 '4814	log. sen. A = 9'8532421	log. sen. C = 9'8473692	
log. B C = 3'3461332	C = 49 '6914	D'' = 94 '3642	c. log. sen. D' = 0'0896749	c. log. sen. D'' = 0'0017040	
			log. B D = 3'1950648	log. B D = 3'1952064	
			B D = *m.* 1566'98	B D = *m.* 1567'49	
			Diferencia absoluta . . 0'51		
			Id. relativa $\frac{0'51}{1566} = \frac{1}{3070}$, que se aproxima, pero excede, de la tolerancia.		

El ilustre Porro resolvió elegantemente, pero no con bastante sencillez, este problema por medio de los razonamientos y fórmulas que aparecen en las páginas 103-106 de su excelente Taquimetría de 1858 en el 6.° de sus *problemas varios* con referencia á los azimutes, y de este procedimiento hizo mucho uso con grandísimo provecho la inteligentísima Comisión de Estado Mayor en su difícil triangulación de Jaca.

Snelio, Pothenot y Burchhardt le han resuelto en otra forma; de buen grado expondríamos los dos procedimientos; pero como con ello tendríamos que ocupar muchas páginas, nos concretarémos á la solución analítica dada por el último siguiendo los razonamientos utilizados por Tachini (1), que, aunque no difieren esencialmente de los empleados por Erede, Orlandi y otros, parécennos mas al alcance de los menos doctos, que es lo que deseamos; pero debemos advertir que no admitimos el supuesto de que los puntos conocidos sean precisamente vértices de la triangulación de 1.er órden y los determinados de los de 2.° ó 3.°; en nuestro concepto se ha de partir del principio de que aquellos sean cualesquiera con tal que sea bien conocida numéricamente su situación y que el destino de los puntos, cuya situación se desea conocer, sea para vértices de triangulación inferior ó puntos independientes para comprobar la poligonación ó para relacionarla con una triangulación previa, pues son los destinos mas frecuentes y naturales de tales puntos y conviene fijar bien las ideas para no limitar inconvenientemente la aplicación de los procedimieentos.

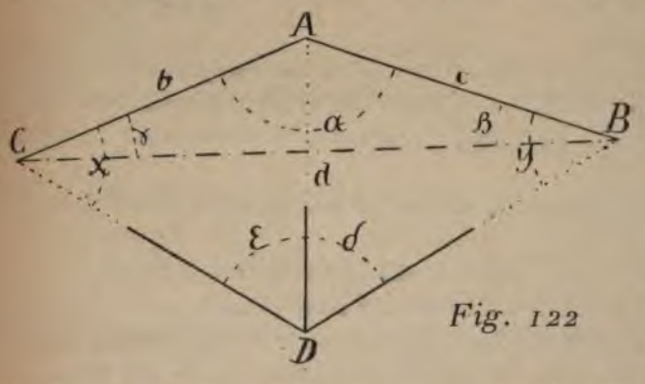


Fig. 122

Supongamos que conociendo la situación de los puntos *A*, *B* y *C* (figura 122), determinada por una triangulación precedente con la conveniente precisión deseémos conocer la del punto D pudiendo hacer estación en este y medir los ángulos ε y δ, que entre sí forman las visuales dirigidas á los tres primeros.

(1) Topografía moderna — 1891 — pág. 478 y siguientes.

Los datos para resolver el problema son por consiguiente:

Los ángulos. . . . $BAC=\alpha$
» » $ADB=\delta$
» » $ADC=\varepsilon$
y los lados $BA=c$ y $AC=b$

Para poder resolver los dos triángulos CDA y ADB que nos darán dos valores de AD comprobándolos, necesitamos conocer los ángulos $ACD=x$ y $ABD=y$, que son las incógnitas del problema.

En 1.er lugar del cuadrilátero $ABCD$ se deduce que

$$x+y+\alpha+\delta+\varepsilon=360^\circ \text{ y de aquí}$$
$$x+y=360^\circ-(\alpha+\delta+\varepsilon) \text{ y por lo tanto}$$
$$\tfrac{1}{2}(x+y)=180^\circ-\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta+\varepsilon) \qquad (1.^a)$$

Ademas, de los triángulos ADC y ADB resulta, llamando d al lado AD

$$\text{Sen. } x=\frac{d \text{ Sen. } \varepsilon}{b} \quad \text{y} \quad \text{Sen. } y=\frac{d \text{ Sen. } \delta}{c}$$

y dividiendo estas dos igualdades miembro á miembro y suprimiendo el factor comun d

$$\frac{\text{Sen. } x}{\text{Sen. } y}=\frac{c \text{ Sen. } \varepsilon}{b \text{ Sen. } \delta}$$

de la que, segun las trasformaciones de toda proporción, resulta:

$$\frac{\text{Sen. } x+\text{Sen. } y}{\text{Sen. } x-\text{Sen. } y}=\frac{c \text{ Sen. } \varepsilon+b \text{ Sen. } \delta}{c \text{ Sen. } \varepsilon-b \text{ Sen. } \delta}$$

y dividiendo el numerador y denominador del 2.° miembro por c Sen. ε resulta:

$$\frac{\text{Sen. } x+\text{Sen. } y}{\text{Sen. } x-\text{Sen. } y}=\frac{1+\dfrac{b \text{ Sen. } \delta}{c \text{ Sen. } \varepsilon}}{1-\dfrac{b \text{ Sen. } \delta}{c \text{ Sen. } \varepsilon}}$$

Si hacemos

$$\frac{b \text{ Sen. } \delta}{c \text{ Sen. } \varepsilon}=\text{Tang. } \varphi \qquad (2.^a)$$

y sustituímos este valor en la precedente, resultará:

$$\frac{\text{Sen. } x+\text{Sen. } y}{\text{Sen. } x-\text{Sen. } y}=\frac{1+\text{Tang. } \varphi}{1-\text{Tang. } \varphi}$$

Pero sabemos que la suma de los senos de dos arcos es á su diferencia como la Tang. de la semi-suma es á la Tang. de la semi-diferencia, luego en vista de la anterior, resultará:

$$\frac{\text{Sen. } x+\text{Sen. } y}{\text{Sen. } x-\text{Sen. } y}=\frac{\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(x+y)}{\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(x-y)}=\frac{1+\text{Tang. } \varphi}{1-\text{Tang. } \varphi}$$

y como Tang. $45^\circ=1$, sustituyendo en la anterior la Tang. de 45° en el 1.er término del numerador del último miembro y en los dos de su denominador, lo que equivale á multiplicar el

2.° por la unidad y recordando la fórmula trigonométrica, que dá la Tang. de la suma de dos arcos, resultará:

$$\frac{1+\text{Tang. }\varphi}{1-\text{Tang. }\varphi}=\frac{\text{Tang. }45°+\text{Tang. }\varphi}{1-\text{Tang. }45°\times\text{Tang. }\varphi}=\text{Tang. }(45°+\varphi)\text{ y por consiguiente}$$

$$\frac{\text{Tang. }\frac{1}{2}(x+y)}{\text{Tang. }\frac{1}{2}(x-y)}=\text{Tang. }(45°+\varphi)$$

Despejando en esta Tang. ½ (x — y) y teniendo en cuenta que Tang. (45° + φ) en el denominador equivale al factor

$$\frac{1}{\text{Tang. }45°+\varphi)}=\text{Cot. }(45°+\varphi)\text{ resulta}$$

$$\text{Tang. }\frac{1}{2}(x-y)=\text{Tang. }\tfrac{1}{2}(x+y)\text{ Cot. }\tfrac{1}{2}(45°+\varphi)\quad(3.^{a})$$

Con las fórmulas (1.ª), (2.ª) y (3.ª) se pueden encontrar los valores de x é y; porque de la

(1.ª) se deduce el valor de $^1/_2(x+y)=m$;
(2.ª) el del ángulo auxiliar φ que sustituido en la
(3.ª) nos permitirá hallar el valor de $^1/_2(x-y)$

y combinando el 1.° y 3.° valor se deduce

$$x=m+n\quad\text{é}\quad y=m-n$$

Conocidos en cada uno de los triángulos *A C D* y *A B D* dos ángulos y un lado se pueden resolver, hallando dos valores para el lado comun *A D* comprobando el trabajo.

Otra comprobación puede hacerse suponiendo trazada la recta *C B*; porque como su longitud, *a*, y los ángulos β y γ, que forma con los lados *B A* y *C A* se pueden deducir fácilmente

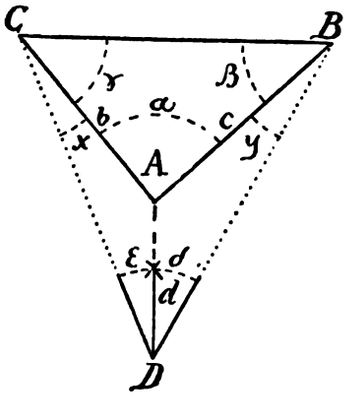


Fig. 123

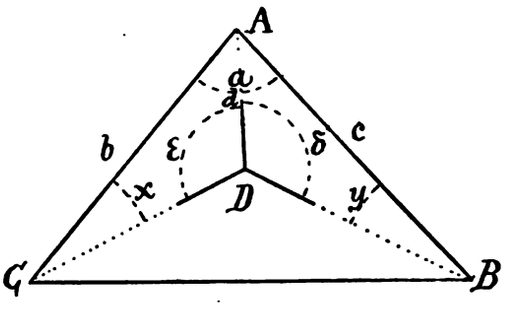


Fig. 124

de las coordenadas de los puntos *A*, *B* y *C* de la triangulación preexistente, con la primera y los ángulos x — γ é y — β se resolverá fácilmente el triángulo *B C D* comprobando con la comparación de los dos valores obtenidos para *B D* y *D C*, que serían respectivamente:

$$\text{Por la 1.ª solución, } BD=c\,\frac{\text{Sen. }(y+\delta)}{\text{Sen. }\delta}\quad\text{y}\quad DC=b\,\frac{\text{Sen. }(x+\varepsilon)}{\text{Sen. }\varepsilon}$$

$$\text{Por la 2.ª solución, } BD=a\,\frac{\text{Sen. }(x-\gamma)}{\text{Sen. }(\delta+\varepsilon)}\quad(4.^{a})\quad\text{y}\quad DC=a\,\frac{\text{Sen. }(y-\beta)}{\text{Sen. }(\delta+\varepsilon)}\quad(5.^{a})$$

Para evitar dudas y equivocaciones conviene indicar la aplicación de las fórmulas (1.ª), (4.ª) y (5.ª) en los casos principales que pueden ocurrir.

En el representado en la figura 123, el ángulo α comprendido en la fórmula (1.ª) es el suplemento á 360° del señalado en la figura y en las fórmulas (4.ª) y (5.ª) en lugar de $(x-\gamma)$ y de $(y-\beta)$ deben comprenderse $(x+\gamma)$ é $(y+\beta)$.

En el caso representado en la figura 124 $\varepsilon+\delta>180°$ y por consiguiente su seno sería negativo.

En el representado en la figura 125, será evidentemente:

$\varepsilon+\delta=180$ y por consiguiente Sen. $\varepsilon=$ Sen. δ y segun la fórmula (2.ª) Tang. $\varphi=\frac{b}{c}$ y $x=\gamma$ é $y=\beta$.

Finalmente cuando el punto D se halle en la circunferencia, que pasa por los otros tres, demuestra el análisis, como lo hace la construcción geométrica, la indeterminación del problema, porque por resultar

$$\alpha+\delta+\varepsilon=180°$$

segun la fórmula (1.ª) será

$$^1/_2\,(x+y)=90°$$

y Tang. $^1/_2\,(x+y)=\infty$ y Tang. $^1/_2\,(x-y)=\infty\times 0=\frac{0}{0}$

Es consiguiente á esta indeterminación el que no debe utilizarse este procedimiento en tales casos y como cuando los cuatro puntos se hallen sobre una circunferencia en el cuadrilátero formado por ellos los ángulos opuestos son suplementarios, puesto que se conoce previamente el ACB no se debe elegir el punto D, de manera que el CDB le sea suplementario, ni se acerque á él, sino que de este se diferencie en mas ó en menos de 30°, porque los que mas se aproximen al suplementario no darán una solución bien determinada, como ya lo indica para tales casos la resolución geométrica del mismo *problema*, llamado *de la carta*.

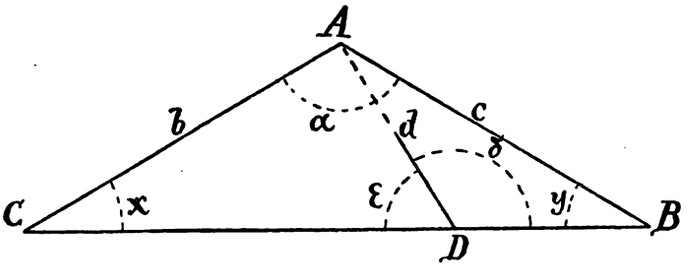


Fig. 125

Para que se vea que la solución del problema de la trisección inversa, si bien es algo complicada, no tanto como parece en la explicación precedente, vamos á hacer aplicación de las fórmulas esenciales al mismo ejemplo numérico utilizado por Tachini (1).

DATOS

DISTANCIAS	ÁNGULOS
$b=6262'57$	$\alpha=126°\ 5'\ 56'3''$
$c=5921'22$	$\varepsilon=\ 55°\ 34'\ 23'7''$
	$\delta=\ 41°\ 55'\ 36'3''$
	$\alpha+\delta+\varepsilon=223°\ 35'\ 56'3''$
	$\frac{\alpha+\delta+\varepsilon}{2}=111°\ 47'\ 58'15''$

Segun la fórmula (1.ª) será

$$^1/_2\,(x+y)=180°-{}^1/_2\,(\alpha+\delta+\varepsilon)=\ 68°\ 12'\ 1'85''$$

(1) Obra antes citada, página 483.

Determinemos el valor del ángulo auxiliar φ por la fórmula (2.ª), Tang. $\varphi = \frac{b \text{ Sen. } \delta}{c \text{ Sen. } \varepsilon}$ y se tendrá:

$$\begin{aligned} \text{Log. } b &= 3'7967526 \\ \text{Log. Sen. } \delta &= 9'8248934 \\ \text{Comp. Log. } c &= 6'2275888 \\ \text{Comp. Log. Sen. } \varepsilon &= 0'0836255 \\ \hline \text{Log. Tang. } \varphi &= 9'9328600 = \text{Log. Tang. } 40^\circ\ 35'\ 19'32'' \end{aligned}$$

y por consiguiente $45^\circ + \varphi = 85^\circ\ 35'\ 19'32''$

Sustituyendo los valores precedentes en la fórmula (3.ª) resultará:

$$\text{Tang. } {}^1/_2\,(x - y) = \text{Tang. } (68^\circ\ 12'\ 01'85'')\ \text{Cot. } (85^\circ\ 35'\ 19'32'')$$

ó

$$\begin{aligned} \text{Log. Tang. } (68^\circ\ 12'\ 01'85'') &= 0'3979823 \\ \text{Log. Cot. } (85^\circ\ 35'\ 19'32'') &= 8'8873026 \\ \hline \text{Log. Tang. } {}^1/_2\,(x - y) &= 9'2852849 = \text{Log. Tang. } (10^\circ\ 55'\ 01'52'') \end{aligned}$$

Combinando los valores de ${}^1/_2\,(x + y)$ y ${}^1/_2\,(x - y)$ se tiene:

$$\begin{aligned} x &= 79^\circ\ 07'\ 03'37'' \\ y &= 57^\circ\ 17'\ 0'33'' \end{aligned}$$

Con estos ángulos y los ya conocidos del cuadrilatero $A\,B\,D\,C$ se tiene una comprobaci porque constituyendo los propios de esta figura, su suma debe ser igual á 360° y resulta:

$$\begin{aligned} \alpha &= 126^\circ\ 05'\ 56'30'' \\ x &= 79^\circ\ 07'\ 03'37'' \\ \varepsilon &= 55^\circ\ 34'\ 23'70'' \\ \delta &= 41^\circ\ 55'\ 36'30'' \\ y &= 57^\circ\ 17'\ 00'33'' \\ \hline \text{Total} &= 360^\circ\ 00'\ 00'00'' \end{aligned}$$

Rara vez resultará tan completa exactitud en la comprobación, pero sí pequeño el error si han medido los ángulos con mucha precisión y hecho los cálculos con cuidado utilizando Tablas de siete decimales, lo que realmente no es necesario en la determinación de puntos topográficos: la diferencia resultante, si es tolerable, se repartirá por partes iguales entre los ángulos x, ε, δ é y no pudiéndose variar el α, que se supone compensado en la triangulación previa á que pertenece.

Con los datos que esta suministra se calculan los ángulos β y γ y el lado a del triángulo $A\,B\,C$ (figura 122) y con ellos y por las fórmulas (4.ª) y (5.ª) se determina el valor de los lados $B\,D$ y $D\,C$ y con estos el de $D\,A$ dos veces por los triángulos $A\,B\,D$ y $A\,D\,C$ comprobándose mas completamente todo.

No creémos necesario consignar todos estos cálculos; Tachini lo hace deduciendo para $A\,D$ dos valores exactamente iguales á 5397'51 metros.

Hace tambien nuevas comprobaciones determinando por distintas vías el valor de otros lados y discute otros casos; pero prescindimos de ello para no alargar mas este número y por considerar suficiente lo ya dicho.

99 — Determinación de la meridiana.—Azimut verdadero de los lados de los triángulos.—Divergencia de los meridianos.

Para resolver los triángulos integrantes de una red no es indispensable conocer el azimut verdadero de sus lados, ni siquiera su orientación con referencia á una dirección arbitraria, porque son los ángulos que entre si forman los lados lo que se necesita y no sus orientaciones respectivas; pero como por medio de estas, como ya hemos dicho, se pueden tener inmediatas y apreciables comprobaciones y mediante los verdaderos azimutes se relacionan fácilmente entre si las distintas triangulaciones topográficas y estas con las geodésicas, se pueden replantear los vértices desaparecidos con solo conocer el sitio de uno de ellos, comprobar una larga triangulación en cadena ó una poligonación viendo si la orientación por su medio deducida para un lado distante del orígen coincide ó no con la que para él se calcule especialmente, teniendo por de contado en cuenta la convergencia de los meridianos, y como finalmente conviene poner en concordancia las coordenadas topográficas con las geodésicas, es indudable la conveniencia y necesidad de determinar en cada triangulación independiente la meridiana, para que con la perpendicular correspondiente sirvan de ejes y consiguientemente se utilice en el cálculo de las coordenadas planimétricas X é Y de los vértices el azimut verdadero de uno de sus lados.

Hemos dicho en las *triangulaciones independientes*, porque tal necesidad no existe cuando están íntimamente relacionadas con otras geodésicas preexistentes, ya que del azimut del lado ó lados comunes se deducen fácilmente los correspondientes á todos los de la triangulación de que se trata, en cuanto no sea necesario tener en cuenta la convergencia de los meridianos.

La *precisión* con que se ha de determinar la meridiana ó azimut original debe ser á lo sumo la misma que sirva de norma en la triangulación y por eso deben desecharse tanto los procedimientos geométricos antes utilizados, que daban muy poca, como los geodésico-astronómicos que la llevan hasta 1" ó fracciones de este y que necesariamente exigen aparatos y cálculos mas complicados y exactos de los que son indispensables al Topógrafo.

En su consecuencia nos limitarémos á explicar los procedimientos mas sencillos y suficientemente exactos, que este puede utilizar segun los casos.

Cuatro métodos diferentes se emplean á tal objeto:

El 1.° consiste en determinar el meridiano observando una estrella en el momento que por él pasa, fijando sobre el terreno su traza ó midiendo el azimut correspondiente á un lado y como se simplifican los cálculos utilizando las estrellas circumpolares se elige al efecto la conocida *estrella polar:* este método es el llamado *por observación al paso ó culminación de la estrella.*

En el 2.° se utiliza para la observación el momento de la *máxima digresión* ó separación aparente de la estrella del polo calculando el azimut de aquella y el ángulo plano del diedro formado por los verticales que pasan por la estrella en aquel momento y por un punto determinado del terreno y deduciendo de aquellos datos el azimut de un lado.

El 3.er método, llamado de las *alturas correspondientes*, está basado en determinar los planos verticales correspondientes á dos posiciones simétricas de un astro, generalmente el Sol, pues habida en cuenta su declinación en aquel momento, el bisectriz será el meridiano buscado.

El 4.° finalmente, llamado por *observación extra-meridiana*, que, para no confundirle con el método anterior, en que tambien lo es, llamaríamos *arbitraria*, consiste en medir el ángulo de los planos verticales que pasan por un punto del terreno y por un astro en un momento cualquiera, calcular su azimut para aquel momento y de él deducir el del lado.

El *1.er método* se realiza de tres maneras diferentes:

La 1.ª, que llamarémos *de alineación con la polar en su culminación*, consiste en señalar sobre el terreno la traza del plano vertical que pasa por dicha estrella en tal momento y por un punto determinado del terreno ó sea *el meridiano de este* y conviene que se haga en uno de los

extremos de la base ó en un vértice cualquiera de la triangulación; lo primero es preferible, cuando aquella se encuentra cerca de la residencia eventual del operador y en terreno apropiado, porque utilizándose desde el principio el azimut verdadero se evitan los cálculos de reducción y la repetición de los registros.

La *estrella polar*, como es bien sabido, es la última de la *osa menor;* describe aparentemente alrededor del polo N una circunferencia de 1°59' y en caso de duda se determina fácilmente suponiendo trazada una recta por las dos últimas, α y β, de la caja del carro ú Osa mayor, pues pasa muy cerca de aquella, como se indica en la figura 126.

Se ha demostrado ademas por observaciones astronómicas que en el momento de su culminación superior é inferior ó sea en su mayor y menor altura aparente, el plano vertical, A B, que pasa por ella, lo hace por el polo y corta las lanzas de la Osa mayor á una distancia $\xi A = \frac{1}{4}$ de $\xi\varepsilon$ y de la constelación análoga Casiopea á la $\xi B = \frac{1}{4}$ de $\xi\gamma$ confundiéndose con el meridiano; luego determinando sobre el terreno la traza del plano vertical que pasa por la polar con tales condiciones, señaladas en la figura por la recta *A B, se tendrá la meridiana del punto de estación:* las indicadas condiciones ocurren de 15^m á 20^m despues que la aplomada, que cubre la polar, lo hace tambien á la estrella ε ó 1.ª de la lanza del carro ú Osa mayor, que como las otras dos constelaciones citadas gira aparentemente en la dirección indicada en la figura 126 por las flechas.

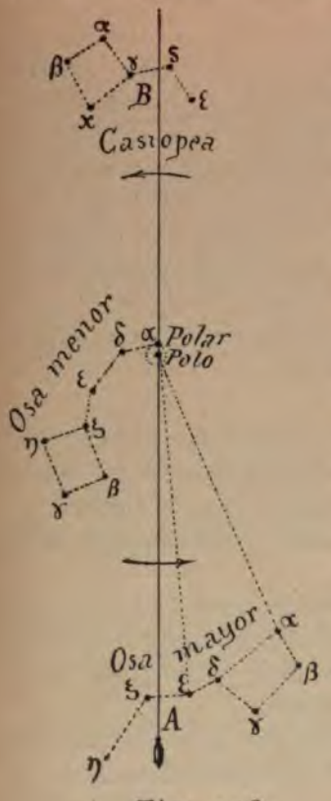


Fig. 126

Ahora bien: para fijar sobre el terreno la traza del meridiano ó sea la meridiana, colocando sobre el vértice, por donde se desea hacerla pasar, una aplomada fija, iluminada en caso necesario; 10 metros detrás otra móvil que se pone en alineación con ella, la polar y los puntos indicados de la Osa mayor y Casiopea y á 200 metros delante de la 1.ª otra iluminada que se hace mover hasta que se encuentre en la misma alineación, se observan las tres desde 2 ó 3 metros detrás de la 2.ª para hacer cómodamente la observación.

La iluminación de la 1.ª y 3.ª puede conseguirse mediante pequeños faroles dispuestos de manera que la mecha se encuentre en la vertical de la aplomada, á que pueden servir de peso y colgarse de un pequeño travesaño sujeto á una banderola (1).

En noches serenas y apacibles se puede hacer la observación y fijación de los tres puntos en poco rato y cómodamente con suficiente precisión para la generalidad de los casos, si el observador tiene buena vista.

Este procedimiento, que tiene la ventaja de no exigir aparatos ni molestas lecturas, ofrece el inconveniente, como los dos siguientes, de tener que esperar la hora avanzada de la culminación y de que muchas veces una nube ó la falta de limpieza de la bóveda celeste impiden hacer la observación y final y especialmente que no es posible fijar el grado de precisión con que se traza la meridiana; pero en buenas condiciones de observación y realizando esta con las debidas precauciones se conseguirá la suficiente para la generalidad de las triangulaciones independientes, que no comprenderán muy grandes extensiones.

(1) La 3.ª aplomada se puede sustituir con una banderola y en todos casos el farol que en una ú otra se coloque para iluminarlas y llamar la atención del observador debe tener una lente biconvexa y la mecha en su foco para que, como digimos en el número 19, página 57 del volúmen I, los rayos emergentes sean paralelos y se vean á grandes distancias, constituyendo un sencillo *heliógrafo;* pero se ha de cuidar de poner el eje en la dirección del observador, porque en otro caso no la vería.

El 2.° medio consiste en fijar la aplomada iluminada á una distancia mucho mayor, 1000 ó 1500 metros, v. gr., en el plano meridiano mediante un teodolito ó taquímetro bien corregido y bien centrado en el punto por donde se quiere hacer pasar.

Aunque si está bien comprobado y corregido el goniómetro parece innecesario repetir la observación con el anteojo en posición invertida, es sin embargo prudente hacerlo y si fuese necesario se marcarán los dos puntos que correspondieren para utilizar el medio de entre ellos para medir despues el azimut del lado ó lados de los triángulos concurrentes en el punto de estación.

Este procedimiento tiene sobre el anterior la ventaja de la mayor precisión con que se determina el plano vertical y su traza, pero tambien el inconveniente de exigir un buen goniómetro, que permita observar con mucha inclinación del anteojo é iluminar su retículo, como sucede con el Clepe gran modelo.

El 3.er medio solo difiere del anterior en que en lugar de fijarse la meridiana se mide desde luego el azimut de un lado y á tal efecto antes y despues de visar á la polar en las dos posiciones del anteojo se hace al otro extremo del lado y se anotan las direcciones azimutales señaladas por los nónius comparando las correspondientes á dicho vértice con las señaladas á la polar y la diferencia será el azimut ó de ella se podrá deducir segun la dirección en que aumente la graduación del limbo y los azimutes.

Estos lo hacen de N á E y si el limbo tiene la graduación que hemos considerado normal, suponiendo que el vértice se encuentra al O, se empezará por observarle con el anteojo directo é inverso y nuevamente directo tomando la media general de todas las direcciones reducidas á la graduación del nónius A de la 1.ª, se hacen las mismas observaciones visando á la polar tomando tambien la media y despues se repite la observación al vértice para comprobar si el limbo ha tenido ó no algun movimiento y para evitarle se apretará fuertemente el tornillo de presión, se moverá la alidada suavemente aflojando su tornillo y se cuidará de conservar bien centrada la burbuja del nivel evitando en lo posible movimientos del observador que la descentren y con la diferencia de las dos primeras medias y la de la 2.ª y 3.ª en caso de su completa conformidad entre la 1.ª y 3.ª, se tendrán dos valores del azimut, cuyo término medio le dará con suficiente precisión.

Si el vértice elegido para la determinación del azimut no dista de la estación mas de 1000 metros, fácil será distinguirle con ordinaria iluminación; si estuviera á mayor distancia ya habría que utilizar medios especiales, que, cuando no pase de 2000 metros, podrían consistir en una caja con lámpara de petróleo ó acetileno y lente de 60 á 70 mm. de diámetro y 10 centímetros de foco, como á tal objeto las construye Salmoiraghi, la que de día se orienta convenientemente para que la luz emergida por su estrecha ventana pase por la estación.

El punto visado debe hallarse á distancia suficiente para no tener que cambiar la enfocación del ocular al observarle antes y despues de hacerlo á la polar, pues que con el cambio de enfocación se pueden producir errores en las direcciones azimutales; Salmoiraghi dice (1) que para insensibilizar la enfocación aludida se ha de visar con el anteojo del Clepe grande á puntos distantes 1500 metros y á 1000 metros con los del mediano y pequeño y los taquímetros comunes.

Como quiera que la culminación de la polar tiene lugar de 16^m á 20^m despues que ella y la estrella ε de la Osa mayor se encuentran en la misma vertical, segun antes hemos dicho, y esto se nota fácilmente á la simple vista mediante una aplomada, es muy sencillo determinar prácticamente el momento del paso de la polar por el meridiano evitando enojosos tanteos para utilizar el momento preciso de la culminación, lo *que es necesario, porque entonces cambia rápidamente el azimut de la estrella* y por esto y porque en el momento de la *mayor digresión ó separación aparente del polo* sucede lo contrario y se verifica en horas de la noche mas cómodas, muchos prefieren el momento de la máxima digresión al de la culminación ó sea

(1) Les Cleps... Nota de la página 81.

El 2.° de los métodos citados.

Este exige: 1.° *que se determine el momento de la máxima digresión* y 2.° *que se calcule el azimut que entonces corresponde á la estrella.*

Recomendando á nuestros lectores que tengan presente las nociones consignadas en el número 12 del volúmen I, vamos á resolver las dos cuestiones anunciadas siguiendo la sencilla explicación que de ellas hacen los ilustres Ingenieros Orlandi y Salmoiraghi (1).

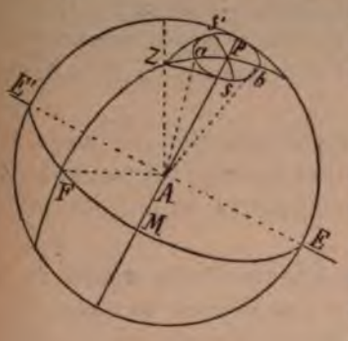


Fig. 127

Cálculo del momento de la máxima digresión.

Sea *A* (figura 127) el centro de la esfera celeste, que aparece al observador colocado en él; *E M E'* el ecuador de la misma; *P* su polo boreal; *b s a s'* el paralelo diurno descrito por la estrella polar; Z el zenit y P Z F el meridiano del punto de observación; s y s' son las posiciones de la estrella en su máxima digresión oriental y occidental, de manera que los planos A Z s y A Z s' resulten tangentes al paralelo y los ángulos P Z s y P Z s' los mayores posibles.

P Z es el arco de meridiano que mide la distancia zenital del polo y por consiguiente es igual al complemento de la latitud φ del punto A, esto es

$$P\,Z = 90° - \varphi$$

P s es el arco del círculo de declinación ó *círculo orario*, comprendido entre el polo y la estrella y es igual al complemento de la declinación de esta, esto es

$$P\,s = 90° - \delta$$

El triángulo esférico Z P s es rectángulo en *s*, porque el arco de círculo máximo P s es perpendicular al paralelo descrito por la estrella y tambien perpendicular al arco de círculo máximo Z s tangente á dicho paralelo; por consiguiente, segun un teorema de la Trigonometría esférica, se tendrá:

$$\text{Tang. } P\,s = \text{Tang. } Z\,P.\ \text{Cos. } Z\,P\,s$$

de donde

$$\text{Cos. } Z\,P\,s = \frac{\text{Tang. } P\,s}{\text{Tang. } Z\,P}$$

Pero el ángulo Z P s es el ángulo orario en el momento de la máxima digresión y llamándole *t* y sustituyendo los valores de P s y Z P, tendrémos:

$$\text{Cos. } t = \text{Cot. } \delta.\ \text{Tang. } \varphi \qquad (1.^a)$$

de cuya fórmula, expresando el ángulo *t* en tiempo sideral, se deducirá el que debe trascurrir para que la estrella pase del *s* al meridiano en *a* y desde este al otro punto de máxima digresión *s'*, lo cual será fácil, pues en los almanaques náuticos, en el anuario del «Bureau des longitudes» y otros libros análogos, que consignan las *efemérides astronómicas*, se encuentran los valores de la ascensión recta, α, la declinación, δ y la hora de tiempo medio civil, término medio del paso de la polar por el meridiano de París, Greenwich ú otro y la Longitud y Latitud aproximada del punto de estación se determinan por un mapa y la 2.ª puede deducirse de la altura zenital de la estrella, como luego se dirá.

Cálculo del azimut de la polar en su máxima digresión.

Del triángulo Z P s (figura 127) resulta tambien

$$\frac{\text{Sen. } s\,Z\,P}{\text{Sen. } s\,P} = \frac{\text{Sen. } Z\,s\,P}{\text{Sen. } Z\,P}$$

(1) Corso pratico... páginas 348 y siguientes y Les Cleps... 80 y siguientes.

El ángulo s Z P es el azimut buscado, que designarémos por A, el Z s P = 90°; s P = 90 — δ y Z P = 90° — φ, luego sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se tendrá:

$$\text{Sen. A} = \frac{\text{Cos. } \delta}{\text{Cos. } \varphi} \qquad (2.^a)$$

Las fórmulas 1.ª y 2.ª ponen de manifiesto que *el momento de la máxima digresión de la polar y su azimut en tal instante dependen únicamente de su declinación* y de la *Latitud* del lugar de observación, que pueden conocerse por los medios indicados y se comprende que estos datos no son mas que preliminares necesarios para llegar al conocimiento del azimut de una dirección determinada sobre el terreno, sea arbitraria ó sea un lado de la triangulación, pues es fácil deducir el 2.° del 1.°; pero á quien no tiene la costumbre de los cálculos astronómicos resultan bastante enojosos los necesarios para llegar al objeto final y por eso se procura aclararlos mediante la solución de ejemplos prácticos.

Salmoiraghi, comprendiendo que esto no bastaba, ha consignado (1) un procedimiento práctico y suficientemente exacto que creémos oportuno insertar íntegramente comprendiendo cuanto dice relativamente á la estrella polar del S., σ *Octantis*, en obsequio á nuestros hermanos de la América del Sud; dice así:

»*Simplificación práctica de la misma resolución* (del ejemplo que consigna antes) y *tabla calculada de los tiempos de las digresiones de la polar* (boreal) y *de* σ *Octantis* (polar austral).

»Segun todo esto es muy importante observar que los tiempos locales de las digresiones son con diferencia de algunos minutos *iguales para todas las Longitudes y Latitudes*. Ademas se sabe que en cuanto concierne á la posición aparente de las estrellas, cuando no se exige una grande precisión, se puede pasar de un año á los sucesivos por sencillas y pequeñas correcciones. Puédese por consiguiente calcular la hora de la máxima digresión para una época y una Latitud y Longitud dadas y despues por sencillas correcciones, hallar la correspondiente á otra época y otra localidad».

»Esto es naturalmente muy cómodo para el Topógrafo, que puede preparar un estado que le desembarace de todos los cálculos astronómicos, que exigen cierta práctica especial que aquel no ha podido adquirir».

»*El siguiente ha sido precisamente calculado á tal objeto;* esto es, para hacer de la determinación del azimut una de las operaciones mas sencillas de la Topografía».

Para hallar la hora de la máxima digresión en otra época de la á que se refiere el estado se han de aplicar las correcciones siguientes:

1.ª *Para otro día del año 1888* diferente del 1.° de cada mes no hay mas que hacer una interpolación proporcional. Si no hubiera variación en la ascensión recta aparente de la estrella, bastaría saber que cada día las digresiones tienen lugar $3^m\ 56^s$ *mas pronto*. Las diferencias son por lo demas muy pequeñas.

2.ª *Para otro meridiano que el de Greenwich* se corregirá de 10^s (exactamente $9'80^s$) por cada hora (15°) de Longitud, que se *añadirá* al tiempo hallado por la interpolación, si la estación se encuentra al E. de Greenwich y se *restará* si se encuentra al O.

3.ª *Para otra Latitud.*

(a) *Caso de la polar*, α; por cada grado al Sud de 42°
se añadirán 8^s al tiempo de la digresión O.
se restarán 8^s » » » E.

Por cada grado al N. de 42°
se añadirán 12^s al tiempo de la digresión O.
se restarán 12^s » » » E.

(1) Les Cleps... páginas 85 á 91.

TIEMPO MEDIO DE LA MÁXIMA DIGRESIÓN PARA 1888 MERIDIANO DE GREENVICH

FECHAS	LÀTITUD UTILIZADA 42° NORTE POLAR (ε URSAE MINORIS) ESTE				LÀTITUD UTILIZADA 42° NORTE POLAR (ε URSAE MINORIS) OESTE				LATITUD UTILIZADA 35° SUD σ OCTANTIS ESTE				LATITUD UTILIZADA 35° SUD σ OCTANTIS OESTE			
				(1)												
1.° Enero	0h	40m	14s	P M	0h	33m	4s	A M	5h	57m	12s	A M	5h	51m	14s	P M
» Febrero	10	37	51	A M	10	26	44	P M	3	55	46	»	3	49	49	»
» Marzo	8	43	26	»	8	32	20	»	2	2	32	»	1	56	35	»
» Abril	6	41	24	»	6	30	15	»	11	57	45	P M	11	55	43	A M
» Mayo	4	43	34	»	4	32	22	»	10	00	44	»	9	58	43	»
» Junio	2	41	59	»	2	30	49	»	7	59	36	»	7	57	36	»
» Julio	0	44	30	»	0	33	19	»	6	2	2	»	6	00	00	»
» Agosto	10	39	5	P M	10	31	56	A M	4	00	3	»	3	58	4	»
» Septbre.	8	37	36	»	8	30	26	»	1	57	41	»	1	55	39	»
» Octubre	6	39	51	»	6	32	41	»	11	58	59	A M	11	53	1	P M
» Novbre.	4	37	58	»	4	30	48	»	9	56	18	»	9	50	20	»
» Dicbre.	2	39	48	»	2	32	38	»	7	57	51	»	7	51	53	»

(b) Caso de la polar S., σ Octantis; por cada grado por debajo de 35° hacia el Ecuádor:
se añadirán 3s á la hora de la máxima digresión O.
se restarán 3s » » » » E.

Por cada grado por encima de 35°
se añadirán 5'6s á la hora de la máxima digresión O.
se restarán 5'6s » » » » E.

4.ª *Para otro año distinto del 1888.*

Se añadirán á la hora hallada por la *interpolación* y *corregida* por las variaciones de Longitud y Latitud
si se trata de la polar N. 15s por cada año despues de 1888.
» » » » » » S. 1m 46s » » » » »
despues para las dos estrellas indiferentemente á causa de la corrección Juliana se restará 3m si el año es el *1.° despues de un bisiesto* y si el día para el que se busca la hora de la máxim digresión *precede* al 1.° de Marzo, mientras que se añadirá 1m si tal día sigue al 1.° de Marz

Si el año es el 2.° despues de un bisiesto
se restarán 2m si el día precede al 1.° de Marzo
se añadirán 2m » » sigue » » »

Si el año es el 3.° despues de un bisiesto
se restará 1m si el día precede al 1.° de Marzo
se añadirán 3m » » sigue » » »

Para un año bisiesto la corrección será sencillamente la de 15s por año *para la polar N* — 1m 46s para la σ Octantis.

(1) P M significa despues del medio día del tiempo medio civil y A M antes del mismo.
El tiempo medio civil y el astronómico se cuentan de 0h á 24h; pero el 1.° empieza á contarse desde la me noche y el 2.° desde el medio día ó paso del Sol por el meridiano del lugar segun ya se dijo en el número 12 de volúmen I.

«*Primer ejemplo:* Supóngase que se trata de determinar la hora de las máximas digresiones . y O. de la polar N. el 5 de Enero de 1890 en Milán».

Longitud de Milán al E. de Greenwich $0^h\ 36^m\ 46^s$
Latitud . . . . . $45°\ 28'\ 00''$

	TIEMPOS	
	DIGRESIÓN E.	DIGRESIÓN O.
egun el estado anterior en 1.° Enero 1888. . .	$0^h\ 40^m\ 14^s$ P M	$0^h\ 33^m\ 4^s$ A M
nterpolación: $4 \times 3^m\ 56^s$	$-\ 15\ 44$ »	$-\ 0\ 15\ 44$ »
l 5 de Enero de 1888.	$0\ 24\ 30$	$0\ 17\ 20$
orrección por diferencia de Long.: $9'8^s \times 0'61$.	$+\ 0\ 0\ 6$	$+\ 0\ 0\ 6$
ara el meridiano de Milán	$0\ 24\ 36$	$0\ 17\ 26$
orrección por diferencia de Lat. $12^s \times 3'46$ . .	$-\ 0\ 0\ 41$	$+\ 0\ 0\ 41$
ara el paralelo de Milán	$0\ 23\ 55$	$0\ 18\ 7$
orrección anual constante 2×15^s	$+\ 0\ 0\ 30$	$+\ 0\ 0\ 30$
	$0\ 24\ 25$	$0\ 18\ 37$
orrección Juliana (antes del 1.° de Marzo) . .	$-\ 0\ 2\ 00$	$-\ 0\ 2\ 00$
oras buscadas deducidas del estado	$0^h\ 22^m\ 25^s$ P M	$0^h\ 16^m\ 37^s$ A M
Id. id. calculadas directamente (exactas).	$0\ 22\ 41$	$0\ 16\ 9$
Diferencias.	$-\ 0\ 00\ 16$	$-\ 0\ 00\ 28$

Como 2.° ejemplo determina de una manera enteramente análoga las horas de máxima digresión de la polar S, σ Octantis, correspondientes al 5 de Enero de 1890 en Río Janeiro y encuentra para diferencias con el cálculo directo -17^s y -34^s y continua de la manera siguiente.

«Se vé por estos dos ejemplos que por medio de nuestro anterior estado se obtienen siempre resultados bastante exactos para las aplicaciones que se tienen que hacer. Hemos querido poner en evidencia las diferencias á fin de que pueda formarse idea clara de la aproximación. No se podía esperar, naturalmente, una exacta coincidencia».

«Una vez determinadas las horas de las máximas digresiones, se puede calcular inmediatamente las de los *pasos superior é inferior* para el mismo día».

«El paso (por el meridiano ó culminación de la estrella) tiene lugar exactamente á la mitad del intérvalo de tiempo entre las dos digresiones máximas; si este intérvalo es mayor de 12 horas, entonces el *paso es el inferior;* si es menor que 12 horas el *paso es el superior*. Los instantes deducidos de esta manera por los tiempos ó digresiones calculadas por el estado anterior son mas exactos que los momentos de las máximas digresiones y de una precisión mas que suficiente para las aplicaciones que de ellas se han de hacer».

Lo justifica deduciendo de los ejemplos citados los momentos de la culminación y comparándolos con los expresamente calculados resultando diferencias menores de 10^s.

«Para el cálculo del azimut, dice despues, es preciso tener tambien los valores de las *declinaciones* de las dos estrellas elegidas».

«Las variaciones de la declinación pueden considerarse proporcionales á los tiempos para un largo período de años; pero para tener en cuenta las variaciones periódicas que afectan la posición aparente de las dos estrellas polares consideradas en las distintas épocas del año, conviene partir de los valores calculados para las dos estrellas tipos y despues de la interpolación sencilla, aplicar la corrección constante proporcional al tiempo».

«Los estados siguientes dan los valores de la declinación de las polares N. y S. para el primero de cada uno de los meses de 1888».

DECLINACIÓN NORTE VARIACIÓN ANUAL + 19″ = 0'0058c			DECLINACIÓN SUR VARIACIÓN ANUAL — 1″ = — 0'003c		
FECHAS 1888	Polar N (α Ursae minoris)		FECHAS 1888	Polar S (σ Octantis)	
	Grados centesimales	Grados sexagesimales		Grados centesimales	Grados sexagesimales
1.° Enero	98'5719c	88° 42′ 53″	1.° Enero	99'1858c	89° 16′ 02″
» Febrero	» 5722	42 54	» Febrero	1830	15 53
» Marzo	» 5705	42 49	» Marzo	1810	15 47
» Abril	» 5679	42 40	» Abril	1805	15 45
» Mayo	» 5650	42 31	» Mayo	1810	15 47
» Junio	» 5629	42 24	» Junio	1930	15 53
» Julio	» 5625	42 23	» Julio	1858	16 02
» Agosto	» 5636	42 26	» Agosto	1885	16 11
» Septiembre	» 5659	42 34	» Septiembre	1909	16 19
» Octubre	» 5693	42 45	» Octubre	1920	16 22
» Noviembre	» 5727	42 56	» Noviembre	1909	16 19
» Diciembre	» 5759	43 06	» Diciembre	1889	16 12

«Si con la Tabla precedente se desea conocer la declinación de la polar N. el 10 de Mayo de 1890, se tendrá:

Declinación para el 1.° de Mayo de 1888.		88° 42′ 31″
Corrección por interpolación $^1/_3 \times 7''$	—	2'3″
Declinación para el 10 de Mayo		88° 42′ 28'7″
Corrección por la variación anual $2 \times 19''$	+	38
Declinación buscada.		88° 43′ 06'7″
Id. para 10 Mayo 1890 del Nautical Alm.		88 43 7'5
Diferencia.	—	0° 0′ 0'8″

Lo mismo sucederá para la polar S.

Los valores de las declinaciones se pueden conseguir de esta sencilla manera con menor error de 1″.

Con esto se tienen para un período de 20 ó mas años los elementos para determinar astronómicamente el azimut absoluto sin tener que recurrir á Tablas astronómicas. Y debe observarse que en cuanto depende de los elementos dados se podría alcanzar la *precisión de medio miligrado* (1'5″).

El azimut A deducido por la fórmula 2.ª se puede tener en grados centesimales ó sexagesimales, segun convenga sin ninguna dificultad utilizando las Tablas logarítmicas apropiadas ó en caso de no tener de la 1.ª clase suficientemente exactas, se hará la conversión mediante las Tablas del número 5 del volúmen I.

Como quiera que sucede algunas veces que no son visibles las estrellas polares en la hora de su máxima digresión por efecto de la luz crepuscular, Salmoiraghi explica el medio de ade-

lantar ó retrasar la observación una hora próximamente y de corregir convenientemente el azimut hallado para la estrella en el momento de su máxima digresión.

»Para las estrellas muy próximas al polo, (1), sucede que el azimut, en los ángulos horarios cercanos á la máxima digresión, varía en razón de los cuadrados de los tiempos. Esta ley puede aceptarse en los casos de determinaciones topográficas para un intérvalo de una hora relativamente á las dos estrellas polares consideradas, α Ursae minoris y σ Octantis, pues el error será menor de 15" de arco = o'oo5^c.—Cuanto mas se acerque el momento de la observación al de la máxima digresión mas exacta será la determinación».

»Compréndese por consiguiente la manera de evitar los inconvenientes de la luz crepuscular anticipando ó retrasando la observación 30^m ó 45^m.

»La fórmula que dá el *azimut* en la máxima digresión hemos dicho que es:

$$\text{Sen. A} = \frac{\text{Cos. } \delta}{\text{Cos. } \varphi} \qquad (2.^a)$$

»Para un momento distinto, pero próximo á aquel, se tendrá otro azimut A, que se podrá expresar por

$$A_1 = A - e$$

en que *e* es una corrección en segundos ó milígrados.

Esta corrección, e, es siempre negativa, pues el azimut en el momento de la máxima digresión es el mayor y el que se consiga antes ó despues de aquel momento será siempre menor é igual en momentos simétricos de aquel.

»La corrección *e* se calculará por la fórmula

$$e = \frac{112'5}{206.265} t.^a \text{ Tang. A}$$

siendo t = tiempo, expresado en segundos, antes ó despues del momento de la máxima digresión.

»Pues que A es siempre conocido para una Latitud dada se pueden resumir todos los coeficientes de t.^{a} en uno solo que se podría calcular para las diferentes Latitudes; designando por K este nuevo coeficiente, que para simplificar los cálculos le fijarémos de manera que se pueda tomar *t* en minutos y no en segundos, el valor de *c*, *corrección en segundos de arco*, será para una Latitud dada

$$c'' = K\, t_m^2$$

y en milígrados $(3'24'' = o'oo1\ ^c)$

$$c_1 = \frac{K}{3'24}\, t_m^2 = K_1\, t_m^2$$

»El estado siguiente dá los valores de K y K_1 para las dos estrellas referidas en las distintas Latitudes. Para las no comprendidas expresamente en el estado se hará una sencilla interpolación.

»A causa de las repeticiones é inversiones que se han de hacer durante la medición del ángulo entre la señal y la estrella, las observaciones á esta no tienen lugar simultáneamente sino en el intérvalo de algunos minutos y por eso se ha de calcular la corrección para la media de estos tiempos.

»Por ejemplo:

»No pudiéndose observar la polar en su digresión *O.* desde una estación de Latitud 42° el 1.° de Abril del 1888, porque, segun aparece en el estado inserto en la página 368, aquella corresponde á 6^h 30^m P M, se hizo la observación 20^m mas tarde y previamente las punterías á la estrella se hicieron á 6^h 50^m, 6^h 52^m, 6^h 54^m y 6^h 56^m y se desea conocer la corrección que se ha de hacer al azimut A de la estrella en su máxima digresión».

---

(1) Obra antes citada página 91.

COEFICIENTES PARA LA REDUCCIÓN Á LA MÁXIMA DIGRESIÓN

LATITUDES Sur ó Norte	20°		25°		30°		35°		40°	
	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1
POLAR	0,0469	0,0145	0,0486	0,0150	0,0509	0,0157	0,0538	0,0166	0,0575	0,0177
σ Octantis	0,0267	0,0082	0,0277	0,0085	0,0290	0,0089	0,0307	0,0094	0,0328	0,0101
LATITUDES Sur ó Norte	45°		50°		55°		60°		65°	
	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1
POLAR	0,0623	0,0192	0,0685	0,0211	0,0768	0,0237	0,0882	0,0272	0,1043	0,0322
σ Octantis	0,0355	0,0110	0,0391	0,0121	0,0438	0,0135				

«La media de los tiempos de observación fué $6^h\ 53^m$ ó sean 23^m despues del momento de la máxima digresión y por consiguiente

$$c = K_1 t^s = 0'0183 \times 23^s = 0'00968^c$$

y pues que el azimut en su máxima digresión resultó segun la fórmula Sen. $A = \frac{\text{Cos. } \delta}{\text{Cos. } \varphi}$

$$A = 1'9272^c$$

el buscado será $A - c = 1'9272 - 0'0097 = 1'9175^c$».

El recurso de que nos acabamos de ocupar no es solo aplicable al caso expresado sino que puede utilizarse siempre que por cualquier motivo no pudiese hacerse la observación en el momento preciso de la máxima digresión por desarreglo del aparato, por cubrir la estrella una nube ó por otra causa cualquiera y tiene por consiguiente bastante importancia.

Práctica de la observación estelar.

El cálculo de la hora de la máxima digresión y del azimut en tal momento de la estrella polar se hace en el gabinete y tambien en él se prepara un registro para consignar los datos de observación, que puede tener la forma del modelo siguiente.

POSICIONES DEL ANTEOJO	TIEMPO DE LA OBSERVACIÓN	DIRECCIONES AZIMUTALES Á LA SEÑAL	Á LA POLAR
Directa	10^m antes digresión	$l_1 =$	
Inversa	7 » »	$l_2 =$	
»	4 » »	»	$l_3 =$
»	2 » »	»	$l_4 =$
Directa	2 despues »	»	$l_5 =$
»	4 » »	»	$l_6 =$
»	7 » »	$l_7 =$	
Inversa	10 » »	$l_8 =$	

El ángulo plano del diedro formado por los verticales, que pasan por la estrella en el momento de su máxima digresión y por la señal terrestre elegida, está dado por

$$S = \frac{1}{4}\left((l_1 + l_2 + l_7 + l_8) - (l_3 + l_4 + l_5 + l_6)\right)$$

y como cada dirección es la media de las señaladas por los dos nónius, si se procede con cuidado el valor de S ha de resultar con mucha precisión.

Sin mas explicación se comprende que conociendo el azimut de la estrella en su máxima digresión y el ángulo S, se deducirá sencillamente el azimut de la línea que de la estación va á la señal y de él se deduce despues el de los lados de los triángulos allí concurrentes.

El aparato debe comprobarse y corregirse con todo cuidado; sino estuviera dispuesto para observaciones nocturnas deben procurarse las linternas necesarias para la iluminación del reticulo, á cuyo efecto se puede sujetar delante del objetivo una cartulina blanca, que por una ventana permita ver la estrella y al propio tiempo refleje hácia el retículo la luz de la linterna; estas deben servir para iluminar los nónius ó graduaciones, que se han de ver por los microscopios y como sus lecturas se han de hacer simultáneamente por dos observadores, cada uno debe tener la suya; tambien el dia elegido para la observación se preparará la señal de manera que se haga bien visible de noche y á tal efecto se orientará la linterna con reflector al objeto de que el haz cilíndrico luminoso pase precisamente por el anteojo del aparato colocado en la estación.

Es muy conveniente que los que hayan de leer los nónius ó las direcciones por los microscopios con las linternas se ensayen en noches anteriores á la de la observación y tambien que se dirijan visuales á estrellas conocidas y á señales luminosas para evitar todo azoramiento y dificultades en el momento de la observación, que no es por muchos conceptos igual á las ordinarias y se ha de realizar con seguridad y rapidez.

Una hora antes del momento de la máxima digresión se pondrá el aparato bien nivelado en la estación, se hará la coincidencia de los ceros del limbo y nónius azimutales y se colocará la linterna en el punto elegido como señal disponiéndola de manera que sea claramente visible con el anteojo y, para facilitar despues su busca, á 4 ó 5 metros á un lado de ella se encenderá una pequeña hoguera.

Llegados los momentos de observación indicados en el registro anterior se procede con todo cuidado á dirigir á la señal y á la estrella las visuales indicadas leyendo las graduaciones los dos observadores sin moverse alrededor del aparato y cuidando de que se conserve perfectamente nivelado; uno de ellos leerá los ángulos zenitales por lo menos de las visuales á la estrella, porque, aunque no directamente, pueden servir indirectamente para el cálculo de la Latitud.

Todas las lecturas se han de reducir á la del 1.er nónius con anteojo en posición directa para las visuales dirigidas á la señal y á la estrella y las 8 que se consignen en el estado han de ser la media de cada par de nónius ó microscopios.

No creémos necesario decir mas sobre el 2.° de los métodos indicados.

El tercer método ó de las alturas correspondientes se emplea generalmente, como ya hemos indicado, haciendo observaciones al Sol, que, si evita los inconvenientes de las nocturnas, exige precauciones especiales.

En lo que vamos á decir seguirémos los pasos de Mr. Sanguet por considerar el mas sencillo y suficientemente exacto su procedimiento y las Tablas que al efecto utiliza y que copiamos.

La primera precaución que se ha de tomar para no perder la vista ó quemar los hilos del reticulo, cuando sea de esta clase, al dirigir visuales al Sol, es procurarse un vidrio negro que pueda colocarse cómodamente delante del objetivo y tener el aparato perfectamente comprobado y corregido; esto hecho se procederá de la manera siguiente:

1.° Antes de las 9 de la mañana poniendo el aparato en estación bien nivelado y en coincidencia los ceros del limbo azimutal y sus nónius (pues aunque esta condicion no sea necesaria y se pueda utilizar cualquiera graduación lo consideramos preferible por la mayor exactitud con que se consigue), con el movimiento general se dirige la visual á un punto bien determinado del terreno y se asegura fuertemente el limbo azimutal (1).

2.° Cuidando de que se conserve bien centrada la burbuja del nivel, pocos minutos antes de dicha hora (2) poniendo en libertad la alidada y el anteojo se dirige hacia el Sol colocando la cruz filar de manera que el hilo vertical se encuentre un poco á la derecha del disco solar y el horizontal un poco por encima de él; pero por la inversión de las imágenes en el anteojo aparecerá así , y se apretarán las mordazas de la alidada y del anteojo; pero observando el reloj en el momento de señalar este las 9, mediante los tornillos de coincidencia de la alidada y del anteojo se hará que los dos hilos sean tangentes al disco solar, sino se consiguiera en el momento preciso, se tomará nota de la hora en que se haga y de los ángulos azimutal y zenital.

3.° Se conservará apretada la mordaza del anteojo hasta que el hilo horizontal resulte tangente al disco solar por su parte inferior y en este instante se hace que el vertical sea tangente al mismo borde que antes, todo lo que en el anteojo aparecerá así , anotándose la hora y el ángulo azimutal, pues el zenital no ha variado y se tendrá terminada la 1.ª parte de la observación tomando la media de las horas y ángulos azimutales (3).

4.° Si el aparato puede permanecer bien abrigado del Sol y de otros accidentes se le deja estacionado hasta que cerca de la hora simétrica de la anterior permaneciendo apretada la mordaza del anteojo se suelta la de la alidada y se dirige al Sol ó cerca de él y apretándola con el tornillo de coincidencia se sigue su marcha aparente hasta que tome la posición que ultimamente tenía con referencia á la cruz filar, en cuyo momento se anotan la hora y ángulo azimutal, se hace la coincidencia de los hilos en la 1.ª posición y tambien se anotan iguales datos tomando la media.

5.° Para comprobar las variaciones que haya podido experimentar el aparato se visa nuevamente el punto del terreno y la diferencia resultante con el ángulo azimutal de partida, que hemos supuesto fuera cero, se corrige en las observaciones de la tarde y el término medio entre esta media corregida y la media de la observación de la mañana dará la hora del medio día local y el ángulo azimutal que habrá que añadir al que en la observación de la mañana se hubiera hallado para la posición del Sol respecto al punto del terreno para tener el ángulo que la visual dirigida á este formaría con la parte Sud de la meridiana, *si la declinación del Sol hubiera sido la misma en el momento de las dos observaciones;* pero, como no sucede así, es necesario corregir los resultados en una cantidad $\delta\theta = K D$, que M. Sanguet calcula de la manera siguiente:

«El factor K, variable con la Latitud, L, del punto de estación y con el intérvalo que separa las dos observaciones, está dado en la Tabla I siguiente; la II dá el valor de D con su signo

(1) Si el aparato está bien corregido no hay necesidad de repetir la observación con el anteojo invertido en ninguna de las diferentes visuales; en otro caso sería necesario hacerlo complicando la observación.

(2) Se comprende que en lugar de las 9 podría utilizarse lo mismo las 8, 8 y media, 9 y media ó 10 con tal que difiera del medio día, el tiempo suficiente para que se haga notable el arco por el Sol recorrido aparentemente y se evite por otra parte que el aparato y los operadores esten demasiado tiempo entretenidos con la operación.

(3) Esto se hace al objeto de tener en cuenta el diámetro solar; pero podría conseguirse tal vez mas fácilmente moviendo la alidada y el anteojo hasta que fueran los hilos tangentes al disco en la parte opuesta que antes, es decir el horizontal por la parte inferior y el vertical por la de la izquierda, pues si bien el movimiento aparente del Sol algo influiría, como que la lectura de los ángulos anteriores y el cambio de posición podría realizarse en menos de un minuto por observadores experimentados, aquel movimiento tendría poca influencia y entonces de la media de las horas y de los ángulos azimutales y zenitales se conseguirían los datos correspondientes al centro solar.

TABLA II.—VARIACIÓN DIURNA, D, DE LA DECLINACIÓN DEL SOL Y TIEMPO MEDIO Á MEDIO DÍA VERDADERO (1)

	Días		T. M.		Días		T. M.
Enero	1	+ 9 = 5′	12 h 4 m	Julio	1	− 8 = 4′	12 h 4 m
	11	17 9′	8		11	15 8′	5
	21	25 13′	12		21	22 12′	6
Febrero	1	+ 32 = 17′	12 h 14 m	Agosto	1	− 28 = 15′	12 h 6 m
	11	37 20′	14		11	33 18′	5
	21	40 22′	14		21	37 20′	3
Marzo	1	+ 42 = 23′	12 h 13 m	Septiembre	1	− 40 = 22′	12 h 0 m
	11	44 24′	10		11	42 23′	11 h 56 m
	21	44 24′	7		21	43 23′	53
Abril	1	+ 43 = 23′	12 h 4 m	Octubre	1	− 43 = 23′	11 h 50 m
	11	41 22′	1		11	42 23′	47
	21	38 20′	11 h 58 m		21	39 21′	44
Mayo	1	+ 33 = 18′	11 h 57 m	Noviembre	1	− 35 = 19′	11 h 44 m
	11	29 15′	56		11	30 17′	44
	21	22 12′	56		21	24 13′	46
Junio	1	+ 15 = 8′	11 h 57 m	Diciembre	1	− 17 = 9′	11 h 49 m
	11	8 4′	59		11	9 5′	53
	21	0 0′	12 h 1 m		21	0 0′	58

Las ventajas é inconvenientes del método con observaciones al Sol, son las siguientes:

1.ª Que no son necesarios aparatos que permitan observar con grandes inclinaciones, como ocurre en las de la polar y evitar los inconvenientes de las observaciones nocturnas, pudiéndose repetir la observación completa consiguiendo dos ó mas valores.

2.ª Que los cálculos son muy sencillos con las Tablas preinsertas (2).

3.ª Pero es un grande inconveniente exigir tanto tiempo para la observación completa obligando á no utilizar durante aquel día el aparato ni casi dedicarse á otra cosa el observador.

4.ª Que una nube puede impedir la observación de la tarde inutilizando la de la mañana.

Si para evitar estos inconvenientes se hicieran las observaciones muy próximas al medio día, ya habría que hacer correcciones que anularían otras ventajas.

---

(1) Sumando el tiempo medio para el mediodía verdadero con la media de los tiempos de observación hace conocer con diferencia de 1 á 2 m, el medio día verdadero del lugar, ó sea el estado del reloj, que es muchas veces útil conocer.

(2) Como no se determina la altura verdadera del Sol y solo sirve la observada para hallar la situación simétrica, se prescinde de la corrección por refracción y paralaje dependientes de aquella, de la temperatura y la presión suponiéndolas iguales en ambas observaciones.

Del error de refracción nos ocuparémos con algun detalle en el número 100; del de *paralage* nos concretarémos á consignar que su valor medio, es, segun el ángulo zenital, el siguiente:

ÁNGULO ZENITAL	PARALAGE	ÁNGULO ZENITAL	PARALAGE
0c. . . .	0‘0000c	40c. . . .	0‘0016c
5c. . . .	0‘0002c	50c. . . .	0‘0019c
10c. . . .	0‘0004c	60c. . . .	0‘0022c
20c. . . .	0‘0008c	70c. . . .	0‘0024c
30c. . . .	0‘0012c	80c. . . .	0‘0026c
		100c. . . .	0‘0027c

y como los radios de los paralelos decrecen á partir del Ecuador á los polos en razón de los Cosenos de las Latitudes correspondientes, se puede considerar

$$r = R \text{ Cos.} \frac{L + L'}{2} \qquad (4.^a)$$

y sustituyendo este valor en la (3.ª) y despejando

$$a\,b = \alpha\,\beta \text{ Cos.} \frac{L + L'}{2} \qquad (5.^a)$$

y sustituyendo el valor de $\alpha\,\beta$ en función del radio terrestre R

$$a\,b = 2\,\pi\,R \times \frac{l' - l}{400^c} \times \text{Cos.} \frac{L + L'}{2} \qquad (6.^a)$$

En el triángulo P' a O, rectángulo en a, se tiene por otra parte, observando que el ángulo P' O a es el complemento de la Latitud $\frac{L + L'}{2}$ y el lado a O el radio terrestre

$$P'\,a = R. \text{ Cot.} \frac{L + L'}{2} \qquad (7.^a)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.ª) el valor a b de la (6.ª) y el de P' a de la (7.ª) y simplificando resulta

$$\delta\,\theta = \frac{(l' - l).\ \text{Cos.} \frac{(L + L')}{2}}{\text{Cot.} \frac{(L + L')}{2}} \qquad (8.^a)$$

Pero

$$\text{Cot.} \frac{(L + L')}{2} = \frac{\text{Cos.} \frac{(L + L')}{2}}{\text{Sen.} \frac{(L + L')}{2}}$$

y sustituyendo en la (8.ª) y simplificando, resulta

$$\delta\,\theta = (l' - l) \text{ Sen.} \frac{(L + L')}{2} \qquad (9.^a)$$

que es la fórmula por todos admitida de la *convergencia de los meridianos.*

100 — Cálculo de las coordenadas ortogonales de los vértices de los triángulos. — Tablas con los errores de refracción de la luz en la atmósfera según el ángulo zenital, la temperatura y la presión.

Cuando por la compensación de los ángulos de los triángulos y su completa resolución se conocen la magnitud de los lados y sus azimutes provisionales, se pueden calcular las coordenadas planimétricas x é y de cada uno de los vértices al precedente y las X é Y de todos con

eferencia á un origen común, por medio de las sencillas formulas ya repetidamente usadas

$$x = D \text{ sen. } \theta; \qquad y = D \text{ cos. } \theta$$
$$X = \Sigma x \quad ; \quad Y = \Sigma y$$

Para hacer ordenada y sencillamente los cálculos y conservar en la misma forma los datos resultados se puede utilizar un estado de la forma del que ponemos en la página 380.

Tal estado es de la forma del inserto en las páginas 288 y 289 del *Corso pratico de Orlandi* y os datos consignados corresponden á la triangulación de Jaca, en que se utilizó con pequeñas odificaciones: hemos hecho tambien algunas al objeto de evitar equivocaciones, de compro- ar inmediatamente los cálculos y de que se vea claramente el vértice á que corresponden las ordenadas al origen.

Podríase y sería conveniente poner en la casilla de la designación de los lados su longitud; ues, aunque sus logaritmos ya constan en la resolución de los triángulos y son los que se uti- zan en la casilla correspondiente, se completarían así los datos.

Cuando se repite en sentido inverso un lado, no se consignan su logaritmo y los del seno coseno de su azimut y solo se cambian de lugar sus coordenadas á la estación, porque son s mismas con signo contrario; aunque se podría dejar de determinar las correspondientes al rigen, las consignamos porque comprueban los cálculos y nada importa que resulten repetidas n distintos triángulos y las de partida en cada uno: todas las precauciones que se tomen para vitar equivocaciones en las sumas y restas son pocas, como saben bien los que se dedican á sta clase de sencillos cálculos.

Para hallar *la 3.ª coordenada ó sea la altura relativa entre dos vértices*, conociendo la dis- ancia que los separa por la resolución de los triángulos y el ángulo zenital, la altura del ins- rumento y la del punto de mira por la observación directa, se utiliza la ya repetida fórmula

$$z = D. \text{ Cot. } \varphi + (i - m)$$

n observación recíproca; esto es, del 1.º al 2.º y de este á aquel, con lo que se conseguirán dos alores de signo contrario, que reducidos al mismo darán por su media el buscado eliminado el error de *refracción del aire*, pues será igual y de signo contrario si lo son las condiciones tmosféricas en el momento de las dos observaciones.

Si por cualquier motivo no pudiera utilizarse la observación recíproca, habrá que corregir os resultados de aquel error, segun ya indicamos en el número 50 del vol. I y ahora comple- arémos siguiendo á Salmoiraghi, pues la modificación que se hace en el ángulo zenital φ nos ervirá tambien para el cálculo de la Latitud.

Consiguientemente á la refracción de la luz el ángulo zenital resulta menor que el verda- ero en la cantidad del indicado error y como este depende en primer lugar de la distancia enital y despues de la temperatura y presión atmosféricas, hay que tener en cuenta estas con- iciones, en cuanto sea posible.

«Porro, dice Salmoiraghi (1), ha calculado con las fórmulas de las páginas 264 á 271 de la *lecánica celeste de Laplace* (IV vol.) las Tablas que se encuentran al fin de este Manual (las ue insertamos á continuación de la antes citada). — La corrección está formada por cuatro alores que se hallan uno despues de otro. Los tres primeros son tres factores y por eso están ados por sus logaritmos con cuatro cifras; la 4.ª es una corrección que se ha de restar del pro- ucto de las otras tres.»

«Designando por *d* φ la corrección que se ha de hacer en las distancias zenitales medidas, l ángulo φ corregido será:

$$\varphi = \text{ángulo medido} + d\,\varphi$$

»Ahora para calcular d φ en *décimo-miligrados* (segundos centesimales) se ha de resolver la encilla fórmula siguiente:

$$\text{Log. } d\,\varphi = a + b + c$$

(1) Les Cleps..., pág. 95.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS PLANIMÉTRICAS PROVISIONALES DE LOS VÉRTICES

Ángulos	Vértices	Ángulos en el vértice corregidos	Lados	Azimutes	LOGARITMOS: De los senos y cosenos	LOGARITMOS: De los lados	LOGARITMOS: Sumas	COORDENADAS PARCIALES x +	COORDENADAS PARCIALES x −	COORDENADAS PARCIALES y +	COORDENADAS PARCIALES y −	COORDENADAS AL ORIGEN X	COORDENADAS AL ORIGEN Y	Vértices
I	A^{C}_{B}	67° 25′ 38″	A C	144° 49′ 41″	$\bar{1}$‘7604467	3‘2958069	3‘0562536	1.138‘29	»	»	1.615‘31	50.000	20.000	A
					1‘9124490		3‘2082559							
	C^{B}_{A}	43° 12′ 19″	C B	8° 2′ 0″	$\bar{1}$‘1453493	3‘2899825	2‘4353318	272‘48	»	1.930‘63	»	51.138‘29	18.384‘69	C
					$\bar{1}$‘9957172		3‘2856997					51.410‘77	20.315‘32	B
	B^{A}_{C}	69° 22′ 3″	B A	257° 24′ 3″	$\bar{1}$‘9894142	3‘1600421	3‘1494563	»	1.410‘77	»	315‘32	50.000‘00	20.000‘00	A
					$\bar{1}$‘3387135		2‘4987556							
		180° 00′ 00″												
II	B^{C}_{O}	80° 39′ 53″	B C	188° 2′ 0″	»	»	»	»	272‘48	»	1.930‘63	51.410‘77	20.315‘32	B
	C^{O}_{B}	60° 38′ 9″	C O	68° 40′ 9″	$\bar{1}$‘9691808	3‘4881489	3‘4573297	2.866‘35	»	1.119‘32	»	51.138‘29	18.384‘69	C
					$\bar{1}$‘5608061		3‘0489550					54.004‘64	19.504‘01	O
	O^{B}_{C}	38° 41′ 58″	O B	287° 22′ 7″	$\bar{1}$‘9797323	3‘4342169	3‘4139492	»	2.593‘87	811‘31	»	51.410‘77	20.315‘32	B
					$\bar{1}$‘4749705		2‘9091874							
		180° 00′ 00″												
	O^{C}_{I}	50° 38′ 53″	O C	248° 40′ 9″	»	»	»	»	2.866‘35	»	1.119‘32	54.004‘64	19.504‘01	O
	C^{I}_{O}	86° 13′ 33″	C I	154° 53′ 42″	$\bar{1}$‘6276510	3‘5416714	3‘1693224	1.476‘80	»	»	3.151‘92	51.138‘29	18.384‘69	C
					$\bar{1}$‘9569037		7‘4985751					52.615‘09	15.232‘77	I
	I^{O}_{C}	43° 7′ 34″	I O	18° 1′ 16″	$\bar{1}$‘4904745	3‘6523998	3‘1428743	1.389‘55	»	4.271‘24	»	54.004‘64	19.504‘01	O
					$\bar{1}$‘9781543		3‘6305541							
		180° 00′ 00″												

lado despues el valor de $d\varphi$ se le restará una última corrección, d, (1) en número de decimo-ígrados. Por consiguiente

$$d\varphi = (d\varphi), - d. \quad (2)$$

»Las Tablas de refracción I, II, III y IV dan los valores a, b, c y d con el argumento res-tivamente de la *distancia zenital medida, la presión atmosférica, la temperatura* (en centígra-) y otra vez la *distancia zenital.*

TABLA I

ARA CALCULAR LA REFRACCIÓN ASTRONÓMICA EN DECIMOMILÉSIMAS DE GRADO

a) Logaritmo refracción media para t = 35 grados cent. y H = o'500 mm.

	a	Diferencias	φ	a	Diferencias	φ	a	Diferencias
1	o'1945		34	1'8049		67	2'2758	
2	o'5190	3245	35	1'8201	152	68	2'2917	159
3	o'7045	1855	36	1'8352	151	69	2'3080	163
4	o'8341	1296	37	1'8503	151	70	2'3246	166
5	o'9283	942	38	1'8651	148	71	2'3412	166
6	1'0056	773	39	1'8798	147	72	2'3584	172
7	1'0752	696	40	1'8943	145	73	2'3763	179
8	1'1352	600	41	1'9087	144	74	2'3948	185
9	1'1878	526	42	1'9229	142	75	2'4136	188
0	1'2333	455	43	1'9370	141	76	2'4331	195
1	1'2772	439	44	1'9509	139	77	2'4530	199
2	1'3158	386	45	1'9647	138	78	2'4736	206
3	1'3513	355	46	1'9784	137	79	2'4952	216
4	1'3841	328	47	1'9921	137	80	2'5173	221
5	1'4146	305	48	2'0057	136	81	2'5407	234
6	1'4431	285	49	2'0194	137	82	2'5652	245
7	1'4703	272	50	2'0330	136	83	2'5909	257
8	1'4963	260	51	2'0466	136	84	2'6178	269
9	1'5211	248	52	2'0603	137	85	2'6463	285
0	1'5448	237	53	2'0740	137	86	2'6763	300
1	1'5675	227	54	2'0876	136	87	2'7079	316
2	1'5893	218	55	2'1013	137	88	2'7415	336
3	1'6104	211	56	2'1152	139	89	2'7775	360
4	1'6310	206	57	2'1291	139	90	2'8163	388
5	1'6509	199	58	2'1430	139	91	2'8594	431
6	1'6702	193	59	2'1571	141	92	2'9066	472
7	1'6888	186	60	2'1713	142	93	2'9587	521
8	1'7068	180	61	2'1857	144	94	3'0166	579
9	1'7242	174	62	2'2002	145	95	3'0789	623
0	1'7411	169	63	2'2149	147	96	3'1522	733
1	1'7576	165	64	2'2298	149	97	3'3364	842
2	1'7737	161	65	2'2449	151	98	3'3338	974
3	1'7895	158	66	2'2603	154	99	3'4465	1127
4	1'8049	154	67	2'2758	155			

(1) Como se vé en la Tabla IV esta corrección solo tiene importancia en las grandes distancias zenitales, ó en el cálculo de las alturas relativas de los vértices y ninguna en las observaciones estelares circumpolares.

(2) Prévot deduce y admite (vol. II, pág. 218) la formula siguiente:

$$Z = K \frac{\text{Cot.}\left(\delta + p - \frac{C}{2}\right)}{\text{Cos.}\frac{C}{2}}$$

que C es el ángulo en el centro que se calcula fácilmente en función de la distancia (K), δ es el zenital y p el or de refracción, que según la experiencia se considera igual á o'08 C.

18

TABLA II

PARA CALCULAR LA REFRACCIÓN ASTRONÓMICA EN DECIMOMILÉSIMAS DE GRADO

b) Logaritmo factor variación presión H.

H	*b*	H	*b*	H	*b*	H	*b*
mm		mm		mm		mm	
500	0'0000	540	0'0334	580	0'0645	620	0'0934
1	9	1	342	1	652	1	941
2	17	2	350	2	660	2	948
3	26	3	358	3	667	3	955
4	35	4	366	4	674	4	962
505	0'0043	545	0'0374	585	0'0682	625	0'0969
6	52	6	382	6	689	6	976
7	60	7	390	7	697	7	983
8	69	8	398	8	704	8	990
9	77	9	406	9	711	9	997
510	0'0086	550	0'0414	590	0'0719	630	0'1004
1	35	1	422	1	726	1	1011
2	103	2	430	2	734	2	1017
3	111	3	438	3	741	3	1024
4	120	4	445	4	748	4	1031
515	0'0128	555	0'0453	595	0'0755	635	0'1038
6	137	6	461	6	763	6	1045
7	145	7	469	7	770	7	1052
8	154	8	477	8	777	8	1059
9	162	9	484	9	785	9	1065
520	0'0170	560	0'0492	600	0'0792	640	0'1072
1	179	1	500	1	799	1	1079
2	187	2	508	2	806	2	1086
3	195	3	515	3	813	3	1092
4	204	4	523	4	821	4	1099
525	0'0212	565	0'0531	605	0'0828	645	0'1106
6	220	6	538	6	835	6	1113
7	228	7	546	7	842	7	1119
8	237	8	554	8	849	8	1126
9	245	9	561	9	856	9	1133
530	0'0253	570	0'0569	610	0'0864	650	0'1139
1	261	1	577	1	871	1	1146
2	269	2	584	2	878	2	1153
3	278	3	592	3	885	3	1159
4	286	4	599	4	892	4	1166
535	0'0294	575	0'0607	615	0'0899	655	0'1173
6	302	6	615	6	906	6	1179
7	310	7	622	7	913	7	1186
8	318	8	630	8	920	8	1193
9	326	9	637	9	927	9	1199

Continuación de la Tabla II

H	*b*	H	*b*	H	*b*	H	*b*
mm		mm		mm		mm	
660	0'1206	700	0'1461	740	0'1703	780	0'1931
1	1212	1	1467	1	1708	1	1936
2	1219	2	1474	2	1714	2	1942
3	1225	3	1480	3	1720	3	1948
4	1232	4	1486	4	1726	4	1953
665	0'1239	705	0'1492	745	0'1732	785	0'1959
6	1245	6	1498	6	1738	6	1965
7	1252	7	1504	7	1744	7	1970
8	1258	8	1511	8	1749	8	1976
9	1265	9	1517	9	1755	9	1981
670	0'1271	710	0'1523	750	0'1761	790	0'1987
1	1278	1	1529	1	1767	1	1992
2	1284	2	1535	2	1772	2	1998
3	1290	3	1541	3	1778	3	2003
4	1297	4	1547	4	1784	4	2009
675	0'1303	715	0'1553	755	0'1790	795	0'2014
6	1310	6	1559	6	1796	6	2019
7	1316	7	1565	7	1801	7	2025
8	1323	8	1570	8	1807	8	2030
9	1329	9	1576	9	1813	9	2036
680	0'1335	720	0'1582	760	0'1818	800	0'2041
1	1342	1	1589	1	1824	1	2047
2	1348	2	1596	2	1830	2	2052
3	1355	3	1602	3	1836	3	2057
4	1361	4	1608	4	1841	4	2063
685	0'1367	725	0'1614	765	0'1847	805	0'2068
6	1374	6	1620	6	1853	6	2074
7	1380	7	1626	7	1858	7	2079
8	1386	8	1632	8	1864	8	2084
9	1392	9	1638	9	1870	9	2090
690	0'1399	730	0'1644	770	0'1875	810	0'2095
1	1405	1	1649	1	1881	1	2101
2	1411	2	1655	2	1886	2	2106
3	1418	3	1661	3	1892	3	2111
4	1424	4	1667	4	1898	4	2117
695	0'1430	735	0'1673	775	0'1903	815	0'2122
6	1436	6	1679	6	1909	6	2127
7	1443	7	1685	7	1915	7	2133
8	1449	8	1691	8	1920	8	2138
9	1455	9	1697	9	1926	9	2143

TABLA III

PARA CALCULAR LA REFRACCIÓN ASTRONÓMICA EN DECIMOMILÉSIMAS DE GRADO

c) Logaritmo factor variación temperatura t.

T	c	T	c	T	c	T	c
+ 35	0'0000	+ 17	0'0282	— 0	0'0564	— 18	0'0882
34	15	16	298	1	581	19	900
33	30	15	0'0314	2	598	20	0'0918
32	46	14	330	3	615	21	937
31	61	13	346	4	633	22	955
30	0'0077	12	363	5	0'0650	23	974
29	92	11	379	6	667	24	993
28	108	10	0'0396	7	685	25	0'1011
27	123	9	412	8	703	26	1030
26	139	8	429	9	720	27	1049
25	0'0154	7	446	10	738	28	1068
24	170	6	462	11	756	29	1087
23	186	5	0'0479	12	773	30	0'1106
22	202	4	496	13	791	31	1125
21	218	3	513	14	809	32	1145
20	0'0234	2	530	15	0'0827	33	1164
19	249	1	546	16	845	34	1183
18	266	0	564	17	863	35	1203

TABLA IV

PARA CALCULAR LA REFRACCIÓN ASTRONÓMICA EN DECIMOMILÉSIMAS DE GRADO

d) Corrección siempre sustractiva.

φ	d	φ	d	φ	d
100c	»	88c	1'31	76c	0'17
99	»	87	1'03	75	0'15
98	»	86	0'83	74	0'14
97	84'20	85	0'67	73	0'12
96	35'47	84	0'55	72	0'11
95	18'18	83	0'47	71	0'10
94	13'26	82	0'40	70	0'09
93	6'63	81	0'35	69	0'08
92	4'44	80	0'29	68	0'07
91	3'12	79	0'25	67	0'06
90	2'27	78	0'23	66	0'06
89	1'71	77	0'20		

101 — Cálculo de las coordenadas geográficas de los vértices de la triangulación y otros puntos mediante el conocimiento de las de uno de aquellos y las planimétricas de todos.

Teniendo en cuenta que con lados de 25 kilómetros el triángulo plano coincide con el esférico y el esferoidico, á lo mas será necesario determinar las coordenadas geográficas de los vértices que disten entre si normalmente aquella cantidad; esto es, cuyas abscisas y ordenadas difieran en 25 kilómetros, para conseguir las de los vértices y puntos intermedios mediante la suma de las del vértice correspondiente con las coordenadas planimétricas á él referidas reducidas á magnitudes angulares.

Utilizarémos al efecto las fórmulas empleadas por el Depósito de la Guerra de Francia.

Supongamos que se conozcan las coordenadas geográficas de uno de los vértices de la triangulación y que deseémos deducir las de los demas que distan entre si próximamente 25 kilómetros.

Llamando:

l y L la Longitud y Latitud del punto de coordenadas geográficas conocidas ó de partida;
l' y L' las mismas que se desean conocer para otro vértice ó de llegada;
K el lado geodésico ó distancia *en metros* entre los dos vértices indicados;
θ el azimut de este lado sobre el horizonte del vértice de partida y
θ' el azimut del mismo lado sobre el horizonte del vértice de que se desean conocer las coordenadas geográficas ó de llegada

se tiene:

$$L' = L + P\,K\,\text{Cos.}\,\theta - Q\,K^2\,\text{Sen.}^2\,\theta$$

$$l' = l + \frac{R\,K\,\text{Sen.}\,\theta}{\text{Cos.}\,L'} = l + R\,K\,\text{Sen.}\,\theta\,\text{Sec.}\,L'$$

$$\theta' = \theta + 200^c + (l' - l)\,\text{Sen.}\,\frac{L + L'}{2}\ (1)$$

En cuyas fórmulas:

$$P = \frac{(1 - e^2\,\text{Sen.}^2\,L)^{3/2}}{a\,\text{Sen.}\,1''}\,(1 + e^2\,\text{Cos.}^2\,L)$$

$$Q = \frac{(1 - e^2\,\text{Sen.}^2\,L)\ (1 + e^2\,\text{Cos.}^2\,L)}{2\,a^2\,\text{Sen.}\,1''}\,\text{Tang.}\,L; \quad R = \frac{(1 - e^2\,\text{Sen.}^2\,L)^{3/2}}{a\,\text{Sen.}\,1''}$$

Como los valores de los factores P, Q y R no contienen otra variable que la Latitud, L, se han construido Tablas que evitan su cálculo y Sanguet las comprende en su Tabla II, que copiamos á continuación, incluyendo otros dos O y S, que se utilizan en las fórmulas

$$X = O\,(l' - l)\,\text{Cos.}\,L' \quad ; \quad Y = S\,(L' - L + Q\,X^2)$$

y que valen respectivamente

$$O = \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad S = \frac{1}{p}$$

debiendo advertir que Sanguet ha utilizado para

a = semi-eje mayor terrestre = 6.376.986 metros
e^2 = cuadrado de la excentricidad = o'0064695 metros

(1) Las diferencias de Longitudes y Latitudes de todas estas fórmulas deben expresarse en *segundos centesimales* ó decimiligrados.

La 1.ª columna (L) de la Tabla siguiente contiene las latitudes en grados centesimales, la tres encabezadas Δ (diferencia) contienen las diferencias logarítmicas para 1c de diferencia de Latitud. La 1.ª es comun á Log. P y Log. S; la 2.ª corresponde solo á Log. Q y la 3.ª es comun á Log. R, Log. O y Log. N.

Para que se vea la forma sencilla en que se disponen estos cálculos creémos oportuno copiar el 1.º de los problemas consignados por Sanguet en sus Tablas (página 5ª).

LOGARITMOS DE LOS FACTORES P, S, Q, R, O Y DE LA NORMAL N

entre 30c y 65c de latitud.

L	Log. P	Δ	Log. S	Log. Q	Δ	Log. R	Δ	Log. O	Log. N
30	9'00 120	5	0'99 880	1'602	17	8'99 898	2	1'00 102	6'80 491
31	115	6	885	619	16	896	2	104	492
32	109	6	891	635	16	894	2	106	494
33	103	5	897	651	16	892	2	108	496
34	098	6	902	667	15	890	2	110	498
35	9'00 092	6	0'99 908	1'682	15	8'99 888	2	1'00 112	6'80 500
36	086	6	914	697	15	886	2	114	502
37	080	6	920	712	15	884	2	116	504
38	074	6	926	727	15	882	2	118	506
39	068	7	932	741	14	880	2	120	508
40	9'00 061	6	0'99 939	1'756	15	8'99 878	2	1'00 122	6'80 510
41	055	6	945	770	14	876	2	124	512
42	049	7	951	784	14	874	2	126	514
43	042	6	958	798	14	871	3	129	517
44	036	7	964	812	14	869	2	131	519
45	9'00 029	6	0'99 971	1'826	14	8'99 867	2	1'00 133	6'80 521
46	023	7	977	839	13	865	2	135	523
47	016	6	984	853	14	863	2	137	525
48	010	7	990	866	13	861	2	139	527
49	003	7	997	880	14	858	3	142	530
50	8'99 996	6	1'00 004	1'894	14	8'99 856	2	1'00 144	6'80 532
51	990	7	010	907	13	854	2	146	534
52	983	6	017	921	14	852	2	148	536
53	977	7	023	934	13	849	3	151	539
54	970	7	030	948	14	847	2	153	541
55	8'99 963	6	1'00 037	1'962	14	8'99 845	2	1'00 155	6'80 543
56	957	7	043	975	13	843	2	157	545
57	950	6	050	989	14	841	2	159	547
58	944	6	056	2'003	14	839	3	161	549
59	938	7	062	017	14	836	2	164	552
60	8,99 931	6	1'00 069	2'031	15	8'99 834	2	1'00 166	6'80 554
65	900		100	105		824		176	564

N. B. Las diferencias de Longitudes, Latitudes y azimutes, están expresadas en segundos centesimales.

mos determinar las coordenadas geográficas de los vértices de la triangulación, á cuyo efecto será necesario hacerlo de la Latitud y Longitud de uno de ellos.

Entre los diferentes medios de determinar la *Latitud* de un punto elegimos los del paso de la estrella polar por el meridiano por ser los mas sencillos y dar por supuesto que se haya determinado previamente este, sino se hiciesen ambas cosas á la vez.

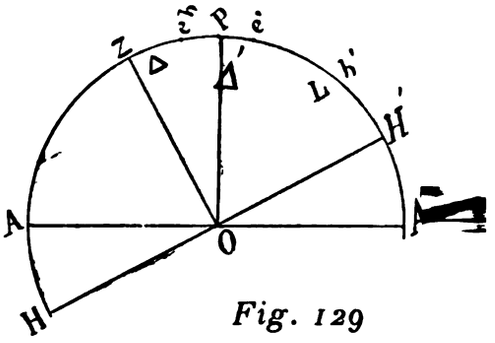


Fig. 129

1.° *Por el doble paso de la polar por el meridiano.*

La Latitud del lugar de observación, segun en la figura 129 se indica, está representada por la altura del polo, P, sobre el horizonte H H' ó sea P H'; por consiguiente si llamamos h y h' las alturas de los pasos superior é inferior de la estrella por el meridiano, $\frac{h+h'}{2} = L$ y como aquellas alturas son complemento de las distancias zenitales Δ y Δ' y cada una de estas se obtiene añadiendo á las medidas δ y δ' el error de refracción r y r' determinado segun hemos dicho en el número 100, resultará:

$$h = 90° - \Delta = 90° - (\delta + r)$$
$$h' = 90° - \Delta' = 90° - (\delta' + r')$$

$$\frac{h+h'}{2} = 90° - \frac{1}{2}(\delta + \delta' + r + r') = L$$

Como los errores que se cometan en la medición de los ángulos de altura ó los zenitales influyen directamente en la Latitud, y la temperatura y la presión en el error de refracción, se comprende que se han de tomar estos datos y nivelar el aparato con todo cuidado, teniéndole bien comprobado y corregido y utilizar la regla de Bessel en las observaciones, para lo que dá lugar la marcha lenta de la polar y su pequeña variación de altura en sus pasos por el meridiano.

2.° *Por la altura de un solo paso de la polar por el meridiano.*

Conociendo la distancia zenital Z e = Δ por la medición directa corregida del error de refracción, y por las Tablas astronómicas la declinación de la estrella, D = A e, se tiene la Latitud A Z = D − Δ, cuando se utiliza el paso superior y si se emplea el paso inferior, e', se tiene:

$$A\,Z \text{ ó } P\,H' = 180° - (A'\,e' + Z\,e') \text{ ó } L = 180° - (D + \Delta')$$

Entre los diferentes procedimientos utilizados para *determinar la Longitud* de un punto el mas sencillo para el Topógrafo consiste en determinar por las alturas correspondientes de una estrella conocida la hora media segun el reloj del observador, de su paso por el meridiano, buscar en las Efemérides su ascensión recta, reducir aquella á tiempo sideral y la diferencia expresará en tiempo la correspondiente de la Longitud del lugar relativamente al del meridiano á que la ascensión recta se refiera.

Solo en casos muy raros el Topógrafo tendrá necesidad de determinar con alguna precisión la Latitud y Longitud y en tal caso le conviene prepararse con las descripciones mas detalladas y precisas que se encuentran en los Tratados de Geodesia; ordinariamente conseguirá su objeto basando sus triangulaciones en las geodésicas preexistentes ó refiriendo sus vértices á ejes rectos bien orientados, por todo lo que nos hemos limitado á las breves indicaciones que dejamos consignadas.

ARTÍCULO SEGUNDO

PRÁCTICA DE LAS TRIANGULACIONES TOPOGRÁFICAS

103 — Clasificación de la materia.

La detallada explicación que en el artículo anterior hemos consignado sobre cada una de las diferentes cuestiones, que se han de resolver al hacer una triangulación topográfica, nos permitirá en este ser relativamente breves; pues en muchas podrémos limitarnos á simples referencias á lo entonces dicho y en otras bastarán á su inteligencia sencillas indicaciones; para acomodar la exposición de la materia á las necesidades de la práctica creémos oportuno ocuparnos sucesivamente:

1.° Del proyecto de la triangulación y marcación de todos los vértices;
2.° De la elección, medición y orientación de las bases de partida y de comprobación;
3.° De la medición de los ángulos y sus primeras comprobaciones y compensaciones;
4.° De la resolución de los triángulos, error de cierre y compensación definitiva y
5.° Del cálculo de las coordenadas topográficas y geográficas de los vértices.

104 — Proyecto de la triangulación y marcación de todos los vértices.

Este trabajo preliminar ha de variar naturalmente segun que del terreno, en que se haya de operar, se haya ó no hecho el mapa topográfico en la escala de $^1/_{25000}$ por el Instituto Geográfico y Estadístico, ó solo las triangulaciones geodésicas de 1.°, 2.° y 3.er órden, ó simplemente la primera ó dos primeras ó que no se haya realizado ninguna.

En el 1.er caso, cuando se disponga del mapa topográfico en la escala de $^1/_{25000}$, sobre él se hará el estudio de las condiciones generales del terreno y como se conocerá la situación de los vértices de la triangulación geodésica y desde ellos se pueden determinar por trisección directa, inversa ó mixta dos ó tres puntos interiores en cada triángulo de 3.er órden, que disten entre sí 5 kilómetros ó menos, á esto quedaría reducido el trabajo de la triangulación; pues sería innecesario medir bases, ni orientarlas, ya que se utilizarían la orientación y longitud de los lados de 3.er órden geodésico y con referencia á ellos y á las coordenadas de sus vértices se fijaría la situación de los que se considerasen necesarios para servir de comprobación á las poligonales de 1.er órden ó principales.

Solo en el caso de que se considerase necesario (1) hacer una triangulación con lados menores de 2000 metros ó menos, lo sería hacer el proyecto de esta como si las geodésicas no existieran, pero cuidando de comprender entre sus vértices los de estas, no solo para enlazarlas entre sí sino para comprobar la que se pretende realizar; porque no consideramos oportuno descender directamente de los triángulos de 3.er órden geodésico á estos pequeños topográficos para evitar el trabajo de la medición de la base, ya que resulta grandísima confusión en los triángulos así deducidos é intersecciones de malas condiciones y un trabajo mucho mas penoso en los cálculos necesarios para fijar la situación de tales vértices.

En corroboración de todo esto ponemos á continuación (fig. 130), reducida á la mitad de su escala, la figura 2.ª de la lámina 1.ª de la Memoria del Ingeniero Sr. Gattoni, que la copió de las Instrucciones prusianas como ejemplo de la manera de descender de los triángulos de 4.° órden geodésico á los catastrales; pues basta fijar en ella la atención para rechazar tal procedimiento.

(1) Téngase en cuenta lo dicho sobre la longitud de los lados de los triángulos en el número 93.

En el 2.° caso, cuando estén hechas las triangulaciones geodésicas de los tres órdenes, pero no el relleno del mapa topográfico al $^1/_{25000}$, se procederá como en el caso anterior con la sola diferencia de no poder fijar aproximadamente los puntos interiores sin previo reconocimiento del terreno.

En ambos casos conviene hacer este para ver si se conservan bien marcados y visibles los vértices geodésicos y hacerlo con los interiores cuando se hayan de determinar por trisección directa, que si aquellos son accesibles es lo mejor y en este caso al mismo tiempo se puede hacer la medición de los ángulos para evitar viajes repetidos: si esto no pudiera realizarse ó porque hubieran desaparecido algunos ó porque no fueran visibles, se marcarán en la forma que

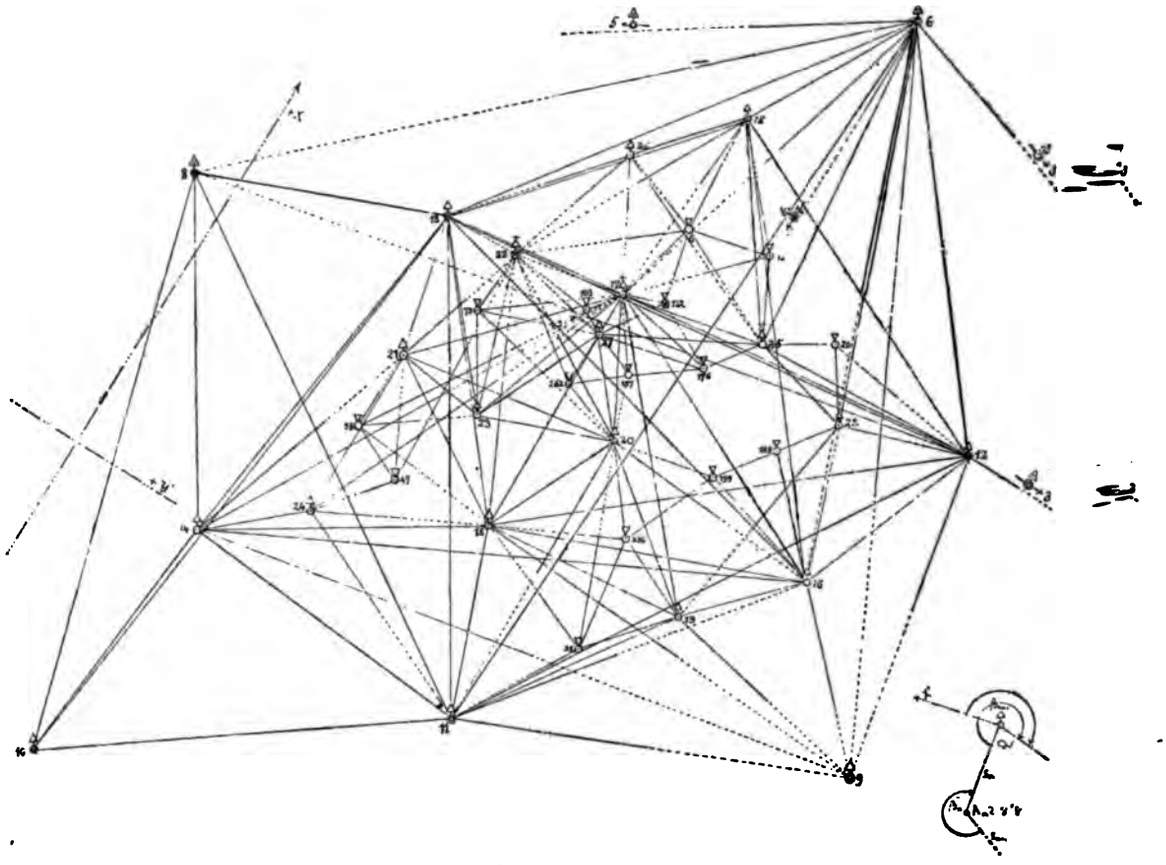


Fig. 130

luego dirémos, se fijará aproximadamente la situación de los puntos interiores utilizando una brújula, un sextante de bolsillo ó mejor una sencilla plancheta y se aplazará para mas adelante la medición de los ángulos.

En el tercer caso, cuando solo se haya hecho en el país la triangulación de 1.er órden ó esta y la del 2.°, se marcarán sus vértices en un mapa del territorio ó en su defecto mediante sus coordenadas se situarán en el papel en que se ha de hacer el cróquis de la triangulación en la escala de $^1/_{25000}$ ó $^1/_{50000}$, segun la extensión del terreno y longitud media probable de los triángulos normales, no solo para facilitar la construcción de aquel sino para comprenderlos entre los vértices de la nueva triangulación, que se hará por lo demas con las condiciones de las independientes, cuidando de hacerlos visibles al practicar el reconocimiento del terreno.

En todos los casos aludidos se buscarán y establecerán los vértices perdidos utilizando la descripción que de su situación se debió hacer al establecerlos, segun se dispone en las Instrucciones del Instituto y para evitar tener que reclamarle estos y otros datos sobre las condiciones de los vértices geodésicos ya determinados, seria bueno que, como el Instituto italiano, publi-

ara y pusiera á disposición del público á bajo precio una noticia detallada de la triangulación eodésica realizada, comprendiendo:

1.° Su representación gráfica con indicación de las hojas topográficas ya publicadas.

2.° El nombre, situación é indicación descriptiva para el hallazgo de sus vértices de los istintos órdenes.

3.° Sus coordenadas geográficas y altitud sobre el nivel del mar.

4.° Las de los pueblos principales con indicación precisa del punto á que se refieren.

5.° El azimut y longitud de los lados de las triangulaciones de cada órden geodésico.

6.° La altitud de los puntos de comprobación de la nivelación de precisión y finalmente

7.° Otras noticias interesantes que puedan servir para relacionar los trabajos especiales on el Mapa general y aquellos entre sí.

Cuando por no existir la triangulación geodésica de 3.er órden ó que por ser sus lados muy randes relativamente á los de la que se desea realizar, no fuera conveniente deducir directa- ente esta de aquellos, empezará el Topógrafo por darse cuenta de las condiciones generales el terreno desde dos ó tres puntos elevados y convenientemente situados en compañía de bue- os prácticos, que le den noticia exacta sobre los límites del terreno que ha de ser objeto del abajo, ríos y caminos de todas clases que le cruzan, grupos de edificios y los aislados mas no- bles que en él se hallaren y especialmente los nombres y demas condiciones de los puntos ue puedan servir de vértices de la triangulación y los que lo fueran geodésicos, si allí se en- ntraran, en cuya elección se han de tener en cuenta las condiciones señaladas en los números , 92 y 93 para ellos como puntos de estación y de mira, la forma mas conveniente de los iángulos y la longitud de los lados, tomando nota detallada y ordenadamente de tales datos, ue aclarará mediante un cróquis, en que las direcciones se determinarán con una brújula; sextante de bolsillo ó una sencilla plancheta y las distancias á la vista fijándose especial- ente en los puntos que puedan servir de vértices principales de la triangulación, esto es, de ntro á los polígonos en que se podrá subdividir y la cadena ó cadenas, que han de utilizarse ra relacionar los distintos grupos de polígonos ó servir de base á la poligonación de los valles montañas que se quieran determinar, fijando ademas su atención sobre los sitios en que po- rán medirse las bases de partida y comprobación.

Conviene hacer esta inspección general desde dos ó tres puntos, no solo porque así lo exija extensión del terreno sobre que se ha de operar, sino tambien para ver los mismos acciden- s en distintos horizontes y, aunque sea molesto este trabajo preliminar, no debe prescindirse e él, porque dá base segura para formar el plan general de la triangulación y para elegir con cierto los procedimientos de poligonación y parcelación mas convenientes.

Elegidos en principio los centros de los polígonos, se trasladará el Topógrafo con el perso- al auxiliar á uno de ellos, que determinará con las condiciones indicadas en el número 91 y marcará segun se dispone en el artículo 12 de la Instrucción del Instituto Geográfico y Es- dístico, con un taladro de 6 á 8 centímetros de diámetro y de 40 á 50 de profundidad, en uyo fondo se clavará una estaca, llenándole despues completamente de polvo de carbón y cu- riéndolo todo con un mojón piramidal de tierra ó piedras, de 50 (mejor seria de 75 para ha- erle mas visible) centímetros de altura, y que tenga por base un triángulo de un metro de do. Cuando los vértices se situen en roca, el taladro será del mismo diámetro; pero su pro- ndidad se reducirá á 10 centímetros, quedando colocado en el centro de un triángulo, cuyos dos, grabados á cincel en la misma roca, tengan 20 centímetros de longitud. Estas señales se eferirán á tres objetos cercanos y fijos, como árboles, cercas, rocas, etc., los cuales se señalarán rabando las iniciales T. T. Cuando no haya objetos próximos á que referir un vértice, se cla- rán tres estacas á menos de 20 metros de él, que servirán de referencias.

En Italia se utiliza en lugar de la estaca subterránea y polvo de carbón un tubo de arcilla cida enterrado á la misma profundidad.

Cuando los puntos son esquinas ó paredes de edificios, se clavan á ellos cuadradillos de adera con paño de banderola.

Los mojones indicados se blanquean con lechada de cal para que se vean á gran distancia y en su centro se clava para el señalamiento definitivo durante los trabajos de levantamiento del plano un cuadradillo de madera de 3 metros de largo por 4 centímetros de escuadría con paño de banderola por ser mas económico que las astas con esta que se venden en el comercio y, para precisar despues las punterías, á la altura de 2 ó 2'5 metros se puede fijar una esfera de madera (1) como digimos al hablar de la poligonación con comprobaciones sucesivas.

Mientras se hace la marcación del vértice, el Topógrafo con ayuda de los guías prácticos, de cuyo nombre y vecindad tomará nota detallada, hace en cuaderno apropiado la descripción de su situación con relación á la casa ó grupo de ellas mas conocido expresando en que consiste, su nombre, pertenencia del predio y parcela en que se encuentra y referencias, á fin de poderle encontrar y reponer si desapareciese.

En el artículo 14 de la Instrucción del Instituto Geográfico se previene que se *designe cada vértice* con el nombre de la localidad, en que se halle situado, cuidando de escribir los nombres con su verdadera ortografía; esto es conveniente en el proyecto de triangulación para evitar dudas y equivocaciones; pero es algo molesto despues en las referencias de los registros: en la figura 119 vimos que en la triangulación de Jaca se utilizaron las letras mayúsculas al mismo objeto, si bien en los estados se cuida de consignar al lado de cada estación el nombre correspondiente; pero como todo esto produciría confusión en el plano general, persistimos en que conviene adoptar la designación propuesta en el número 56 del volúmen I, si bien en el proyecto de triangulación y en los estados de medición de sus ángulos se puede poner al lado de los números romanos azules, que designen los vértices en la casilla de observaciones sus nombres y señalar los triángulos con número ordinal ó cardinal negro.

Aunque parezca nimia esta explicación no deja de tener importancia para evitar la confusión que se observa en los planos catastrales prusianos por no haberse hecho la oportuna distinción en las designaciones y expresión de los datos y noticias, que allí se consignan con los mismos signos.

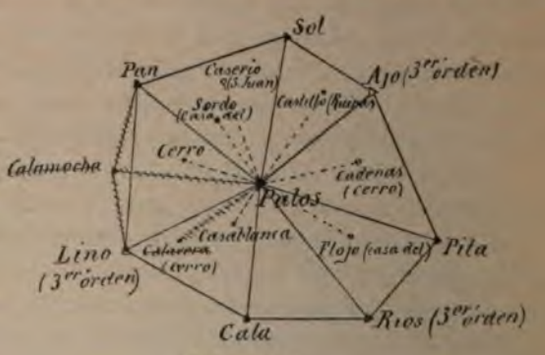


Fig. 131

Si alguno ó algunos de los vértices de los triángulos que han de concurrir en el en que se encuentra el Topógrafo no pudieran determinarse con seguridad por encontrarse en una loma ó cerro raso, lo que se observará al llegar al vértice, se mandará al Ayudante ó á un peón inteligente que allí coloque una banderola en sitio que reuna las condiciones indicadas para los vértices, lo cual podría realizarse mientras se hace la marcación y descripción del en que se encuentran y terminados estos preparativos con el auxilio de una brújula sencilla se medirán los rumbos á todos los puntos que se supone serán vértices de los triángulos allí concurrentes y á los demas interiores que podrá convenir determinar y con ellos y las distancias á la vista se formará un cróquis, como la figura 131, que copiamos de la Instrucción del Instituto Geográfico y Estadístico, consignando los nombres y rumbos en un estado, como el siguiente, que tambien de allí copiamos.

Como en el cróquis aparece se cuida de elegir como vértices todos los geodésicos que en el terreno se encuentren.

---

(1) Para evitar el gasto que motivaría la construcción de las esferas se pueden substituir por 8 segmentos que clavados convenientemente en el cuadradillo achaflanado en el punto que convenga, producirán el mismo efecto y puede hacerlos cualquiera carpintero de una aldea. Si las distancias á que se hayan de observar fueran de 4 ó 5 kilómetros, el diámetro de las esferas resultantes podría ser de 25 ó 30 centímetros, que serían mas visibles y su centro se apreciaría fácilmente.

NOMBRE DE LOS OBJETOS	N.		S.		NOTAS
	g	m	g	m	
Calamocha (1)	21	15	201	30	Vértice desechado.
Lino (3.er órden)	64	15	244	30	A la señal.
Cerro	16	15	196	15	A un almendro que existe en lo alto.
Pan	4	30	184	45	A la banderola.
Casa del Sordo	344	15	164	15	Al vértice del tejado.
Caserío de San Juan (punto auxiliar) .	338	30	158	15	A la veleta de la capilla.
Sol	326	10	146	10	A un chozo de paja.
Castillo (Ruinas)	306	45	126	30	Al torreón del Norte.
Ajo (3.er órden)	284	45	105	00	A la señal.
Cadenas (punto auxiliar) . . .	268	15	88	00	A la banderola.
Pita	231	50	51	50	A la piedra que hay en lo alto del cerro.
Casa del Flojo	212	30	32	45	A la chimenea.
Ríos (3.er órden)	179	30	359	15	A la señal.
Cala	139	45	319	30	Se desechó este rumbo por tener mal horizonte el punto visado.
Casablanca	104	15	284	15	A la chimenea.
Calavera	82	30	262	15	A la encina alta. Desechado por no verse desde ningun otro vértice.
Cala	131	30	311	15	Vértice definitivo.

(Media firma del Observador.)

Terminado el trabajo en el 1.er centro de polígono se pasa á otro, en el caso de la figura 131 al llamado Ajo, que haya de servir de centro de otro polígono y sea notable y así se procede de uno en otro determinando, marcando y describiendo todos los vértices principales completando y perfeccionando los cróquis especiales, porque al hacer estación en Ajo, v. gr., sea cualquiera la distancia aceptada para el lado Palos-Ajo, ya los vértices Sol y Pita y otros quedarán mejor determinados por la intersección de los lados de base de los triángulos; pero como para ello es preciso hacer construcciones, que aunque sencillas, son siempre molestas en el campo, hay muchos Topógrafos que no sin razón prefieren para estos trabajos de reconocimiento la plancheta sencilla con declinatoria.

El uso de la plancheta tiene la ventaja de que á poca costa se enriquece el cróquis general con muchos datos interesantes simplificando las descripciones.

En las sucesivas estaciones se ven los puntos antes determinados que resultan inútiles ó invisibles desde ellas y tachándolos se evitan despues observaciones sin valor (2).

---

(1) Los nombres y datos desechados se tachan en el original.

(2) Podría suceder que estos puntos no pudieran servir para vértices de los triángulos normales de la red, pero sí de comprobación á las poligonales y que desde ellos se vieran tres ó mas de aquellos y en este caso se ha de advertir esto para despues fijar su situación por trisección directa ó mixta que simplifica mucho los cálculos especiales y utilizarlos al expresado objeto.

Mediante los cróquis parciales, si se utiliza la brújula sola, se construirá el cróquís general, que se puede obtener directamente con la plancheta, y sobre él, teniendo en cuenta todas las noticias adquiridas, se proyecta la triangulación en la forma indicada por la figura 132, que copiamos del modelo 1 (A) de la repetida Instrucción y en ella se vé que los lados de la triangulación de 3.er órden se marcan con dos líneas, lo mismo se hace con las bases, con una llena los de los triángulos normales, con líneas interrumpidas las visuales que han de servir para determinar por intersección puntos interiores, que se harán llegar á ellos cuando sean estacionables y solo hasta tres milímetros antes sino lo son.

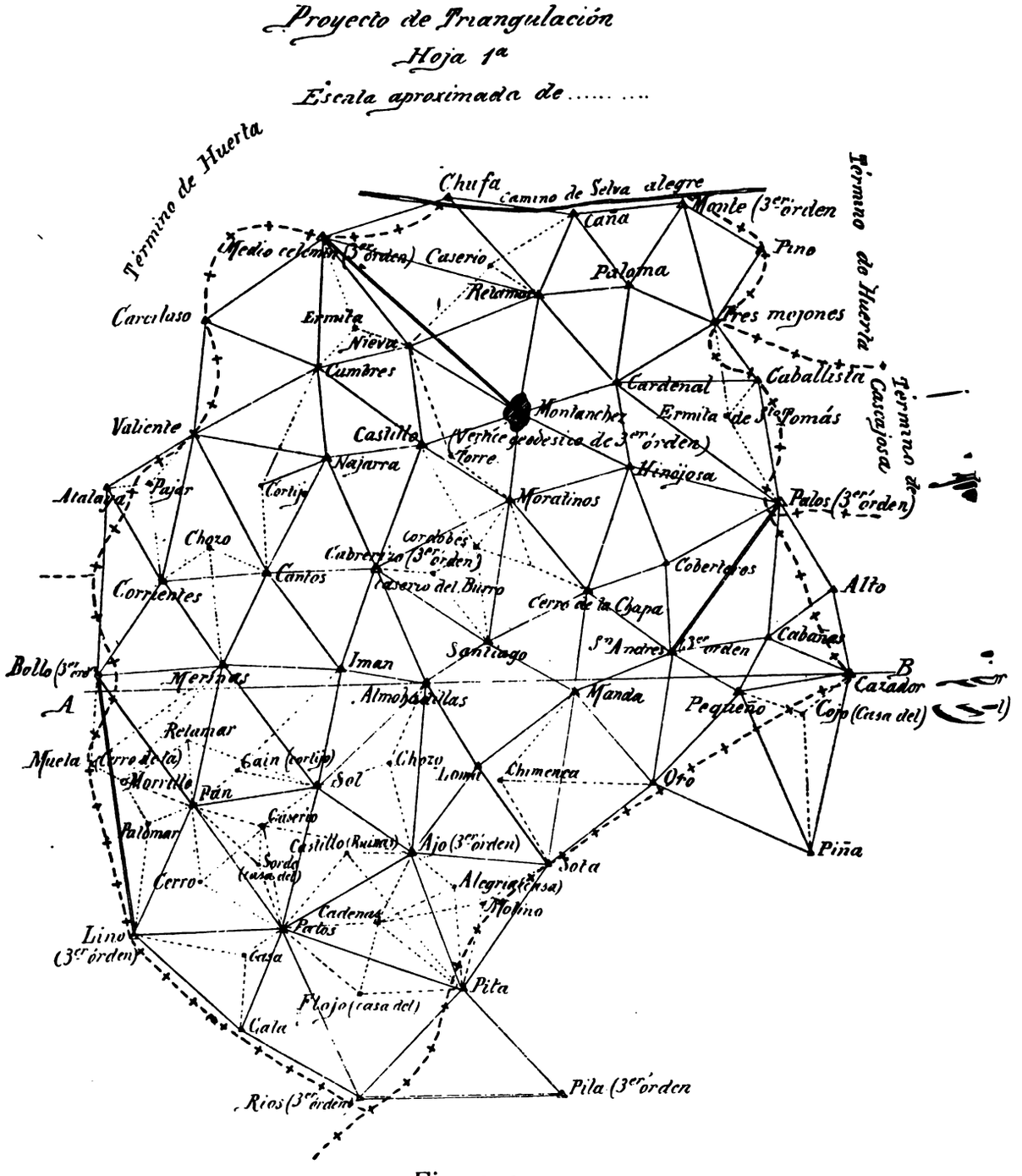


Fig. 132

En la descripción de los vértices se cuidará de consignar si en ellos se puede ó no hacer estación y en este 2.° caso las condiciones de los puntos auxiliares, aunque, como ya hemos dicho, se ha de ver si estos pueden servir de vértices definitivos y los puntos mas visibles solo para su busca, con todo lo que quedará terminado el proyecto de la triangulación.

105 — Elección, medición y orientación de las bases de partida y comprobación.

Al realizar el estudio de las condiciones generales del terreno para formar el proyecto de la triangulación se cuidará de ver los sitios en que mas cómodamente se puedan medir las bases de partida y comprobación teniendo en cuenta lo dicho en el número 94 sobre las condiciones del terreno, la longitud de aquellas y los aparatos disponibles para su medición y se comprende en vista de lo entonces consignado sobre estos puntos y los medios de relacionarlas con un lado de los triángulos normales, que el Topógrafo puede proceder con bastante libertad, porque tiene recursos para resolver todas las dificultades.

Si el terreno lo permite, puede señalar unas bases bastante largas, aunque otras hayan de ser cortas, con tal que unas y otras puedan medirse con suficiente precisión y para relacionarlas con un lado de los triángulos normales puede tambien utilizar los distintos procedimientos entonces indicados; lo que importa es que en la medición directa y en la relación indicada se tomen todas las precauciones señaladas para conseguir la apetecida precisión y á tal efecto, una vez elegida la base, se debe hacerlo con todo cuidado de los vértices de los triángulos, que han de servir para deducir por ellos la longitud y azimut de un lado de los triángulos normales por cualquiera de los procedimientos explicados sin preocuparse de que no pueda utilizarse el mismo procedimiento para todas las bases.

La de partida no debe colocarse, como algunos aconsejan, en el centro del campo de operaciones; creémos por el contrario que, como el 1.er polígono de la triangulación, ha de hallarse en uno de los extremos, á no ser que el terreno sea de grandísima extensión, porque asi se puede proceder con mas órden en la resolución de los triángulos y distribuir mejor las comprobaciones en la base ó bases de este género, aunque sobre esto, como sobre todo se debe dejar amplia libertad al Topógrafo para que resuelva segun las condiciones de cada caso; lo que sí creémos conveniente dejar sentado es que la base de partida se ha de encontrar en el 1.er polígono para resolver definitiva y sucesivamente todos los integrantes de la red, sin perjuicio de las compensaciones que hicieran necesarias los errores que descubrieran las comprobaciones en las bases de este género, que en verdad serán poco importantes si se procede con las precauciones en el articulo anterior aconsejadas.

Al mismo efecto conviene determinar la meridiana de uno de los vértices de la base de partida y de alguna de las mas lejanas de comprobación al objeto de medir el azimut de los lados de los triángulos y de ellos deducir los ángulos de estos en lugar de hacerlo directamente, pues, como ya hemos dicho, esto suministra importantes comprobaciones en los inversos y facilita el descubrimiento del lugar de los errores ratificando ademas las comprobaciones en las bases de este género, en que se haya tambien determinado la meridiana teniendo por supuesto en cuenta la convergencia de los meridianos segun la distancia ortogonal que las separe.

Como en los números 94 y 99 explicamos con suficientes detalles la manera de medir y relacionar las bases de partida y comprobación con los lados de los triángulos normales y de determinar la meridiana y su consiguiente azimut, no creémos necesario detenernos mas en estos particulares y solo sí hacer constar que en nuestro concepto conviene empezar por estos trabajos los definitivos de la triangulación, no solo porque sirviéndoles de base se procederá con mas órden y seguridad, sino porque se harán mejor realizándolos sucesiva y próximamente sin preocupaciones de otro género y utilizando los aparatos en su mejor estado y la práctica que en tales operaciones adquirirá el personal auxiliar; tambien permitirá esto en ciertos casos que distintas brigadas realizen la triangulación empezando por distintas bases y comprobando en

determinados lados de los triángulos normales, aunque esto, sino se tiene bien en cuenta la diferencia del azimut inicial consiguientemente á la convergencia de los meridianos, puede dar lugar á confusiones inconvenientes; sin embargo puede esto evitarse transmitiendo la meridiana de la base de partida á la de otra de comprobación directamente por la poligonal mas corta mediante una operación auxiliar, que, cuando estén marcados todos los vértices, no sería molesta ni grabosa, pues al estacionar en los intermedios se podrían medir los ángulos en ellos concurrentes haciendo innecesario repetir aquellas estaciones; pero, como esto alteraría el órden en las observaciones angulares para la resolución regular de los triángulos, habría que consignar tales datos en registro especial y solo debe utilizarse este medio en casos muy especiales.

106 — Medición de los ángulos y sus primeras comprobaciones y compensaciones.

Puede hacerse todo esto sin grave inconveniente antes de realizarse la medición y orientación de la base en cuanto se tenga hecha la marcación y señalamiento visible de los vértices; pero es preferible proceder en el órden indicado para conseguir directamente el azimut de cada lado.

Despues de lo consignado en los números 95 y 96, poca cosa podemos añadir en este sobre la manera de realizar tan importantes trabajos y conseguir la medida de los ángulos azimutales y verticales con la precisión necesaria, ya se utilice la repetición, ya la reiteración y con uno y otro procedimiento la regla de Bessel para anular los pequeños errores instrumentales; pero no debemos dejar de recomendar que se cuide de comprobar y corregir frecuentemente y con todo cuidado el goniómetro; que se fije sólidamente en cada estación perfectamente centrado y nivelado; que se cuide de centrar la burbuja de los niveles, que acusan esta condición en el momento de la observación; que se enfoquen bien el ocular y el objetivo evitando el error de paralaje; que se mida la altura sobre el terreno del eje de muñones del anteojo; que se dirijan las visuales á puntos bien determinados y de altura conocida de las banderolas ú objetos visados describiéndolos y dibujando la forma, con que aparezcan, en la columna de observaciones del registro y que en la repetición de la medida de los ángulos de los triángulos no se escatime su número, porque invirtiéndose en cada uno muy poco tiempo vale mas pecar por exceso de observaciones, que siempre comprobarán el trabajo, que dejar dudosos los resultados; pero no debe fiarse tanto en el número de observaciones como en la delicadeza y cuidado con que se realicen, porque valen mas dos buenas que seis medianas y así se debe operar sin prisas ni preocupaciones.

Debe tambien evitarse en lo posible movimientos del observador y no perder de vista las indicaciones que de los consiguientes del aparato señale la burbuja de los niveles.

Las observaciones angulares á los vértices de los triángulos concurrentes en la estación se anotarán en los registros insertos en el número 95; pero para que sin introducir en ellos confusión se puedan utilizar las ventajas que se consiguen midiendo algunas direcciones á vértices lejanos y á los puntos principales interiores de los triángulos en la estación concurrentes, se medirán todas estas direcciones con cuidado, sí, pero con una doble observación con anteojo directo é inverso á no ser que se pretendiera con alguno de los vértices lejanos formar grandes triángulos, que comprendieran los normales, en cuyo caso se harán tantas ó mas repeticiones como para los ángulos de los normales y todos estos datos se consignarán en un registro especial, describiendo claramente las condiciones de estos puntos extraordinarios desde alli vistos.

Este trabajo suplementario cuesta poco tiempo y molestia y puede despues servir para utilísimas comprobaciones ó para determinar trigonométricamente por trisección directa ó mixta puntos interiores de los triángulos normales ó finalmente para comprobar la orientación de las poligonales, porque cuando con estas se llega á tales puntos, como los vértices de la triangulación deben quedar clara y visiblemente señalados, no cuesta nada dirigir desde ellos una visual y comprobar con el inverso la orientación trasmitida por la poligonal.

Cuando hubiera que hacer reducciones al centro de estación, se agruparán todas en un re-istro especial con las oportunas referencias y la figura á cada uno correspondiente para evitar udas y los resultados se consignarán en el registro general con las necesarias referencias para ue se encuentre fácilmente donde se hallan los cálculos hechos al efecto: estos registros espe-iales se unirán al general como su complemento y justificación de los resultados admitidos.

La comprobación de los ángulos por la suma de los concurrentes en el punto de estación hace en cada vuelta de horizonte con el procedimiento de reiteración ó con la suma de los educidos en el de repetición; en cada triángulo cuando son conocidos los de cada uno y lo ismo los de las bases de los polígonos; de manera que se puede proceder con toda seguridad.

Transmitiéndose la orientación de polígono á polígono, en cuanto se han observado los zimutes y los ángulos de los dos primeros se empiezan á encontrar comprobaciones impor-ntísimas por los inversos de los lados comunes, como ya digimos y no debe dejarse de utili-ar esta comprobación indirecta que, por esto mismo, es muy significativa y permite descubrir lugar de los errores antes de alejarse de él y, por consiguiente, corregirlos fácilmente.

Aconsejan todos los Autores y se previene en las instrucciones oficiales que se pasen de nta todos los datos de observación en el mismo día, en que se obtengan; prudente es en cierto odo esta prevención, pero tomada en sentido absoluto expuesta á dudas y equivocaciones, ue conviene evitar.

En efecto; el pase de tinta se ha de hacer de noche y ordinariamente con malas luces y es uy fácil equivocar unas cifras con otras, con tanto mayor motivo cuanto que el Topógrafo tá cansado, con la vista fatigada y con poco tiempo disponible, y la rapidez con que hace este abajo le hace incurrir en equivocaciones; para evitarlas, en parte al menos, aconsejamos, mo ya lo hicimos al hablar de nuestros registros de campo (núm. 75), que sólo se pasen de nta los datos iniciales, ó á lo mas los de uno de los dos nónius ó microscopios, para que se mprueben despues, y con mas calma, con los que continúen de lápiz, que entonces se pueden cribir con tinta diferente, la de siena v. gr., y así disminuyendo el trabajo premioso y en alas condiciones se conseguirán varios objetos.

Tambien debemos advertir que al mismo efecto conviene utilizar los atriles de campaña ó ncillas planchetas de que hablamos en el número 78, porque el Auxiliar oirá y escribirá ejor, y utilizando lápices mas duros y afilados se evitará el peligro de que se borren ó hagan nfusos los datos, que nunca debe escribir el observador, porque resulta muy expuesto á equi-caciones, motiva movimientos inconvenientes y es mucho mas molesto y tardío; los que por onomía suprimen el Auxiliar escribiente en las distintas operaciones de los trabajos topográ-os, pagan muy cara su preocupación.

No detallamos los aparatos y utensilios que debe llevar consigo la brigada trianguladora, el personal de que ha de componerse, no sólo porque todo ha de variar segun los casos, sino rque en cada uno será fácil al jefe de la misma organizarlo convenientemente y proveerse de do lo que pueda necesitar; sólo sí se ha de tener presente que todos los peones han de ser co-cedores de la localidad, activos, inteligentes y fidedignos y que se debe estimularlos á que bajen con entusiasmo, lo cual no es difícil de conseguir de la gente de los pueblos, aunque contraria la creencia general de los que no saben sacar partido de sus especiales costumbres ualidades.

07 — Resolución de los triángulos, error de cierre y compensaciones definitivas.

En el número 97 hemos descrito detalladamente estas cuestiones con referencia especial-ente á la excelente triangulación de Jaca, y como en ella se midieron los ángulos con un teo-lito de graduación sexagesimal y se utilizaron las Tablas logarítmicas de Callet con siete cimales, solo podrá quedar alguna duda sobre cómo se ha de proceder cuando aquellos se idan con un Clepe ó Taquímetro de graduación centesimal, para la que las Tablas logarítmi-s generalmente no tienen mas que cinco decimales, porque se consideran suficientes á los

cálculos ordinarios y lo son realmente para todos los topográficos, ya que en los de las triangulaciones se puede aproximar mas, si se creyera necesario, por las conocidas interpolaciones.

En sus excelentes Tablas Sanguet comprende los logaritmos de los Senos, Cos., Tang., &, de los arcos de 2 en 2 centígrados con sólo cinco cifras y las considera suficientes, y asimismo lo piensan Salmoiraghi, Jadanza y otros ilustres Ingenieros y por eso las utilizan tambien en sus Tablas taquimétricas, y dice Salmoiraghi (pág. 11 de la Introducción) que con la interpolación se consiguen las coordenadas hasta el $^1/_{100000}$, y el primero, Sanguet, hace constar (pág.) que los decimales despreciados en sus Tablas no representan un error mayor del $^1/_{48100}$

De aquí resulta que consignando el valor de los ángulos hasta el milígrado, haciendo las sencillas interpolaciones necesarias, y utilizando las Tablas logarítmicas de Sanguet, por ejemplo, ó las taquimétricas de Salmoiraghi, Jadanza, Orlandi ú otras análogas, de que dimos cuenta en el número 83, se podrían resolver los triángulos integrantes de la triangulación con mas sencillez y la suficiente precisión, haciendo innecesario el uso de un aparato especial para esta parte del trabajo topográfico, aunque se ha de buscar mas que una exagerada é innecesaria precisión, la seguridad y economía de tiempo y dinero proporcionadas á la índole del trabajo.

Pero si de todos modos se quisieran utilizar las Tablas logarítmicas sexagesimales con siete cifras podría hacerse convirtiendo los valores centesimales en sexagesimales mediante la Tabla inserta en el núm. 5 del vol. I, lo cual haciéndose seguidamente para todos los ángulos no implicaría un trabajo muy considerable y ó bien se podría consignar la reducción en registro especial ó bien hacerlo de los dos valores con tinta diferente en el mismo estado registro : lo primero lo consideramos mejor y podría servir de antecedente á los propios de la resolución de los triángulos y colocarse entre estos y los anteriores relativos á la medición de los ángulos.

Cuando hubiere que determinar varios puntos por trisección directa, mixta ó inversa, conviene consignar sus datos y resultados en registros especiales agrupándolos por clases, antes de la resolución de los triángulos normales, cuando por su medio se resolvieran, ó despues de ellos y como su complemento cuando se refieran á puntos trigonométricos interiores de tales triángulos, ya se deban considerar aislados ó formando triángulos de órden inferior, cuidando siempre de hacer constar su figura y los vértices de que se derivan: todo esto al objeto de que en la documentación aparezcan ordenada y claramente consignados los datos, cálculos y resultados.

108 — Cálculo de las coordenadas topográficas y geográficas de los vértices.

Solo por cuestión de método comprendemos este número, porque sería realmente innecesario, en cuanto á las coordenadas topográficas ya que no hay nada que añadir á lo consignado en el número 100 para poderlas determinar con seguridad, precisión y ordenadamente y relativamente á las geográficas no podemos entrar en mas detalles de los consignados en los números 101 y 102 sin salirnos del campo propio de la Topografía; pero debemos hacer constar que no consiguiéndose las alturas relativas de los vértices con mucha precisión trigonométricamente, cuando fuera esta necesaria no habría mas remedio que determinarlas por nivelaciones de grande precisión, pues las barométricas serán menos seguras y precisas que las trigonométricas, aunque otra cosa afirmen algunos Ingenieros entusiastas de esta clase de aparatos, muy útiles para reconocimientos y trabajos de poca precisión, pero poco fidedignos por su misma naturaleza.

CAPÍTULO II

NIVELACIONES DE GRANDE PRECISIÓN

109 — Consideraciones preliminares.

Al ocuparnos (número 43) de los errores tolerables en las nivelaciones hicimos constar que, aunque por la indeterminación de la cuestión no se pudieran fijar á la precisión límites concretos, podríanse señalar de una manera general para las realizadas con el nivel de agua 76'3 milímetros por kilómetro y solo 5 milímetros operando con un nivel de anteojo de buenas, pero no de excepcionales, condiciones, consignando las mas ámplias tolerancias señaladas por el Instituto Geográfico y Estadístico para las topográficas de su mapa al $^1/_{25000}$ con equidistancia de 10 metros en sus curvas de nivel y tambien allí digimos los errores medios admitidos en los itinerarios de distintos órdenes en la nueva Nivelación general de Francia considerando los de 3.° y 4.° órden con error sistemático de 2 y 5 milímetros por kilómetro y el accidental de 5 y 8 milímetros respectivamente como topográficos y los de 1.° y 2.° órden con errores accidentales de 1'2 y 1'5 milímetros y los sistemáticos de 0'2 y 0'4 respectivamente como de grande precisión ó geodésicos, variando consiguientemente á las necesidades de cada caso las tolerancias admisibles y para conseguirlas las condiciones del aparato y del procedimiento.

Dentro de la complegidad de la cuestión pueden por consiguiente clasificarse de una manera general las nivelaciones en *ordinarias*, de *precisión* y de *grande precisión*.

Las dos primeras se pueden realizar con los aparatos, procedimientos y precauciones explicados; pero las últimas no solo exigen especiales condiciones en los aparatos y mayores precauciones en su manejo y en la manera de hacer las observaciones, sino que se han de tener en cuenta algunos pequeños errores de que antes hemos prescindido.

En efecto: hemos supuesto hasta ahora que las superficies de nivel eran esféricas y paralelas y que las verticales eran rectas á ellas perpendiculares, que se encontraban en el centro de la Tierra y nada de esto sucede realmente haciendo necesarias en las largas nivelaciones de grande precisión correcciones que no lo son en las relativamente pequeñas topográficas; hemos admitido la invariabilidad de la longitud de la mira en las observaciones sucesivas y tampoco esto es enteramente exacto, porque varía con las diferencias de temperatura y de humedad del aire; en fin, hemos prescindido de otras minuciosas precauciones, que, si son inútiles en las nivelaciones topográficas, no pueden despreciarse en las de grande precisión.

Para estas estableció la Comisión internacional reunida en Berlín en 1864 que *el error medio kilométrico no debía pasar de 3 milímetros con tolerancia hasta de 5 milímetros en los casos mas desfavorables* y en su consecuencia nuestro Instituto Geográfico y Estadístico fijó en el artículo 125 de sus Instrucciones geodésicas las condiciones trascritas en el número 43 (pág. 133) y antes había realizado con arreglo á ellas la nivelación de Alicante á Madrid como explica en el capítulo I, página 405 y siguientes del volúmen I de sus Memorias (2.ª edición 1889); pero si hizo tomar precauciones en la realización de las observaciones y en los cálculos, ni tuvo en cuenta concretamente la influencia de la temperatura en las miras, ni fijó con seguridad los puntos en que habían de colocarse á la ida y á la vuelta y otras muchas minuciosas, ni, y esto es la causa principal de las diferencias, corrigió las altitudes halladas del defecto de paralelismo de las superficies de nivel con la de comparación; de manera que puede decirse, que, como en otras naciones, se hicieron estas nivelaciones en la misma forma aunque con mas precauciones que las topográficas de precisión consiguiendo la prefijada por la Comisión internacional.

En forma análoga operó el Ingeniero Baggi con el nivel de anteojo de Salmoiraghi, figura 205 (número 127 del volúmen I), á que solo le falta reflejar la burbuja para que el observador la vea sin moverse del ocular para constituir el aparato mas seguro y excelente para esta clase de nivelaciones, consiguiendo el error medio kilométrico de 2'05 milímetros segun consigna en su folleto de 1894, página 26 y dignas son de estudio sus consideraciones como las detalladas instrucciones que aparecen en la precitada memoria del Instituto Geográfico y Estadístico; pero como en el excelente libro «*Nivellement de haute précision par Ch. Lallemand*» se describen con los mas minuciosos detalles los nuevos procedimientos, con que bajo su dirección se está realizando la nueva nivelación general de Francia, á sus explicaciones nos atendrémos para dar idea de los nuevos fundamentos de las nivelaciones de esta clase, recomendando á aquellos de nuestros lectores, que deseen darse cuenta exacta de ellos, que estudien con detenimiento tan interesante libro, porque no podríamos dar noticia detallada de su contenido sin extralimitarnos del objeto, que en este nos hemos propuesto.

110 — Teorías orthométrica y dinámica.

Si como hasta ahora habíamos supuesto, las superficies de nivel fueran esféricas y paralelas, la diferencia de nivel entre dos puntos de la Tierra resultaría siempre la misma cualquiera que fuera el camino que se siguiera para medirla y en este supuesto se funda la comprobación en los polígonos cerrados por la igualdad de alturas en el punto de llegada á la del de partida, que es el mismo.

Pero es fácil de demostrar que aquel supuesto *no es enteramente cierto* y por consiguiente tampoco la consecuencia deducida.

En efecto: Sean, figura 133,

$S\,N$ y $s\,n$ dos superficies de nivel infinitamente próximas;

a y a' su separación en los puntos S y N medida sobre las verticales respectivas;

g y g' las aceleraciones de la gravedad en los mismos puntos.

Fig. 133

Se puede ir de S á n siguiendo el camino $S\,s\,n$ ó $S\,N\,n$.

En el primer itinerario el trabajo de la gravedad para la unidad de masa se reduce $a\,g$, correspondiente á la subida de S á s, pues es nulo de s á n por hallarse estos en la misma superficie de nivel.

En el 2.° itinerario el trabajo de la gravedad será $a'\,g'$ correspondiente al ascenso de N á n por ser S y N de nivel.

Y como el *trabajo de la gravedad es independiente del camino seguido para ir de un punto á otro* resultará:

$$a\,g = a'\,g'$$

Si las superficies de nivel $S\,N$ y $s\,n$ fueran paralelas se tendría $a = a'$

y por consiguiente $g = g'$;

pero, sin tener en cuenta las irregularidades conocidas con el nombre de *atracciones locales*, la gravedad en razón de la fuerza centrífuga y de la forma elipsoidal de la Tierra, varía del Ecuador á los polos, luego si g' y g no son iguales, sino en casos excepcionales, tampoco lo serán a y a' y por consiguiente las superficies de nivel no son paralelas.

Es digno de observarse que, como la posición de la burbuja está regida en su tubo por la acción de la gravedad, es consiguiente que variando esta no puede considerarse que el eje de aquella sea tangente á una circunferencia, ni siquiera á una elipse, porque en ella han de influir las atracciones locales, que en determinadas circunstancias han de producir variaciones mas importantes que la Latitud y la altitud del lugar; pero, como no es fácil tener en cuenta estas irregularidades, para las correcciones se prescinde de ellas en las que indicarémos luego.

Del principio antes consignado y consecuencia inmediata de ser $a\,g = a'\,g'$

se deduce que si *entre las superficies de nivel no hay equidistancia geométrica, sí existe equidistancia dinàmica* y como de la igualdad precedente se deduce que

$$\frac{a}{a'} = \frac{g'}{g}$$

resulta que la *separación de las superficies de nivel está en razón inversa de la gravedad.*

«De la falta de paralelismo de las superficies de nivel, resulta tambien, dice M. Lallemand (nota 2.ª de la página 14) que á excepción del eje terrestre y de los radios del Ecuador, las trayectorias de los cuerpos pesados abandonados á sí mismos y que caen sin velocidad apreciable, trayectorias que convergen en el centro de la Tierra, cortando ortogonalmente las superficies de nivel son *líneas curvas*, que vuelven su concavidad hacia los polos (figura 134). Las *verticales* son las tangentes á estas curvas en cada uno de sus puntos. Se sigue de aquí que la *Latitud de un lugar*, ángulo formado por la vertical en este lugar con el plano del Ecuador, debe aumentar ligeramente cuando se eleva por encima del suelo.

Fig. 134

De lo antes dicho resulta que *se deben encontrar tantos valores diferentes para la altura entre dos puntos cuantos sean los caminos seguidos para determinarla;* porque si de *S* á *n* (fig. 133) hallaríamos *a* siguiendo el itinerario *S s n*, encontraríamos que era *a'* siguiendo el *S N n* y por consiguiente cerrando el perímetro en *S* siguiendo el itinerario *S s n N S* encontrariamos por este solo concepto $a - a'$ y $a' - a$ si le siguiéramos en sentido contrario, *anomalía* que habría llamado la atención si los valores de g y g' variasen notablemente y aquellas diferencias no se hubieran comprendido entre los errores naturales de toda nivelación y especialmente en las topográficas.

En las de *grande precisión* antes tampoco se conocían ni tenían en cuenta y ahora sí utilizando las dos teorías de que queremos dar ideas generales; y esto se comprende, porque, una vez formuladas, M. Fraycinet, Ministro de Obras públicas, ordenó en 1878 que se hiciera una nueva Nivelación general de Francia sobre la base de una red principal ó de 1.er órden comprensiva de 12.000 kilómetros, que fuera dos ó tres veces mas precisa que la que en 1857-1864 había realizado Bourdaloué comprendiendo 15.000 kilómetros con error accidental probable de 2 á 3 milímetros por kilómetro y que seguramente sirvió, entre otras, de base á los acuerdos de la Comisión internacional y es claro que para conseguir aquellos resultados era preciso utilizar todos los nuevos recursos de la ciencia, como se está haciendo bajo la inteligentísima dirección de M. Lallemand.

Ahora bien; la falta de paralelismo de la superficie de nivel conduce á determinar las *alturas relativas* de los diferentes puntos de la Tierra sobre una superficie de nivel general de comparación, que puede ser, como antes hemos considerado, la media de los mares ó bien la *distancia dinámica* ó trabajo que se ha de hacer para que la unidad de masa se traslade de uno á otro punto; la 1.ª se medirá en metros segun la *teoría ortométrica*, la 2.ª en *kilográmetros*, segun

la *teoría dinámica* y como en uno y en otro caso se han de utilizar los procedimientos ordinarios de nivelación, aunque con especiales precauciones, solo habrá que calcular por medio de aquellas las *correcciones* y *relaciones necesarias* para deducir de los resultados directamente obtenidos las cotas *ortométricas* y las *dinámicas*, que puedan ser necesarias.

Teoría ortométrica.—Esta, cuyo principio fundamental fué indicado por Vittstein (Astronomische Nachrichten, 1873, número 1939) tiene por objeto, conservar la definición usual de la *altitud* y corregir los resultados de la nivelación para que *las alturas obtenidas representen efectivamente las distancias verticales de cada punto á la superficie general de comparación.*

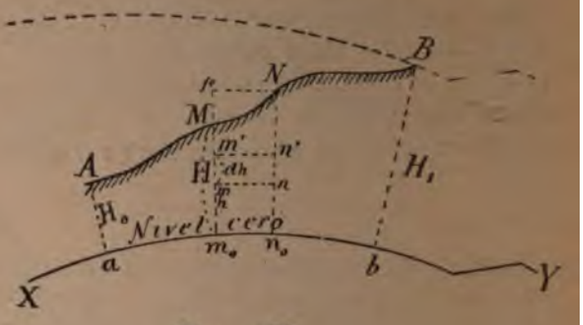


Fig. 135

«Véase, dice M. Lallemand, página 16, como se puede calcular esta corrección:

«Sean (figura 135):

A M B, el itinerario seguido;

X Y, la superficie de nivel cero ó general de comparación;

$Aa = H_0$; $Mm_0 = H'$; $Nn_0 = H$; $Bb = H_1$ las *altitudes ortométricas* de los puntos *A*, *M*, *N* y *B*, medidas sobre las verticales de estos puntos.

»Conociendo H_0 y las diferencias parciales de nivel sucesivamente encontradas desde las estaciones intermedias de la nivelación comprendidas entre *A* y *B*, se deduce de ellas por el procedimiento usual las *altitudes brutas* de todos los puntos intermedios y finalmente la del punto *B*».

Demuestra M. Lallemand, utilizando las fórmulas de Clairaut y Bouguer, que para transformar estas altitudes brutas en *altitudes ortométricas* basta añadir á cada diferencia parcial de nivel la corrección deducida de la fórmula siguiente:

$$\varepsilon = -2\alpha \, H. \text{ sen. } 2L. \, dL \qquad (2)$$

en la que

H y L designan respectivamente la *Altitud* y la *Latitud* medias de la estación ó mejor dicho de cada punto; d L la diferencia de *Latitud* de los extremos y α una constante igual á 0'0026.

«La antedicha corrección, como se vé, es proporcional á la *Altitud* media (H) de la estación. Nula en el polo, en que L = 90° y en el Ecuador en que L = 0, alcanza su máximum á la latitud de 45°. Es negativa cuando se marcha hacia el Norte (d L > 0) y positiva en sentido contrario» y hemos de añadir que es tambien nula cuando el itinerario sigue un paralelo geográfico, porque entonces d L = 0.

«La corrección total entre el punto inicial *A* y el extremo *B* del itinerario se obtendrá integrando la expresión precedente con relación á L entre los dos límites L_0 y L_1, Latitudes de los puntos extremos, H siendo considerada como una función de L_1 definida por el perfil mismo del itinerario en el intérvalo de *A* á *B*».

«Se tiene por consiguiente:

$$\varepsilon_A^B = -2\alpha \int_{L_0}^{L_1} H. \text{ sen } 2L. \, dL \qquad (2^{bis})$$

Si hubiera que resolver analíticamente estas fórmulas en las aplicaciones sería muy molesto y para evitarlo se utilizan los procedimientos gráficos, que M. Lallemand explica detalladamente consignando observaciones muy interesantes que demuestran la importancia de la *corrección ortométrica* muy especialmente en los lugares muy accidentados y elevados.

En justificación de la importancia de estas correcciones cita M. Prévot (1) el resultado de

(1) Obra citada. Méthodes... página 9.

nivelación de grande precisión realizada por el Instituto Geográfico y Estadístico entre el vel medio del Mediterráneo en Alicante, y el del Occeano en Santander, pues siguiendo el inerario Alicante—Murcia—Madrid—Santander, encontró para diferencia de nivel 53 centíetros, mientras que en la nueva Nivelación general de Francia se consideran de nivel con alnos centímetros de duda; y como segun la teoría ortométrica la corrección, segun el itinerao seguido, es de 34 centímetros, la diferencia hallada se reduce á 19 centímetros, que considera mo error algo grande de la nivelación, pues dice que por los nuevos procedimientos puede icerse con el de 10 centímetros; cuya afirmación no aceptamos relativamente al itinerario seiido por nuestro Instituto, ya que el perfil determinado siguiendo las carreteras entonces nstruídas resulta en muchos lugares con líneas muy inclinadas y vueltas rapidísimas, que)ligarían á reducir excesivamente su longitud aumentando los errores; y es verdaderamente rprendente que con la corrección ortométrica indicada se reduzca el error final á 19 centímeos siendo así que no se tomaron entonces algunas precauciones necesarias para dar seguridad trabajo; pero, ni con ellas creémos que se puedan con completa seguridad reducir los erros á tan estrechos límites en nivelaciones tan considerables, porque ni se pueden tener en enta pequeñas, pero frecuentes, influencias extrañas, ni menos las compensaciones fortuítas, ıe pasan desapercibidas para el mas hábil observador; así lo justifica que se hayan encoıdo diferencias mas notables que la antes indicada entre la nueva Nivelación general de ancia y la muy excelente realizada por Bourdaloue; algo dependerán aquellas de las mayores ecauciones ahora tomadas, pero indudablemente no poco tambien de las causas indicadas y tamos seguros que si otros observadores repitieran en distinto tiempo las mismas operacios no encontrarían, porque es imposible, los mismos resultados.

Teoría dinámica.—Debida á Helmert, que dió á conocer sus principios fundamentales en 73 *(Astronomische Nachrichten—número 1939) consiste en sustituir la altura geomètrica* de las perficies de nivel infinitamente próximas, que se encuentran sucesivamente en la operación, *r el trabajo que la gravedad desarrollaría sobre la masa de unidad de peso cayendo desde esta isma altura.*—Cualquiera que sea el punto que se considere de una superficie de nivel *el trajo es constante* para pasar á otro cualquiera de otra determinada.

«Si se representa por $g^{\circ}_{45^{\circ}}$ la acelaración de la gravedad al nivel del mar y á la Latitud de °, la masa de la unidad de peso es $\frac{1}{g^{\circ}_{45^{\circ}}}$, y el trabajo necesario para elevarle á la altura d H ene por expresión

$$\frac{1}{g^{\circ}_{45^{\circ}}} g . d\mathrm{H},$$

endo g la aceleración de la gravedad en el punto considerado».

«Entre dos puntos dados A y B el trabajo total, que llamarémos *diferencia dinámica de nivel* , es la integral de la expresión precedente:

$$\Delta^{B}_{A} = \int_{A}^{B} \frac{g}{g^{\circ}_{45^{\circ}}} d\mathrm{H} \qquad (4.^{a})$$

ientras que, segun la antigua definición, *la diferencia bruta de nivel* está representada por

$$d^{B}_{A} = \int_{A}^{B} d\mathrm{H} \qquad (5.^{a})$$

«Si el punto A pertenece á la *superficie de comparación* ó de nivel cero, la fórmula (4.ª) ıpresa lo que llamarémos la *cota dinámica* C del punto B:

$$\mathrm{C} = \int_{o}^{B} \frac{g}{g^{\circ}_{45^{\circ}}} d\mathrm{H}; \qquad (4.^{a\ bis})$$

«La cota dinámica es por consiguiente el trabajo que se ha de hacer para vencer la gravedad al ir de la superficie de nivel cero hasta el punto B».

«La fórmula (4.ª) puede escribirse tambien así:

$$\Delta_A^B = \int_0^B \frac{g}{g^0_{45°}}\, dH - \int_0^A \frac{g}{g^0_{45°}}\, dH.$$

«Es decir que la diferencia dinámica de nivel entre dos puntos es igual á la diferencia de sus cotas dinámicas.

Si en la fórmula (4.ª) sustituimos $\frac{g}{g^0_{45°}}$ por la expresión equivalente $1+\gamma$ en que

$$\gamma = \frac{g - g^0_{45°}}{g^0_{45°}}$$

siendo γ lo que se llama *variación relativa de la gravedad*, resulta, teniendo en cuenta la (4.ª anterior).

$$\Delta_A^B = \int_A^B dH + \int_A^B \gamma\, dH = d_A^B + \int_A^B \gamma\, dH$$

«Lo que quiere decir que la *diferencia dinámica de nivel entre dos puntos A y B se obtiene añadiendo á su diferencia bruta de nivel una corrección dinámica* expresada por

$$\eta_A^B = \int_A^B \gamma\, dH \qquad (6.ª)$$

Correcciones dinámicas absolutas.—«Si se pudiera medir directamente la gravedad ó al menos se tuviera un instrumento portátil y suficientemente exacto que diera la *variación relativa de g* (1), el cálculo de γ_A^B se efectuaría fácilmente de la manera siguiente:

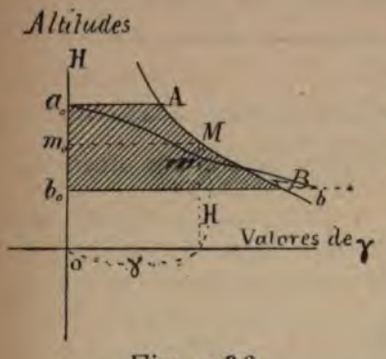


Fig. 136

«Se construiría una curva tal como *A M B*, figura 136, que tuviera por abscisas los valores sucesivos de γ á lo largo del itinerario, y para ordenadas las altitudes aproximadas H de los puntos correspondientes».

«El área de esta curva entre las horizontales $A\,a_o$ y $B\,b_o$ por ejemplo, tendría por expresión

$$S = \int_A^B \gamma\, dH$$

que sería el valor de la corrección η_A^B».

«En la nivelación de un polígono cerrado el *error dinámico de cierre* estaría representado por el área de la superficie comprendida por la curva cerrada así formada».

«Las correcciones ortométricas y dinámicas se calcularían mediante el planímetro ó bien empleando un *intégrafo para trazar la curva integral $a_o m\, b$ del perfil A M B; las abscisas, tales como $m_o m$, de esta curva, representarían las correcciones dinámicas* correspondientes á las dife

(1) El problema de la construcción de un aparato semejante se facilita singularmente por este hecho que para las necesidades de la nivelación, no se necesita determinar g con grande precisión.

Así conociendo g á lo largo del itinerario al $^1/_{10000}$ de su valor, como error accidental máximo (ó sea con la 3.ª decimal exacta) no habría que temer en este concepto un error probable mayor de 0'033 milímetros por metro de diferencia de nivel; esto es, para una diferencia D el error probable de

$$0'033 \text{ mm.} \sqrt{D}$$

ó 1 mm. para 1000 metros de diferencia de altitudes».

rencias brutas de nivel de los puntos *M* correspondientes con relación al punto *A* de partida».

No existiendo el aparato deseado para medir rápidamentc la gravedad en cada punto, explica M. Lallemand las *correcciones provisionales* en cuanto dependen, segun la fórmula que deduce, de la Altitud y de la Latitud, la manera sencilla de aplicarlas y un abaco para conseguirlas con bastante sencillez y lo mismo hace para transformar en cotas dinámicas las altitudes ortométricas, de cuyas interesantes descripciones no podemos ocuparnos, pero sí lo haremos del resúmen y conclusiones con que termina esta parte interesante de su excelente libro.

Resúmen.—La teoría actual de la nivelación geométrica se funda, como ya se ha dicho, en el supuesto de ser las superficies de nivel *esféricas* y *paralelas* y por consiguiente determinadas con una sola cota en toda su extensión; pero como se ha demostrado que no sucede así, es preciso optar por la altura ó por el nivel.

La *teoría ortométrica opta por lo primero, la dinámica por lo segundo.*

Con la primera no se modifica la actual definición de la Altitud y las correcciones, que se han de hacer á los resultados brutos obtenidos por los procedimientos comunes, son pequeñas y de marcha regular: basta por consiguiente hacerlas en los puntos principales sin preocuparse de ellas en todos los demas; pero en cambio: 1.° no dan rigurosamente las distancias de los puntos á la superficie general de comparación, porque, dice, estas altitudes se miden sobre las trayectorias ortogonales de las superficies de nivel y estas son líneas curvas; 2.° porque si se quisiera referir la nivelación á otra superficie de nivel, en lugar de añadir ó quitar una constante á todos los resultados, como se hace ordinariamente, sería necesario en rigor aplicar en cada punto una corrección diferente y 3.° porque no siendo paralelas las superficies de nivel los puntos de cada una tienen altitudes ortométricas diferentes y los que la tienen igual pueden no hallarse al mismo nivel y por consiguiente *la diferencia de nivel pierde su verdadero sentido;* en su consecuencia la *teoría ortométrica* no debiera llamarse de *nivelación* sino de *altimería*, ya que no determina con todo rigor *superficies de nivel* y por lo mismo, segun M. Goulier las curvas de la misma *cota*, llamadas hasta ahora de *nivel*, debieran llamarse *equialtas* (1).

«Con el *metodo dinámico* al contrario, dice M. Lallemand, en que cada superficie de nivel está afectada de una *cota única*, el paso de un nivel á otro se hace sin dificultad por la adición de una constante».

«Contra la teoría dinámica se ha hecho la objección de conducir, en el estado actual, á resultados menos precisos que la teoría ortométrica y esto porque careciendo de un aparato para medir rápidamente la gravedad se está obligado á contentarse con el valor de g dado por la fórmula de Clairaut-Bouguer, cuyo segundo término, que expresa la influencia de la Altitud, es relativamente incierto».

«Pero esta situación cambiará completamente el día no lejano tal vez en que se pueda medir rápidamente, sino *g* mismo, al menos su relación $\frac{g}{g'}$ á un valor *g'* determinado con toda

(1) Todo esto es cierto y deben tenerlo en cuenta los Geodestas; pero los Topógrafos, mas modestos, no deben alarmarse; pues los errores y diferencias á que se refiere entran en la clase de los para ellos despreciables y si es justo atenerse en las definiciones al rigor matemático y procurar conseguirle en todas las operaciones, cuando es realmente despreciable é inapreciable en los trabajos no parece regular hacer modificaciones en las definiciones procedimientos, que perturben á la generalidad de los Topógrafos: las llamadas curvas de nivel determinadas por los procedimientos topográficos no lo serán con rigor matemático, pero sí con la suficiente precisión para todos los usos de la vida y no se ha de olvidar que aquel solo se consigue en la teoría pura y nunca en la aplicación; de manera que las fórmulas mismas utilizadas en la teoría dinámica tampoco son exactas con rigor matemático desde el momento que en ellas figura el coeficiente $\alpha = 0'0026$ determinado experimentalmente y que los valores de la gravedad, de la Latitud y de la Altitud tampoco se pueden determinar con todo rigor matemático: el Topógrafo debe conocer las causas de error y su importancia, pero no debe complicar por ello innecesariamente sus propios aparatos y procedimientos, ni menos preocuparse con teorías y disquisiciones agenas á su labor; no olvidemos que lo mejor es enemigo de lo bueno, como dice el proverbio y que debemos contentarnos con lo necesario y posible.

la precisión posible, en una estación situada en el centro de la región considerada» (1).

«Bastaría entonces una decena de estas estaciones centrales, convenientemente repartidas en todo el territorio de Francia para poder conseguir cotas dinámicas irreprochables».

«Las altitudes ortométricas no podrán utilizar en ningun caso esta medida directa de g, pues sería necesario reducir previamente á la superficie *cero* los valores de g obtenidos en la superficie del suelo é introducir por consiguiente en ellos este mismo término de variación en función de la altitud, cuya incertidumbre constituye el principal obstáculo contra el método dinámico.

Consignando, en conclusión, que el método dinámico satisface mejor á las necesidades corrientes en vías públicas, canales, etc., aunque no dudamos son perfectamente satisfechas con las nivelaciones actuales, hace constar el párrafo siguiente, que realmente rebaja sino anula la importancia del procedimiento preconizado; pues dice así:

«*En realidad* las variaciones relativas de *g* no pasando de 2 ó 3 por 1000 de uno y otro lado del valor medio que corresponde á la Latitud de 45° (2), las diferencias respectivas entre las cotas expresadas segun los dos métodos no tienen importancia práctica, al menos para Francia. Lo mejor es por consiguiente publicar unos al lado de otros los resultados de los dos métodos, porque cada uno tiene su interés y objeto especial, como lo ha resuelto el Comité de la Nivelación general».

Discurriendo lógicamente pensarán nuestros lectores que no valía la pena de ocuparse de la teoría dinámica especialmente, ya que son de tan poco provecho sus resultados; lo hemos hecho precisamente para evitar disquisiciones improcedentes á que observamos grande tendencia en algunos Ingenieros de esclarecido talento, ya que con las ideas apuntadas se evitan extravíos siempre funestos.

111 — Procedimiento y aparatos utilizados en la nueva nivelación general de Francia.

Como quiera que, ya se acepte la teoría ortométrica, ya la dinámica, siempre hay que determinar las altitudes brutas que se consiguen por la nivelación geométrica, procura M. Lallemand evitar en esta todos los errores posibles y á este efecto hace un estudio detenido de cada una de las causas que los pueden producir y el que á ellas se debe, para anularle en lo posible.

Empieza por el *error de esfericidad* demostrando, como ya sabíamos, que es nulo cuando el aparato se coloca á igual distancia de la mira de atrás y la de delante, por lo que se impone esta condición con la tolerancia de 1 metro en la práctica de las nivelaciones de precisión.

Discute despues las causas del *error de refracción* y fijándose especialmente en las variaciones de la temperatura del aire con la altura sobre el suelo, la inclinación de este y la longitud de la nivelada y no bastante en el estado higrométrico de aquel, que tiene mayor influencia, aunque están relacionados entre sí de una manera indeterminada, haciendo constar que por la tarde son mayores las ondulaciones y menor la refracción contrariamente á lo que en la mañana sucede, despues de muchas explicaciones y fórmulas para indicar las distintas variables y procedimientos gráficos, que utiliza para su solución, en la *aplicación* de todas las fórmulas y medios geométricos halla para *error de refracción* en un caso, que considera frecuente, aunque no somos del mismo parecer porque las temperaturas de 0'3° á 2'2° que considera medidas en los diferentes puntos de la mira no nos parecen ni frecuentes ni convenientes para esta clase de trabajos, deduce que el error de refracción con nivelada de 150 metros ascendió á 0'63 mi-

(1) «Los notables resultados obtenidos en tal concepto por el Servicio geográfico del Ejército y de los que el Capitán M. Defforges ha dado noticia recientemente á la Asociación geodésica internacional, hacen esperar la pronta realización de este deseo».

(2) «La relación $\frac{g}{g_{45°}}$ es muy poco diferente de 1. Sus límites extremos son respectivamente: 1'0026 en los polos terrestres y 0'9974 en el Ecuador al nivel del mar ó 0'9970 si ademas se eleva á una altitud de 1000 metros».

ímetros y como en el caso de ser la pendiente contínua se reproduciría, dice, sistemáticamente lcanzando á 4 milímetros por kilómetro, le considera grave proponiendo que en tal caso se ebaje la nivelada de 150 á 120 metros con lo cual aquel error disminuiría en 40 por 100.

Prudente es el consejo y dignas de estudio las fórmulas, consideraciones y medios que explica M. Lallemand, en esta parte de su interesante libro; pero parécenos mas temible que el error de refracción á tan pequeñas tiradas el consiguiente á las ondulaciones del aire por la dificultad de la lectura y el de su humedad mas que las pequeñas diferencias de temperatura en a refracción y siendo generalmente, con poca diferencia, uniforme desde o'5o metros del suelo aldría mas que tener en cuenta la temperatura á distintas alturas procurar reducir el trabajo las horas en que la humedad y el calor no fueran notables, que no se hicieran visibles las ndulaciones del aire, utilizar la parte de mira superior á o'5o metros y en caso necesario reducir la longitud de las niveladas; porque calcular el error de refracción con referencia solo á a temperatura, como se hace, parécenos que es exponerse á introducir otros errores en los resultados, ya que las causas del verdadero error son muchas é indeterminables y al concretarse una puede suceder lo que tememos sin que de ello se dé cuenta el observador, porque son uchos los pequeños errores que intervienen en el final que puede percibir claramente.

Describe despues muy detalladamente el nivel que se utiliza en la grande nivelación que irige y del que ya indicamos las condiciones generales en el número 123 del volúmen I representándole en la figura 197 y discute los errores parciales y el total que se pueden cometer en observación para deducir el grado de precisión posible y las precauciones con que se ha de perar; hace lo mismo con la *mira de compensación de Goullier*, que dá en cada momento la mperatura y el alargamiento de la mira mediante un termómetro metálico, explicando los rrores accidentales y sistemáticos que se pueden cometer y la manera sencilla de registrar tales ariaciones; hace constar la conveniencia de la diferencia de las dos divisiones de cada mira al bjeto de utilizar una en cada observación para comprobar las lecturas, la manera de contrasrlas, dividirlas y numerarlas calculando los errores y su corrección por medio de abacos aproiados, en fin, hace del aparato y la mira un estudio tan detenido que es por muchos conceps digno de tenerse en cuenta por cuantos se ocupen de tan delicados trabajos; pero innecesao en las nivelaciones topográficas, por lo que no creémos oportuno consignar aquí mayores xplicaciones. Algo mas nos interesa conocer el procedimiento seguido en los trabajos que con inuciosos detalles explica M. Lallemand en el Capítulo III dedicado á dar á conocer las *peraciones sobre el terreno*, que se realizan en la nueva nivelación general de Francia.

Teniendo esta por objeto determinar con la mayor precisión posible la altitud de gran núero de puntos, que sirvan de referencia á otras nivelaciones para conseguir la orografía del rritorio y ponerla en relación con la de las naciones confinantes, así como el nivel de los mas mediante los mareógrafos, en lugar de proceder por largos itinerarios se ha dividido el país n cierto número de polígonos de 1.er órden, que con perímetros de 300 á 700 kilómetros comrenden otros de 2.° y sucesivamente de 3.° y 4.° con distintos grados de precisión siguiendo as públicas como ferrocarriles, carreteras, canales y ríos y en zonas periféricas limitadas en s fronteras y en las costas, por cuyo medio se consiguen mas comprobaciones y medios de rrección de errores que siguiendo largos itinerarios, como en otras naciones se había hecho.

Para la *nivelación fundamental* ó polígonos de 1.er órden se siguen con preferencia los ferocarriles, que ofrecen sobre las carreteras las ventajas siguientes:

1.ª «Las alternativas de pendientes y rampas son en ellos menos frecuentes y las inclinaones mucho menores, lo que reduce el número de estaciones para una distancia horizontal ada y la suma aritmética de las diferencias parciales en las altitudes, dos elementos cuya exaeración es perjudicial á la exactitud de la nivelación».

2.ª «En los ferrocarriles se encuentran construcciones relativamente mas numerosas y as sólidas que en las carreteras, lo que facilita la fijación de las referencias, que por otra parte están mejor vigiladas y mas defendidas de los ataques de los malévolos».

Estas ventajas indudables las presentan mas notoriamente los canales de navegación, por-

que el camino de sirga se presta ordinariamente bien á la colocación del nivel y de las miras en buenas condiciones sin los inconvenientes de la grande y frecuente trepidación del terreno por el paso de los trenes, que no puede menos de perturbar grandemente los trabajos; pero combinando la parte mejor de las diferentes vías no será difícil evitar el escollo indicado en estos grandes polígonos, que se designan por una letra del alfabeto mayúsculo y la parte común llamada *sección* por la reunión de las letras que les corresponden.

Cada brigada se compone de *un operador*, Jefe de la misma, un *lector* ó *Ayudante* y *dos portamiras*, estando los dos primeros encargados del *reconocimiento* y *emplazamiento de las referencias* y de la *nivelación* propiamente dicha y el segundo ademas del transporte y puesta en estación del nivel y los portamiras ademas de sus funciones especiales de clavar las estacas y de fijar las referencias en los sitios al efecto señalados.

Si bien el órden en las operaciones permite esta limitación del personal de la brigada, parécenos excesiva la reducción, porque, cuando haya que fijar las referencias principales y secundarias en sillares, los portamiras se han de ocupar mucho rato en ello paralizando los trabajos y no es posible por otra parte que el Ayudante traslade de una á otra estación además del aparato montado, la caja y otros efectos que siempre ha de conducir consigo la brigada; de manera que parece sería conveniente ampliarla con un acemilero y caballería de carga y otro peón encargado de abrir los agujeros y asegurar en ellos las referencias para que los trabajos no sufrieran entorpecimientos. Describe M. Lallemand las condiciones de los puntos de referencia, manera de señalarlos y numerar los principales y secundarios, su emplazamiento a reconocer el terreno y su descripción en cróquis apropiados para que siempre pueda hallarse el punto en donde se coloquen, aunque desaparezcan; pero, por interesantes que sean estas explicaciones para el que haya de hacer un trabajo de este género, no podemos consignarlos en detalle para dejar lugar á la indicación de las precauciones con que se realiza la nivelación propiamente dicha, ya que esto puede tener un interés mas inmediato para el Topógrafo.

Las *reglas* á que se ajusta la operación son las siguientes:

1.ª Para cada sección se repite la nivelación comprobando con la comparación de los resultados totales y parciales de cada nivelada.

2.ª La segunda nivelación se hace en sentido contrario de la primera para anular ó disminuir en gran parte el efecto de los errores sistemáticos.

3.ª En el intérvalo de las referencias secundarias se utilizan para colocar la mira estacas fuertemente clavadas en el suelo, que tienen en su cara superior un clavo de cabeza semiesférica, en que se apoya la mira y en ellas se coloca esta á la ida y á la vuelta pudiéndose comprobar cada nivelada y descubrir el lugar de las equivocaciones, que se cometiesen sin tener que repetir gran parte del trabajo.

4.ª Las dos nivelaciones de ida y vuelta entre dos referencias se hacen en el mismo día para evitar que desaparezcan las estacas intermedias.

5.ª En cada nivelada se utilizan las dos miras para hacer en menos tiempo el golpe de atrás y el de delante.

6.ª Consiguientemente á esto cada mira se utiliza en las niveladas sucesivas para punto de atrás y punto de delante evitando los errores consiguientes al cambio de mira y otros propios de ellas.

7.ª Al repetir la nivelación se cambia el órden de las miras, lo que unido á usar en esta segunda operación una división distinta, suplementaria v. gr., permite hacer una comprobación de cada nivelada.

8.ª En estas se coloca el aparato á igual distancia de las miras con tolerancia de 1 metro, por cuyo medio se anulan sus incorrecciones, el error de esfericidad y en gran parte el de refracción.

9.ª La longitud de la nivelada no debe exceder de 140 á 150 metros, salvo en casos excepcionales, determinándose segun la separación de las referencias, la inclinación del terreno y las condiciones de la atmósfera; por regla general «cuando centrada la burbuja se dirige el anteojo

á la mira, el hilo medio y el superior del retículo deben proyectarse sobre la imágen de la parte graduada de la mira» y esto se hace al objeto de disminuir la influencia de las ondulaciones y de la refracción del aire sobre la lectura del hilo central.

10.ª El trípode se colocará de manera que el extremo de dos de sus brazos tengan la dirección de la nivelada y alternativamente á uno y otro lado de ella en las sucesivas para compensar el error consiguiente al movimiento del suelo con el peso del observador.

11.ª La centración de la burbuja debe hacerse tan exactamente como sea posible para evitar tener que contar las partes en que se desvía en uno y otro sentido, lo que ademas de movimientos inconvenientes del observador implica mayor trabajo y cálculos de reducción.

12.ª Se completa la centración de la burbuja haciendo que se mueva siempre en el mismo sentido para evitar el error consiguiente á la descentración real con motivo de la resistencia que ofrece al movimiento la inercia ó lo que se llama vulgarmente la pereza de la burbuja.

13.ª «El operador y el Ayudante ejecutan sucesivamente dos operaciones independientes la una de la otra, que se comprueban en sí mismas bajo los tres conceptos de las lecturas de mira, centración de la burbuja é igualdad en las distancias».

En efecto:

«*En la primera operación,* el *lector* dirige la visual atrás, despues delante leyendo cada vez los tres hilos horizontales del reticulo».

«Las dos diferencias estadimétricas sobre cada mira deben ser iguales con tolerancia de 2 á 3 milímetros. Su comparación pone en evidencia enseguida las equivocaciones en la lectura, si existieran».

«Por otra parte las dos distancias de atrás y delante siendo iguales con tolerancia de 1 metro las diferencias estadimétricas sobre las dos miras deben serlo con tolerancia de 5 milímetros, lo que dá una comprobación de la igualdad de las distancias».

«*En la segunda operación*, el *operador*, despues de un doble giro del nivel de burbuja extremo por extremo y del anteojo sobre su eje de figura, lee sobre cada una de las dos miras la altura del hilo nivelador ó axial solamente».

«Por ser iguales las distancias del aparato á las miras la diferencia de alturas, con las precedentes, en las dos miras deben ser tambien iguales.—Una discordancia de mas de 2 milímetros indica una falta de centración de la burbuja en una de las dos operaciones ó bien una falta de lectura ó un error de estima cometido por el operador».

14.ª «Los dos golpes de nivel del operador se dan en órden inverso de los del lector, al objeto de compensar al menos en parte los errores procedentes de las deformaciones de la burbuja ó de su soporte ó del hundimiento del nivel durante el tiempo transcurrido entre la nivelada de atrás y la de delante» (1).

---

(1) Estas reglas se siguen con todo rigor en la nivelación de los polígonos de 1.er órden; en los de 2.º se suprime la 2.ª observación despues de la inversión del nivel de burbuja y del anteojo, si bien, para comprobar el estado del aparato, aquello se hace en dos ó tres estaciones al principio, al medio y al fin de la jornada y se tolera la diferencia de 1 á 2 metros en las distancias del aparato á las miras.

En los polígonos de 3.er órden se utilizan miras ordinarias con doble graduación, no las de compensación, solo se nivela en un sentido, la longitud de la nivelada se extiende hasta 200 metros, la tolerancia en la diferencia de las distancias del aparato á las miras es de 3 metros, se comprueba el nivel dos veces cada día; pero no se hace doble observación con inversión del nivel y del anteojo.

«En cada estación, se lee sobre la 1.ª cara de la mira de atrás con los tres hilos del reticulo y sobre la 2.ª solo con el axial; se dirige enseguida el anteojo á la mira de delante y se repiten las mismas observaciones».

«El operador calcula inmediatamente las diferencias estadimétricas, se asegura por su inspección que no ha habido equivocación en la lectura y que la equidistancia del nivel á las miras está convenientemente realizada».

En los polígonos de 4.º órden la nivelación se hace con miras de una sola cara y en un solo sentido, las miras se apoyan sobre las referencias ó pequeños trípodes metálicos, la longitud de la nivelada es ilimitada con la condición de que esté corregido el aparato de manera que el error no pase de 5 milímetros á la distancia de 100 metros, lo que se ha de comprobar dos veces cada día.

En cada estación se dá un golpe atrás y otro delante sin inversión del nivel y del anteojo, pero se leen las alturas de los tres hilos del retículo y el operador calcula las diferencias estadimétricas comprobando si son iguales con tolerancia de 2 á 3 milímetros.

O. Roux.—Topografía de Prévot y Roux.—Aplicaciones. Volúmen II, páginas 366 y 367.

Para desvanecer toda clase de dudas en la ejecución de los trabajos M. Lallemand describe con los mas minuciosos detalles las precauciones que, segun los casos, se han de tomar para cumplir las reglas precedentes y por mas que sean interesantes sus explicaciones hemos de prescindir de consignarlas así como tambien de lo que inmediatamente despues dice sobre las faltas y errores temibles y los medios de corregirlos, por mas que todo ello sea muy digno de tenerse en cuenta en las nivelaciones de grande precisión; pero para dar noticia exacta de tan excelentes explicaciones habríamos de copiarlas y no podemos ni debemos hacerlo, pues que nuestro objeto es solo dar ideas generales sobre tan delicados trabajos.

Lo mismo ocurre con la materia interesante objeto del capítulo siguiente, en que describe la *jornada gráfica* y *diagramas estadísticos*, que ponen sencillamente en evidencia las condiciones y cantidad de trabajo diario; la *medida de la precisión*, que gráfica y numéricamente permite determinar con separación las equivocaciones y los errores sistemáticos y accidentales; el *cálculo de las altitudes de las referencias* procediendo ordenadamente de menor á mayor y siempre comprobando, *la teoría de la compensación de una red de nivelación* discutiendo los diferentes casos que pueden ocurrir y aplicando en cada uno las reglas consiguientes á la teoría matemática de los errores; *la publicación de los resultados* representando por secciones en la escala de $^1/_{100000}$ el plano del itinerario nivelado, la definición gráfica de los puntos de referencia, explicación de su situación y altitudes ortométricas y dinámicas de cada uno, lo que permite utilizarlos en los trabajos especiales ó generales que despues se hagan y relacionarlos todos y finalmente el *coste de una nivelación de alta precisión*, en que se hace constar que no obstante realizarse la nueva con mas garantías y mayor precisión se está consiguiendo á mas bajo precio, en gran parte debido á la forma en que se paga al personal, pues se le interesa en la buena y pronta ejecución estimulándole con primas importantes, que se calculan muy sencillamente semanal ó quincenalmente mediante cuadros gráficos muy sencillos y expresivos.

Creémos oportuno consignar que segun aparece en la página 293:

«La nivelación de Bourdaloue, realizada de 1857 á 1864, se pagó á destajo á razón de 50 francos el kilómetro.—La nivelación general de Suiza, efectuada de 1865 á 1883, en condiciones relativamente difíciles á causa de las grandes inclinaciones de los itinerarios recorridos, costó próximamente lo mismo».

«Gracias á las diferentes mejoras de que hemos hablado, el coste de los nuevos trabajos de nivelación general ha bajado á cerca de 31 francos descomponiéndose como sigue:

Trabajo de campo (Sueldos é indemnizaciones á los operadores y portamiras).	18'50	francos
Comprobación y cálculos (Sueldos é indemnizaciones del Ingeniero y calculadores	6'10	»
Material (referencias, cróquis, registros, gastos de escritorio y conservación de instrumentos)	3'00	»
Publicación de los resultados (Preparación é impresión del Repertorio gráfico).	3'60	»
Total por kilómetro. . . .	31'20	francos

Segun se demuestra con los diagramas, cada año aumenta el trabajo realizado, que se traduce por aumento de rapidez, de rendimiento y de salarios y un descenso correlativo de 25 por 100 del coste del trabajo.

Aunque es para los geodestas muy interesante la cuestión de la determinación exacta de la superficie general de comparación por medio de los nuevos mareógrafos de M. Lallemand, de que se ocupa el último Capítulo de su excelente libro, como no tiene interés directo para los Topógrafos nada dirémos de él dando por terminado el indicativo de las nivelaciones de grande precisión, no empero sin recomendar nuevamente á los aficionados el estudio detenido del excelente libro de M. Lallemand.

trabajos por administración, no es precisamente á esta clase de verificación á la que nos hemos de referir y sí á la que debe hacerse al aceptar un plano ó trabajo topográfico ya existente realizado por entidad particular, sin intervención directa de la entidad receptora.

Pueden ocurrir muchos casos diferentes en la verificación de los planos, pero para no alargar en demasía esta explicación nos limitarémos á los 4 principales siguientes:

1.° Verificación de planos numéricos con gráfico y tolerancia bien determinada. Con registros y cróquis y expresión del aparato y procedimientos utilizados.

2.° Verificación de planos numéricos con gráfico y tolerancia bien determinada. Sin registros ni cróquis, ni expresión del aparato y procedimientos utilizados.

3.° Verificación de planos simplemente gráficos. Con cróquis y registros y expresión del aparato y procedimiento utilizados.

4.° Verificación de planos simplemente gráficos. Sin registro ni cróquis, ni explicación del aparato y procedimiento utilizados.

113 — Verificación de planos numéricos con gráfico y tolerancia bien determinada. — Con registros y cróquis y expresión del aparato y procedimientos utilizados.

En todo contrato de trabajos topográficos debiera hacerse constar sus condiciones generales y muy especialmente las tolerancias admisibles en los ángulos, en las distancias y en el cierre de los polígonos y la obligación de presentar con los planos en limpio los borradores, toda clase de registros y los cróquis á fin de poderlos comprobar.

Nada de esto se hace, porque ordinariamente los que encargan tales trabajos, propietarios, capitalistas ó Ayuntamientos, no tienen noción ninguna de la Topografía y de aquí las consecuencias que dejamos apuntadas y otras muchas que omitimos por no ser en este lugar pertinentes.

Pero si la ley no puede inmiscuirse á fijar tales condiciones en los trabajos particulares, si puede y debe hacerlo en los de carácter público, en que de ordinario equivocadamente se concreta á fijar la escala y debe así mismo ordenar que se haga su escrupulosa verificación para evitar las funestas consecuencias de los malos planos y de los proyectos de obras sobre ellos fundados.

Naturalmente, han de variar las condiciones impuestas segun las del terreno, porque sería absurdo ordenar que para el plano de una extensión de 200 hectáreas se exija triangulación, como hemos visto hacerlo al Ayuntamiento de una importante capital, pero no sería difícil establecer reglas generales de contratación para todos los casos que pueden ocurrir.

En el caso general de que ahora nos hemos de ocupar se comprenden muchos especiales; porque lo están en él un plano parcelario catastral, el que sirve de base á un proyecto de ferrocarril, de canal, etc., pero para exponer mas sencilla y completamente los medios de verificación nos limitarémos al primero suponiendo que su extensión sea suficientemente grande para exigir una triangulación, red poligonal y parcelación.

Teniendo en cuenta las condiciones del aparato y procedimiento utilizados, ya se comprenderá si ha sido ó no posible conseguir la precisión indicada por la tolerancia prefijada.

Un exámen detenido de los datos del registro general con presencia de los cróquis indicará tambien la escrupulosidad con que se haya procedido.

Mediante el círculo ó regla logarítmicos se pueden comprobar en poco tiempo y sin molestia las coordenadas á la estación total ó parcialmente, pero al menos á un 25 por 100 de aquellas en el 2.° caso y lo mismo puede hacerse con las coordenadas al origen, adquiriendo convencimiento racional de las condiciones del plano numérico.

Del gráfico se consigue tambien midiendo las distancias entre las estaciones que se comprueban con las consignadas en el registro general ó en el especial de comprobaciones haciéndolas total ó parcialmente segun la confianza que inspiren las precedentes.

Otra comprobación especial y muy importante se puede hacer del gráfico y es la siguiente:

Como todos estos trabajos se hacen en el gabinete y los cálculos indicados con el Círculo logarítmico, si se procede ordenadamente consignando en estados apropiados los datos y resultados, no motiva este exámen un trabajo muy molesto y pesado, como sucedería si se realizara por observaciones y cálculos aislados y de todos modos la consignación ordenada de todo lo hecho debe hacerse constar para justificar la verificación.

Pero esta debe completarse con el exámen del plano sobre el terreno, en que se puede seguir el mismo órden é igual procedimiento con la sola diferencia de que el azimut de cada dirección en lugar de deducirse gráficamente, como antes, se hace por observación directa de la manera siguiente:

Se elige para estación una de las utilizadas en el levantamiento del plano y se orienta el aparato con la precedente del mismo género; esto es, para comprobar la triangulación con otro vértice de la misma; para comprobar las poligonales se utilizan las de la base de comprobación y estas pueden servir para los vértices de todas las poligonales y muchos de parcelas y para otros de estas las de otras poligonales; el objeto es conseguir la orientación del aparato con la necesaria precisión y con esta se miden los azimutes á los vértices de la triangulación, de la poligonal ó de las parcelas y con estos azimutes se comparan los deducidos por las fórmulas antes consignadas de las coordenadas de los puntos vistos y como estos generalmente no se marcarán expresamente sino que serán los mas visibles, naturalmente han de ser muchos menos que los comprobados sobre el plano gráfico, si bien haciendo varias estaciones se aumentará su número á cuanto sea necesario para conseguir la comprobación.

En esta no influye nada el graficismo ni las componendas que en él se hubieran hecho por consiguiente, aunque se extienda á menor número de puntos, dá mayor seguridad. Cuidando de nivelar bien el aparato y de medir los ángulos zenitales se pueden calcular aproximadamente las alturas relativas y en este concepto tambien se comprueba el plano numérico.

No creémos necesario detallar mas este sistema de verificación de los planos mediante comparación de los azimutes para determinadas líneas observados directamente y deducidos de las coordenadas de sus extremos, que es tambien la base del procedimiento de poligonación con comprobaciones sucesivas, porque esto comprendido será fácil darle en cada caso la aplicación mas oportuna, pero desde luego se nota que es mas sencillo y seguro que repetir una parte mayor ó menor de la operación primitiva para comprobarla, como hasta ahora se ha hecho.

114 — Verificación de planos numéricos con gráfico y tolerancia bien determinada. Sin registros y cróquis ni expresión del aparato y procedimiento utilizados.

Aunque este caso es muy semejante al anterior, como quiera que la deficiencia en la documentación no puede inspirar tanta confianza, ni permite realizar el primer análisis detallado del trabajo ni las consiguientes comprobaciones, exige que se hagan las restantes para el anterior indicadas con mas cuidado y en mayor número utilizando los estados de coordenadas integrantes del plano numérico y muy especialmente la comprobación sobre el terreno, á cuyo efecto deben marcarse momentáneamente con banderolas los puntos principales de las poligonales y de los polígonos formados por el conjunto de varias parcelas, al objeto de hacer la medición directa de los azimutes comprobantes con la mayor precisión y como del estado de coordenadas ya se deducirá la marcha general seguida y con referencia á los puntos comprobados de las poligonales y las parcelas se da base segura de apreciación visual, por este medio se comprobarán las condiciones de situación de los demas puntos determinantes de cada perímetro pero, *en caso de duda*, convendrá determinar por radiación algunos de los vértices principales de las poligonales y parcelas que se encuentren á menos de 400 ó 500 metros de la estación elegida utilizando para cada uno el mayor ángulo diastimométrico posible; con los azimutes y distancias medidas se calcularán las coordenadas de tales puntos á la estación, que se podrán comparar con las deducidas por diferencia del estado general de coordenadas y determinar los errores probables. Para todo esto es necesario conocer la designación de los puntos comprobables

y como no se acostumbra á consignar en los planos en limpio, cuando no se presentan para la verificación los borradores, es necesario suplir aquella falta mediante las coordenadas planimétricas en el estado general consignadas para cada punto y á este efecto, y otros que luego dirémos, es muy conveniente que en los planos aparezca una cuadrícula decimétrica, que muchas veces se limita á la fijación de sus vértices mediante el cruce de los ejes en la extensión de un centímetro en ambos sentidos, y la expresión de las coordenadas que corresponden á sus intersecciones; pues con vista del estado general de coordenadas se escribe la designación de los puntos comprobables, á que se hará referencia en los estados de verificación.

La que se hace en el gabinete se extiende á mayor número de vértices que la que se ha de realizar sobre el terreno; pero ocurrirá con frecuencia en esta que se considere conveniente comprobar algunos puntos no comprendidos en aquella y en este caso se han de hacer los cálculos indicados sobre el terreno mismo, á fin de conocer inmediatamente los resultados de la comprobación y obrar en consecuencia: no hacerlo así es exponerse á no completar la verificación ó á tener que repetir el reconocimiento de la misma porción del terreno, lo que es extremadamente molesto y oneroso.

Para aquello y para examinar cómodamente los planos y estados de coordenadas es utilísimo el atril de campaña que aconsejamos (número 78, pág. 227) se utilice en los trabajos de campo, ya se empleen en los cálculos las Tablas especiales, ya el Círculo ó regla logarítmicos y mucho mas si fuere necesario realizar algunas construcciones gráficas, por lo que no debe dejarse de comprenderle en el equipaje topográfico de los verificadores.

115 — Verificación de los planos simplemente gráficos, con cróquis, registros y expresión del aparato y procedimiento utilizados.

En vista del aparato y procedimiento utilizados se debe empezar la verificación fijando la tolerancia admisible sin olvidar el término correspondiente al graficismo, que, aunque como ya hemos dicho por nota en el número anterior se reduce á o'0002 N, bien pudiera extenderse á o'0003 N ó o'0004 N, porque no es fácil reducir á 2 décimas de milímetro el error que se comete en la fijación gráfica de los límites de una línea trazada con lápiz y despues pasada de tinta. Despues debe investigarse si el papel en que el plano se halle construído ha sufrido ó no alteración en el sentido de sus márgenes perpendiculares y en el caso en que se presentare dibujado en tela transparente, si el calco se hizo inmediatamente despues de la construcción del plano en papel ó muy posteriormente á ella, cuando ya hubiera podido sufrir variación en sus dimensiones.

No basta para la comprobación de estas, en el caso de tener escala gráfica, compararla con otra de marfil, porque si esto indicará la variación en su sentido, no la experimentada en el normal á este y si bien aseguran algunos Ingenieros que es la misma, nuestra propia observación nos indica lo contrario y no debe confiarse demasiado en apreciaciones agenas, cuando se puede adquirir datos ciertos en cada caso midiendo con cuidado distancias que sirvieron en la construcción en distintas direcciones comparando el resultado de la medición gráfica con los valores numéricos, que aparezcan en los registros: es cierto que por este medio se corre el riesgo de atribuir á variaciones del papel, las diferencias introducidas por el autor del trabajo para compensar los errores de cierre; pero comparando los resultados de aquella medición en líneas paralelas á la escala con las diferencias en esta encontradas no será difícil llegar á conocer la causa verdadera.

Cuando el plano tenga cuadrícula decimétrica expresamente construída, como es de suponer que se hiciera con cuidado, en ella se apreciarán fácilmente las variaciones del papel en las direcciones normales y en cada una puede servir la escala deducida de las dimensiones efectivas de los lados de la cuadrícula; pero realmente no podrá ninguna de ellas servir para medir las líneas de direcciones intermedias.

El ilustrado y laborioso Ingeniero G. Roncagli publicó en 1893 un interesante estudio so-

bre «*L'alteraţione della càrta nella sue conseguenţe sui piani topografici*» deduciendo reglas prácticas muy apreciables, pero que solo tendrán aplicación en el caso de ofrecerse á la verificación planos mas ó menos antiguos construídos en papel y como este no es el caso mas general, para dar cuenta de aquellas habríamos de extender este número en demasía y allí (1), en caso necesario, pueden encontrar los que lo necesitaren las indicadas reglas con todos sus detalles, prescindimos de consignarlas en este lugar, porque si bien la variación de las dimensiones del papel no debe despreciarse en ciertos casos, no tiene generalmente mucha importancia y además la gran mayoría de los planos verificables se presentarán dibujados en tela lúcida, que no experimenta iguales alteraciones, si se conserva en buen estado.

De todos modos en el caso de que sea necesario tener en cuenta las alteraciones del pape que ocurre mas frecuentemente cuando el plano se construyó en papel cuadriculado de cl ordinaria del comercio, en que siempre hay diferencia algo notable en los dos sentidos de cuadrícula y está ademas muy sujeto á variaciones por las condiciones de su pasta, lo mas pr tico nos parece hacer un cuadro gráfico con escalas proporcionadas á las dimensiones efecti de los lados de su cuadrícula y otros en distintas direcciones deducidas directamente de el con inclinaciones diferentes de 10° en 10°, apreciando las distancias efectivas del plano c una escala natural de márfil y deduciendo las correspondientes segun escala aplicando aquell á las del cuadro gráfico, que tenga una inclinación aproximadamente igual.

Hecho este trabajo preliminar y despues de un exámen detallado de los registros y cróquis que con la medición de la distancia entre puntos indudables darán idea de las condiciones construcción del gráfico, se puede hacer la verificación sobre el terreno, que es la mas interesante, de varias maneras en cuanto se refiere á los perímetros de los polígonos de conjunto parcelas y de estas mismas; pues la de la triangulación, que pudo servir de base en el levantamiento del plano, como en los registros constarán las coordenadas planimétricas de sus vértices ó al menos los elementos necesarios para calcularlas, hecho esto, en caso necesario, se procederá como antes se indicó á tal objeto.

Un medio consiste en levantar el plano de una poligonal entre puntos indudables, que consten en el plano como extremos de las que antes se hicieron, determinando por intersección ó radiación con medición directa ó indirecta algunos puntos visibles y estables, como hitos ángulos de puentes, edificios, etc., de las parcelas inmediatas y de otras poligonales próximas, construirlas y comparar su plano con la parte correspondiente del que se revisa.

Como no se conocerá la verdadera situación de los puntos que antes sirvieron de estación, no es posible hacer la comparación de sus lados y si solo de los puntos indubitables y realizando este trabajo en mayor ó menor número de poligonales, segun la confianza que haya inspirado el exámen de los registros y cróquis, y no extendiéndole á mas del 25 por 100 del número de poligonales del plano revisable, viendo si la diferencia en las distancias entre los puntos aludidos medidas en ambos planos está ó no comprendida en las tolerancias señaladas en las fórmulas siguientes prefijadas en el párrafo 15 de la Instrucción V dictada para el nuevo catastro italiano:

$$t = 0'0002\,N + 0'1\sqrt{D} + 0'01\,D \text{ en llanura}$$

$$t' = 0'0002\,N + 0'2\sqrt{D} + 0'01\,D \text{ en cerros y colinas}$$

$$t'' = 0'0002\,N + 0'3\sqrt{D} + 0'01\,D \text{ en montaña,}$$

en las que N representa el denominador de la escala del plano revisable y D la distancia y viendo asi mismo si la diferencia en los ángulos formados por las rectas que unen tales puntos no excede de la tolerancia admitida para la clase de aparatos, que se consideren necesarios, segun el destino del plano revisable, se llegará á formar juicio cierto de sus condiciones geomé-

(1) El estudio del Sr. Roncagli se publicó en la Revista *L'Ingeneria civile e le arti industriale* volúmen XIX y separadamente en folleto especial por los editores de Turin Camilla e Bertolero. Vía Ospedale, número 18.

tricas en lo principal, porque en cuanto á las parcelas, si bien el exámen visual puede dar ideas claras no suficientemente precisas y á este efecto se debe completar la revisión estableciendo alineaciones rectas entre puntos bien determinados en ambos planos de las poligonales y midiendo con todo cuidado las distancias á sus extremos de los puntos en que las corten los lados de las parcelas atravesadas y fijando mediante perpendiculares á tales alineaciones los vértices próximos de las mismas parcelas, comparando el resultado de estas operaciones con el que se consiga con mediciones análogas sobre el plano revisable.

No hay duda que con este procedimiento, aplicándole al menos á un 25 por 100 de los límites naturales del terreno y de los itinerarios seguidos en el levantamiento del plano, se llegará á conseguir el objeto; pero es tan oneroso que no es de aconsejar su aplicación, aunque se haya hecho por muchos Topógrafos.

Otro mas sencillo consiste en elegir un cierto número de puntos bien distribuídos sobre el terreno y desde los que se vean claramente el mayor número de vértices notables de las poligonales y parcelas y estacionando en ellos sucesivamente medir los ángulos que con una dirección arbitraria forman las visuales á aquellos dirigidas; construir estos ángulos sobre papel ó tela lúcida y superponiéndola al plano, de manera que las líneas trazadas pasen por el mayor número de los puntos observados, se verá cuales coinciden y cuales no deduciendo su posición relativa y por consiguiente las condiciones del plano; porque siendo esta una intersección inversa se deducirán los distintos vértices así determinados para las diferentes combinaciones de las rectas representativas de las visuales y tomando nota de los puntos de cada combinación, de la distancia entre los diferentes vértices así determinados y de la de cada uno á los puntos observados se deducirá el grado de precisión del plano revisable.

Mejor resultado se conseguirá cuando fuere posible elegir para estaciones puntos bien determinados en el plano, porque en este caso haciendo girar el calco alrededor de tales puntos en el plano hasta que las rectas representativas de las visuales pasen por el mayor número de puntos, se determinará mas fácilmente el error probable en la situación de los demas.

Otro medio consiste en fijar las antes indicadas estaciones en puntos bien determinados en el plano y desde ellos por radiación y medición indirecta de las distancias determinar los puntos principales de las poligonales y parcelas, que se encuentren en el radio de 400 á 500 metros, relacionar estos centros aunque solo sea por la dirección, construir el plano de cada estación en tela lúcida y superponerle al revisable deduciendo los errores directamente, pues se conoce la dirección y la distancia medidas, por su comparación con las que resultan en el plano revisable, completando el trabajo con el exámen visual, que no es difícil teniendo puntos y líneas de comparación.

Este procedimiento, como el anterior utilizable en los terrenos despejados, es algo mas oneroso, pero tambien mas seguro y especialmente aplicable en los terrenos muy divididos.

Finalmente creémos que de ordinario será preferible hacer en el plano revisable una cuadrícula decimétrica con todo cuidado y teniendo en cuenta, en caso necesario, las variaciones observadas en el papel, determinar con relación á ella las coordenadas planimétricas de los puntos principales de la poligonación y parcelación y considerarle como numérico; pero comprendiendo en las tolerancias el término correspondiente al graficismo como ya se hace en las fórmulas antes consignadas.

116 — Verificación de los planos simplemente gráficos sin registros, ni cróquis, ni expresión del aparato y procedimiento utilizados. Observación general sobre la revisión de los trabajos en que la nivelación es la base esencial.

Desgraciadamente este es el caso mas general en los trabajos no oficiales.

La deficiencia de la documentación imposibilita el detallado exámen previo de gabinete y por consiguiente induce á realizar el del terreno en mayor escala y con mas precauciones.

Cualquiera de los procedimientos explicados en el número anterior y especialmente los

dos últimos pueden aplicarse con provecho, pero cuidando de aproximar las estaciones para que no quede sin comprobación ningun punto principal de las poligonales y parcelas.

El ilustrado Ingeniero Roncagli, cree que cuando se deduce de la revisión que un 20 por 100 de las medidas comprobadas dá diferencias mayores de las tolerables, debe desecharse el plano por resultar mas caro y siempre peor su modificación para ponerle en condiciones de servirse de él que hacerle de nuevo y aunque esto se refiere á los planos catastrales antiguos de Italia que se pretendía incluir entre los del nuevo Catastro para utilizar las ventajas del *acelerramiento* prevenido en el artículo 47 de la ley de 1.° de Marzo de 1886, conviene no olvidarlo para evitar que planos semejantes se admitan como buenos en trabajos de cierto género.

Para terminar hemos de hacer una *observación general sobre la revisión de los planos.*

Cuando estos hayan de servir de base á proyectos en que las condiciones altimétricas de los puntos característicos tenga tanta ó mas importancia como las planimétricas, cual sucede en los proyectos de vías de comunicación, canales y otros semejantes, como lo mas importante es la comprobación del perfil longitudinal del eje, *la revisión debe especialmente fundarse en la doble nivelación del mismo* comprobando en los puntos principales, sin perjuicio de utilizar para la de las parcelas confinantes los procedimientos indicados.

APÉNDICE

TOPOGRAFÍA FOTOGRÁFICA

1 — Observación prévia.

Hemos de renunciar á ocuparnos en diferentes apéndices de la explicación de las principales aplicaciones de la Topografía, como nos habíamos propuesto y prometido; porque si nos concretáramos á indicaciones generales, no conseguiríamos nuestro objeto de facilitar los trabajos propios de los diferentes servicios, y si lo hiciéramos con los detalles necesarios, habríamos de ocupar con ello gran número de páginas, no poco tiempo y tendríamos que aumentar consiguientemente el precio ya elevado de este libro; todo esto nos induce á dejar para otro, complemento de este Tratado, la explicación detallada de las *aplicaciones especiales* de la Topografía general y *otras noticias* con ellas relacionadas; cuyo libro procurarémos escribir y publicar en breve plazo, en cuanto nuestras fuerzas nos lo permitan, para satisfacer los deseos que muchos ilustrados Topógrafos nos han comunicado.

Pero, si de las aplicaciones aludidas podemos prescindir sin faltar á nuestro esencial objeto, no sucede lo mismo en cuanto se refiere á la *aplicación racional de la Fotografía* en el levantamiento de ciertos planos; porque esto, *aunque no con el grado de precisión que algunos le atribuyen,* tiene el carácter de *procedimiento auxiliar no despreciable de la Topografía* complementando las teorías de que nos hemos ocupado, ya que da medios para realizar los trabajos consiguientes con notable economía de tiempo, molestias y dinero precisamente allí donde los procedimientos topográficos encuentran mas dificultades y puede ademas ser base de la *Topografía expeditiva,* que tanta aplicación tiene en la formación de los mapas generales, en los militares y en los trabajos de otros servicios públicos.

Por esto creémos necesario dar idea precisa y concreta de la *Topografía-fotográfica, Fototopografía, Fotogrammetría* ó *Iconografía,* que con todos estos y otros nombres (1) se conoce; pero lo harémos prescindiendo de exageraciones en pró ó en contra, que tanto han perjudicado á la generalización de su estudio y conveniente aplicación, concretándonos á lo que puede convenir al Topógrafo, que es lo mas sencillo y lo mas útil.

2 — ¿Quien fué el fundador de este procedimiento?—Perfeccionamientos.—Bibliografía.

Aunque se ha pretendido remontar el orígen del procedimiento á 1791-94, porque el Ingeniero hidrógrafo Beautemps-Beaupré preconizaba entonces el dibujo de vistas de paisajes en forma panorámica, que debían servir de registros de ángulos (2), lo que tambien hicieron en Cerdeña en 1834-35 Lamármora y de Candia y otros en distintas épocas y lugares, como quiera

---

(1) El ilustrado Ingeniero P. Paganini explica muy clara y concretamente en las páginas 2 y 3 de un interesante *Manual Hoepli* (Milán-1901) todos los nombres que en diferentes naciones se han dado á la aplicación de la Fotografía á trabajos geométricos.—Este interesante Manual de 288 páginas de 15 × 10 centímetros y varias láminas, solo cuesta en casa de Hoepli 3'50 liras y describe perfectamente el procedimiento y sus perfeccionamientos en Italia y las grandes aplicaciones que ha hecho aquel Instituto Geográfico Militar para conseguir la carta geográfica de los Alpes y otras abruptas montañas.—Contiene ademas una interesantísima bibliografía especial de la materia comprendiendo los libros y folletos publicados sobre ella en Italia, Francia, Alemania, Austria-Hungría y otras naciones, por todo lo que es muy recomendable este pequeño libro.

(2) Topografía de Prévot y Roux.—Tomo II, página 455.

que así solo se conseguían *cróquis* mejores ó peores segun la habilidad del dibujante y otr[os] Autores han querido dar al ilustre Porro la primacia como fundador del *procedimiento cono[ci]dico* y la *Fotografía esférica*, es indudable, como el mismo Porro lo declara (1), que *el fundad[or] del procedimiento fué el Coronel de Ingenieros militares franceses Mr. Laussedat*, pues muc[ho] antes de descubrirse la Fotografía ya utilizaba la *cámara clara* por él modificada á tal obje[to] para hacer el plano de las fortificaciones de la plaza de Lille y en 1852 ya empleó al mismo o[b]jeto el *daguerrotipo*.

Describe Porro en el lugar por nota antes citado las dificultades con que Laussedat trope[zó] para conseguir buenos planos y dice que en su consecuencia este consideró el procedi[mi]miento como propio solamente de la Topografía expeditiva.

En 1855 el ilustre Porro tuvo conocimiento de estas dificultades; se puso á trabajar pa[ra] vencerlas y en 1857 las resolvió en cierto modo con un objetivo y placa sensible especiales, co[n] los que compuso su ingenioso aparato de *Fotografía esférica*, que allí describe; perfeccionad[o] le presentó en la exposición de Milán de 1871, que detalladamente hizo conocer el ilustre Sa[l]moiraghi en el *Politécnico* de aquel año y el ilustrado Ingeniero de la *Filotécnica*, Sr. Patriz[i] lo hace breve, pero claramente en un apéndice del interesante folleto (2) dedicado á explica[r] las condiciones del *taquímetro fotográfico*, que se construye en aquellos celebrados talleres [de] puede considerarse al presente como el mas perfeccionado y completo de este género.

Porro no fué, pues, el fundador del procedimiento foto-topográfico; pero con su grand[e] ingenio inició desde luego una importante mejora, que seguramente servirá de base á futuro[s] perfeccionamientos, como ya el profesor Schell lo ha intentado mediante un aparato semejan[te] omitiendo reconocer en esto la primacia de Porro, que muy acertadamente recaba para él e[l] Sr. Patrizi en la nota inserta en la página 61 de su citado folleto.

Genial é interesante, como todo lo suyo, es la idea del eximio Porro; pero como la imáge[n] en la superficie esférica sensible adolece de la indeterminación de los puntos del terreno, que [son] entre otros defectos, demostrarémos para las planas mas generalizadas, creémos que no mucho[s] mas que estas podrían conducirnos ó hacer de precisión los planos por su medio levantados[,] y por consiguiente sin dejar de dar mas adelante una sucinta explicación de su especial apara[to], nos atendrémos en este apéndice á exponer la teoría y la práctica del procedimiento foto-topográfico sobre *placas sensibles planas*, que es al presente el mas utilizado.

Muchos son los perfeccionamientos realizados hasta conseguir, como ya sucede, objetivos sin aberraciones, que en pocos segundos y con diafragmas de pequeñísimo diámetro dan imágenes limpias sobre placas perfectamente verticales, en que quedan señaladas las líneas de *horizonte* y *principal* ó sean los ejes coordenados á que se refieren los puntos, y medios fáciles de comprobación y corrección para conseguirlos en su verdadera posición, combinando la cámara oscura, así convertida en *fotográmetro*, con los aparatos topográficos al objeto de tener en uno solo cuanto se necesita para el levantamiento de los planos con la menor molestia posible; pero indudablemente el perfeccionamiento que está llamado á dar mejores resultados es la aplicación del *tele-objetivo* por la grande amplitud con que dá las imágenes de los objetos del terreno, pues amplifica hasta 15 veces las producidas por los objetivos generalmente utilizados y si bien exige mayor número de vistas para comprender el panorama de cada punto de estación, tiene aquello mucha importancia para conseguir mayor precisión: estos perfeccionamientos y los propios de la Fotografía han hecho que al presente los aparatos disponibles, como el que mas adelante describirémos, permitan hacer muy útil aplicación del procedimiento foto-topográfico en ciertos casos.

Como el Ingeniero Paganini es el que ha hecho mas aplicación de él en Italia, como funcionario que es del Instituto Geográfico Militar y autor de los distintos aparatos utilizados para

---

(1) Applicazione della Celerimensura alla misura generale parcelaria ed altimetrica dell'Italia. 5.ª dispensa, página 121.

(2) La Fotogrammetria e il Tacheometro fotográfico construto della Ditta «*Ing. Salmoiraghi*» (La Filotecnica) 1902.—Folleto de 72 páginas de 11 × 16'5 centímetros.—1'25 liras.

la carta geográfica de los Alpes, describe detalladamente en su precitado *Manual Hoepli* todos los construídos á su propuesta y bajo su dirección desde 1878 y los importantes trabajos realizados, lo que puede ser conveniente conocer á los que se dedican á la formación de los mapas generales y servicios análogos; solo encontramos algo exageradas sus apreciaciones bajo el concepto de la precisión conseguida y esto es natural, porque tales planos los compara con los antes conseguidos en los Alpes mediante la plancheta por indeterminadas intersecciones en la escala de $^1/_{50000}$

En cuanto á *noticias bibliográficas* especiales el mismo Manual contiene una relación detalladísima, que con provecho pueden consultar los aficionados, aunque le falta la crítica de tales obras, qué es indispensable para apreciar bien su valor y la referencia á dos españolas dignas de tenerse en cuenta.

Es una de estas, la *Topografía fotográfica* por los Ingeniosos agrónomos *D. Ciriaco Iriarte y Don Leandro Navarro* (1899) con 464 páginas de 24 × 17 centímetros y un grande atlas con 26 láminas, en que se resuelven muchos problemas de perspectiva mas interesantes al Arquitecto que al Topógrafo y que por consiguiente este considera algo molesto su estudio y exagerada la supuesta precisión que se dice conseguir, porque no se tienen en cuenta los defectos característicos de tal procedimiento, ni las escalas que aquel utiliza ordinariamente y la consiguiente precisión que necesita en los planos que ha de levantar.

La otra, por el contrario, es esencialmente práctica y en ella clara y sencillamente se describe la teoría y la práctica del procedimiento, se dan á conocer los medios de conseguir económicamente aparatos apropiados con las brújulas topográficas y cámaras fotográficas usuales y se enseña á construir los aparatos, que con muchas ventajas se pueden utilizar en los trabajos de gabinete, que sin ellos resultan molestísimos; finalmente se presenta un ejemplo práctico que dá mucha luz sobre la manera mas conveniente de aplicar este especial procedimiento; este interesante folleto del ilustrado é ingeniosísimo Topógrafo, Teniente Coronel de E. M. *D. Alejandro Mas y Zaldúa,* se publicó en 1902 y solo consta de 94 páginas de 28 × 19 centímetros con varias figuras y vistas intercaladas y cuesta 5 pesetas.

Por considerarlos mas sencillos, prácticos y suficientes utilizarémos principalmente los folletos de Mas y Zaldúa y Patrizi y el libro de Paganini para componer este apéndice, y, sin desconocer las buenas condiciones de otros muchos, *son los que juzgamos mas recomendables* para darse cuenta sencilla y cumplidamente de la teoría y de la práctica del procedimiento foto-topográfico.

3 — Fundamento y teoría del procedimiento foto-topográfico y consideraciones críticas sobre la precisión con que por su medio se consiguen los planos.

Es sabido que la *cámara fotográfica* consiste en una caja prismática, que en una de sus caras tiene engastado un objetivo y en la opuesta enfocable el cristal esmerilado. á que se sustituye la placa sensible, en que se pinta y fija la imágen de los objetos, que se encuentran en el campo útil de aquel.

Si en el plano del retículo de un anteojo astronómico se coloca una placa sensible, queda convertido en cámara fotográfica sin otra diferencia que ser muy reducido el campo de la vista (1), porque con él solo nos proponemos observar los puntos coincidentes ó próximos á la prolongación de su eje óptico; de todos modos prescindiendo de la indicada placa sensible y mirando por el ocular enfocado la imágen formada en el plano del retículo veémos la de los objetos de su campo perfectamente delineados, pero invertidos, porque en el anteojo, como en la

(1) Una de las últimas modificaciones que ha hecho el Ingeniero Paganini en sus aparatos, consiste precisamente en convertir la cámara fotográfica en anteojo poniendo un tubo ocular, dándola los movimientos azimutal y vertical propios de aquel y midiéndolos como en la generalidad de los goniómetros; pero creémos que este supuesto *perfeccionamiento* ofrecerá mas inconvenientes que ventajas y no será aceptado por los prácticos.

cámara fotográfica, se obtiene una *perspectiva cónica*, cuyo punto de vista se *supone* en el cen o óptico del objetivo, aunque realmente está para el cono incidente en el punto *nodal anterio* y para el emergente en el *nodal posterior*, como fácilmente se comprende teniendo en cuenta lo dicho en el número 19 del volúmen I.

Este es el *fundamento del procedimiento foto-topográfico;* porque si se pone horizontal el je óptico del objetivo y por consiguiente vertical su plano principal, á él paralelo el de la pl ca sensible bien enfocada y se hace que en ella queden determinadas las trazas del eje óptico el objetivo y de los planos horizontal y vertical, que le contienen, que serán los ejes coordena os de la imágen, conocidos con los nombres respectivamente de *punto principal* y *líneas de ho i-zonte* y *principal*, en cuyo caso la cámara así modificada se convierte en *fotográmetro*, es fá cil de comprender que conociendo la distancia focal, con que se ha sacado la vista, podrá det r-minarse gráficamente ó gráfico-numéricamente la inclinación azimutal y vertical de las rec as que desde el punto nodal posterior van á la imágen de cada punto del terreno, que será igu al, pero invertida, á la que corresponde á las rectas que desde el nodal anterior van á los mis os puntos del terreno y como, en cada estación fotográfica, de la orientación del plano y línea pr n-cipal ó sea del eje óptico del objetivo se deduce fácilmente la que corresponde á la visual á c da punto del terreno representado en la vista y desde dos ó mas estaciones previamente fijadas en el plano se determina por intersección la situación de los puntos identificados en las vis as, se podrá medir la distancia de cada uno á las mismas estaciones y con este dato y la incli a-ción vertical para cada punto determinada por la altura aparente de su imágen sobre ó deb jo de la línea de horizonte, se calculará sencillamente la altura de cada punto del terreno sobr ó debajo del plano horizontal, que pasa por el centro óptico del objetivo y por consiguiente su cota de nivel.

Como se hace difícil la identificación de los puntos del terreno y la medición de las d s-tancias aparentes sobre las imágenes *negativas*, que dá la placa sensible, se sacan de ellas las *positivas*, que facilitan esta busca y medición, en lo cual no hay, segun dicen los prácticos, g a-ve inconveniente, porque en el papel *al citrato* de Lumiere son despreciables las distensio nes por los lavados necesarios (1) y la positiva equivale á la sección del cono incidente de la pe s-pectiva hecha por un plano vertical paralelo al de la placa sensible y simétrico con ella rela ti-vamente á los citados puntos de vista, ofreciendo ademas la ventaja de poderse amplificar al duplo ó triplo, con lo cual se miden mejor tales distancias.

A esto se reduce en lo esencial la *teoría del procedimiento foto-topográfico;* pero para hac er la mas fácilmente comprensible creémos oportuno representar gráficamente los sencillos pri n cipios que la constituyen suponiendo en las figuras coincidentes con el centro óptico del ob j tivo los dos puntos nodales, que de él distan ordinariamente no mas de 2'5 milímetros (2 hacer algunos cálculos y consideraciones que complementen las ideas antes expuestas.

---

(1) Mas y Zaldúa.—Nota de la página 39.—Como casi todos los Autores es de la misma opinión el Ingeni Paganini, teniendo en cuenta (página 60) que si hay alteraciones son constantes en cada clase de papel y se pued determinar con precisión, «*aunque no sean tales*, dice, *que hayan de tenerse en cuenta en el graficismo mas escrup loso*»; pero deduce en las mediciones experimentales, que consigna en las páginas 95 y 96, entre las medias de *distancias aparentes* medidas sobre la *negativa* y *positiva* de una misma vista, una diferencia de 0'94 mm. con u máxima de 1'40 mm. y mínima de 0'30 mm. y en la *distancia focal* calculada la diferencia de 2 mm. en la 236'7 mm., que la corresponde y esto ya no resulta tan despreciable. Mr. Legros hace una discución interesan en las páginas 171 á 175 de su libro sobre las ventajas del uso de las positivas sobre *papel aristo-tipico;* pero rec noce que las *distensiones* alcanzan del $^1/_{1000}$ al $^1/_{200}$ de las dimensiones del papel con los baños que se le dan.

(2) Paganini dice, página 26, que entre los dos puntos nodales de los objetivos utilizados en los aparat bajo su dirección construídos, que describe en su libro, había la distancia de 5 mm. y si bien, segun dice Mr. L gros en su Fotogrammetrie, nota de la página 182, el Profesor Dörgens encontró en un *pantóscopo* de 172 mm. distancia focal solo 0'6 mm., en un *euriscopo* de 220 mm. de distancia focal 10 mm. y en un *aplandtico* de 255 m límetros de distancia focal 2 mm., parécenos mas apropiado á los objetivos de los fotográmetros el *intersticio* señ lado por Paganini, aunque él utilizó objetivos de distancia focal de 240 mm. bastante mayor que la generalmen empleada, que suele ser de 130 á 150 mm.

A tal efecto supondrémos puesto en estación un fotográmetro bien corregido, nivelado y orientado su plano principal con un punto del terreno préviamente determinado, (como un vértice de triangulación ó de poligonal) y sea O (figura 137) el centro óptico del objetivo, BC la placa sensible, LH y DE las *líneas de horizonte* y *principal* y P *el punto principal*, que en ella quedarán marcados como se dirá mas adelante, y MN la horizontal que pasa por P y O; suponiendo que la placa BC se encuentra enfocada respecto á un punto A del terreno, OP será la

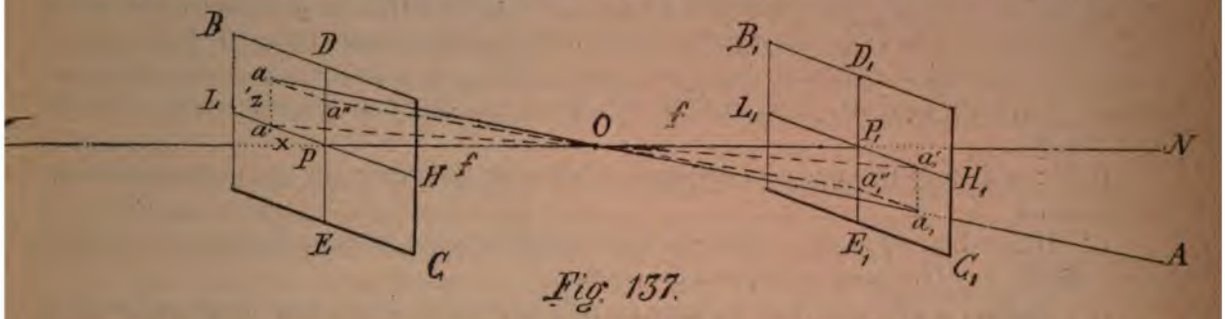


Fig. 137.

distancia focal utilizada y es indudable que la imágen de A, se formará en a, traza de la recta AO con la placa sensible; si la proyectamos sobre el plano horizontal en a' y tiramos la aa'' paralela á LH, $aa'' = a'P = x$ será la *distancia aparente* y $aa' = a''P = z$ la *altura aparente* tambien del plano horizontal LHO sobre A; $a'OP$ será el ángulo reducido al horizonte del que AO forma con el plano vertical DMN ó *principal* del fotográmetro, que sirve para orientarle y midiendo aquel directamente ó deduciendo su valor del de x y f se deducirá la orientación de la línea OA: por otra parte el ángulo aOa' es el de inclinación de la recta OA con el antedicho plano horizontal, cuyo valor se determina en función de aa', *altura aparente* y de Oa', distancia del centro óptico del objetivo á la proyección de a, que tambien se puede deducir en función de x y f en el triángulo rectángulo $a'PO$; en resúmen se tienen asi determinadas las inclinaciones azimutal y vertical de la línea AO relativamente al plano principal y al horizontal del objetivo del fotográmetro.

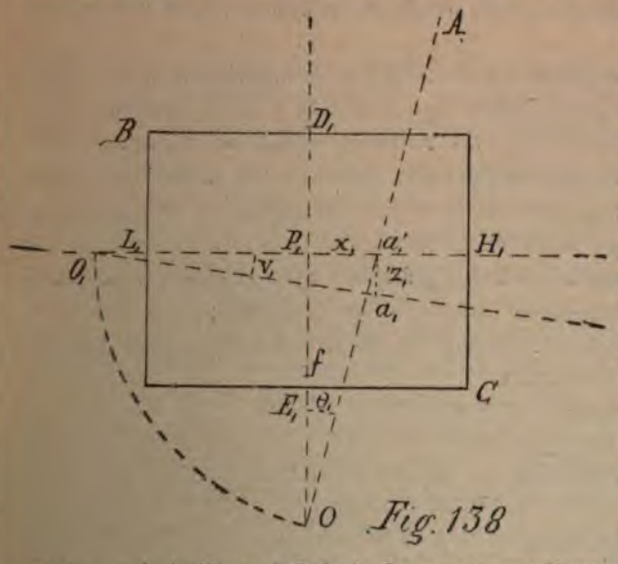


Fig. 138

En la figura 137 se hace evidente la inversión de la inclinación azimutal y vertical que corresponde á las *fotografías negativas;* pero sacando las *positivas*, como se hace generalmente, salvo los errores consiguientes á las variaciones del papel por los lavados, que se consideran despreciables, se obtienen los mismos datos, pero directos, como en la misma figura indicamos con la supuesta placa simétricamente colocada respecto al centro óptico del objetivo con la sensible que dá la negativa.

Veamos como se determinan gráfica y gráfico-numéricamente las repetidas inclinaciones de la línea AO de la figura 137 mediante la positiva fotográfica.

Clavada esta en un papel, en que se habrán trazado dos rectas perpendiculares, de manera que con ellas coincidan las de *horizonte* y *principal* señaladas en la vista (fig. 138), se proyecta sobre la 1.ª en a_1' el punto considerado y en la 2.ª con la distancia focal utilizada se marca el punto O; la recta Oa_1', que los une, formará con la línea principal E_1D_1 el ángulo θ_1, que marcará la dirección en que se halla el punto del terreno y que sumado ó restado, segun los casos, á la orientación, θ, de la cámara nos dará la correspondiente del punto del terreno con referencia al de estación.

Tomando en la línea de horizonte, $L_1 H_1$, prolongada la distancia $a_1' O_1 = a_1 O$ y trazand la recta $O_1 a_1$ esta formará con aquella el ángulo v_1 de inclinación bajo el horizonte, en el cas de que se trata, de la recta que desde el centro óptico del objetivo vá al punto del terreno.

Haciendo lo mismo con la fotografía del mismo terreno sacada desde otra estación, cuy situación en el plano esté préviamente determinada, mediante las orientaciones del mism punto del terreno identificado en las dos fotografías se tendrá por intersección la situación pla nimétrica del punto del terreno considerado y se podrá *medir* ó *calcular* la distancia á cada un de las estaciones y con ellas y los *ángulos* de inclinación determinados calcular la altura de l punto con relación á cada una de las estaciones y, pues que se tendrá la de estos entre sí, s e podrán comprobar aquellas, pues que debe ser igual la cota del punto que relativamente á cad a una resultare.

Dedúcese de todo esto que para conseguir la situación geométrica de un punto y su cota es necesario:

1.° Determinar las de dos ó mas estaciones fotográficas por los procedimientos topográficos y señalarlas *gráficamente* en el papel del plano.

2.° Conocer la *distancia focal* utilizada en cada una de las dos ó mas vistas empleadas que dá el fotógrametro ó se puede determinar gráfica ó numéricamente con la vista fotográfica de puntos del terreno de situación conocida, como luego se dirá.

3.° En cada una *proyectar gráficamente* sobre la línea de horizonte la traza ó imágen del punto del terreno despues de identificarle, lo que verémos que es difícil hacerlo con precisión en la generalidad de los casos.

4.° *Medir* en cada una la distancia $O a_1'$ y fijar con ella la situación sobre la linea de horizonte del punto O_1.

5.° Trazar las líneas $O a_1'$ y $O_1 a_1$ y medir con el trasportador los ángulos θ_1 y v_1 y

6.° Finalmente por medio de los primeros trazar la dirección desde cada estación al punto del terreno para conocer su situación planimétrica sobre el plano, *medir* sobre él su distancia á cada una y con ellas y los ángulos verticales antes medidos deducir la altura del punto con relación á cada estación fotográfica.

De aquí se deduce el gran trabajo que, sin contar con el difícil de la *identificación* de cada punto en las vistas, motivaría la construcción de un plano algo detallado y la imposibilidad de conseguir la *precisión preconizada* por la generalidad de los Autores; porque en distancias tan pequeñas los errores gráficos y otros, que despues señalarémos, han de tener importancia; en cuanto á lo primero se ha procurado y conseguido vencer la dificultad mediante los aparatos especiales el *tablero*, el *intersectógrafo* y el *trasportador fotográficos*, y en cuanto á lo segundo se ha acudido á fórmulas, que sino estuvieran basadas en datos gráficos y otros, cuyas variaciones no es fácil conocer, permitirían conseguir resultados numéricos de precisión; pero que por aquella condición no pueden serlo y por eso hemos calificado de *gráfico-numéricos;* para que se conozca su valor vamos á ocuparnos brevemente de ellas.

Del triángulo $P_1 O a_1'$ de la figura 138 resulta:

$$\text{Tang. } \theta_1 = \frac{x_1}{f} \qquad (1.^a)$$

$$\text{y} \quad O a_1' = \sqrt{f^2 + x_1^2} = \frac{f}{\text{Cos. } \theta_1} \qquad (2.^a)$$

y del triángulo $O_1 a' a_1'$

$$\text{Tang. } v_1 = \frac{x_1}{O_1 a_1'} = \frac{x_1 \text{ Cos. } \theta_1}{f} \qquad (3.^a)$$

$$\text{ó bien} \quad x_1 = \text{Tang. } v_1 O_1 a_1' = \frac{\text{Tang. } v_1 f}{\text{Cos. } \theta_1} \qquad (4.^a)$$

Las (1.ª) y (3.ª), que dan los ángulos de inclinación azimutal y vertical, implican el conocimiento de la distancia focal, *f*, y la medición sobre la vista fotográfica de las coordenadas *x*, y *x'*, en que por ser ordinariamente muy pequeñas, asi como el valor de *f*, los errores del graficismo y de la medición sobre el plano han de tener bastante importancia.

La (4.ª) si evita la medición de *x'*, obliga á la del ángulo *v*, y no dará mayor precisión.

En su consecuencia creémos que limitando las precauciones á lo posible, en tanto no se utilicen vistas sacadas con el *tele-objetivo, lo mas práctico será hacer la busca é identificación de los puntos, la determinación de las inclinaciones referidas y todos los demas trabajos subsiguientes con graficismo esmerado sobre positivas amplificadas al duplo ó cuádruplo*, segun los casos, *naturalmente con la distancia focal determinada por el fotográmetro igualmente multiplicada por el mismo factor*.

No cabe duda que con el procedimiento foto-topográfico se puede conseguir en poco tiempo y con pocas molestias en los trabajos de campo la situación de grandísimo número de puntos característicos en los terrenos mas escabrosos con tal que sean despejados y libres de obstáculos, que impidan ver cada uno desde dos ó tres estaciones y que estas estén préviamente determinadas por triangulación ó poligonales topográficas bien realizadas y asi mismo que cuando los vértices de estas aparezcan claramente en las vistas, servirán de recomendables comprobaciones; PERO ¿SE CONSEGUIRÁN POR ESTE PROCEDIMIENTO PLANOS DE PRECISIÓN? EN NUESTRO CONCEPTO NO POR LAS RAZONES SIGUIENTES:

1.ª El exacto conocimiento de la *distancia focal* es base indispensable para determinar gráfica ó gráfico-numéricamente los datos necesarios, segun hemos visto.

La *distancia focal*, como conjugada de la que separa del objetivo los puntos representados, varía, como ya digimos en el número 19 del volúmen I, conforme á la fórmula allí consignada (página 61).

$$d = \frac{F}{1 - \frac{F}{D}}$$

y como para sacar una vista se utiliza una sola distancia focal y en aquella se represèntan puntos muy diferentemente distantes y con distintas inclinaciones (1) ha de resultar necesariamente que *la imágen de la mayor parte de ellos no esté en su foco*.

La imágen de cada punto no se forma por un solo rayo luminoso, sino que cada uno emite un cono de ellos que incidiendo en el objetivo y por él refractados emergen de él en otro cono inverso, que tiene el vértice en su foco formando la imágen y prolongándose en un tercer cono inverso del segundo, como claramente se representa en la figura 48, página 84 del volúmen I; por consiguiente si la placa sensible no está en el foco conjugado de un punto, su imágen no será otro punto sino un circulito tanto mayor cuanto mayor sea aquella separación y la imágen del punto se presentará tanto mas confusa cuanto mayor sea dicha separación.

Ya vimos en la página 62 del volúmen I que la de los focos conjugados disminuye con la distancia y como en las fotografías utilizadas generalmente se representan puntos distantes de la estación de 300 á 6000 y mas metros *algunos Autores aceptan para sus trabajos foto-topográficos una sola distancia focal*, la principal del objetivo, la que corresponde á los puntos colocados al infinito; *otros* sin embargo creen mas conveniente determinar *para cada estación* sea de una sola vista, sea del conjunto de las que constituyen el panorama, *la que señala en cada una el tubo objetivo;* pues marcada en él la distancia focal principal y enfocándose mediante su movimiento horizontal, en una escala milimétrica en él grabada y mediante un nónius se aprecia en

(1) Es indudable que la distancia focal varía con la inclinación de la recta que va de la estación á cada punto; solo el eximio Porro lo ha tenido en cuenta al exigir que la placa sensible sea esférica con radio igual á la distancia focal principal, lo que sino corregirá el defecto de las diferentes para puntos próximos desigualmente distantes del objetivo, sí le podrá corregir para los muy distantes con distintas inclinaciones y por eso en las placas esféricas han de resultar las imágenes mucho mas limpias y bien delineadas que en las planas.

milímetros y décimas lo que se alarga en cada caso y por consiguiente la *distancia focal utilizada*, á cuyo efecto se hace completamente rígida la cámara fotográfica.

Parece que esto debiera bastar; pero sin duda no sucede así, pues en los datos experimentales que consigna Paganini en las páginas 95 y 96, que le sirvieron para calcular la distancia focal utilizada en las vistas de un panorama, se notan diferencias no despreciables en las abscisas medidas en las fotografías negativas y lo mismo sucede en las positivas, diferencias que no pueden atribuirse á cambios por los lavados, aun que en su comparación estos tambien se ponen en evidencia, como ya digimos en la nota (1) de la página 422 y aquellas diferencias exceden de las que se deducen de la aplicación de la fórmula de los focos conjugados para grandes distancias; pues el mismo Autor deduce, página 26, para el objetivo que utiliza de 240 mm. de distancia focal principal las siguientes congujadas:

Para los objetos lejanos al infinito, distancia focal de 240 mm.

á	300 metros	»	»	240'02 mm.
á	200 »	»	»	240'20 »
á	100 »	»	»	240'50 »
á	10 »	»	»	245'90 » (1)

de donde resulta que las diferencias en distancias mayores de 300 metros serían despreciables y mucho menores que las correspondientes á las deducidas de las vistas del panorama, que consigna Paganini en la página 95; pues calculada la distancia focal con la mayor y menor abscisa (77'40 y 76'9 mm.) allí consignadas para las negativas resulta con la menor f = 236'67 milímetros y con la mayor f = 238'213 mm. ó sea una diferencia de 1'534 mm. y eso que se trata de distancias de mas de 3000 metros, lo que puede ser debido á error en la medición de las distancias gráficas ó á los que inconscientemente se cometen en la colocación de las placas y en la enfocación de cada vista; porque si con un poco de práctica y vista regular un objeto bien determinado, como una banderola, una mira ú otro semejante se enfoca bien y pronto no es posible hacerlo con los numerosísimos objetos que á muy diferentes distancias y desigualmente iluminados presentan su imágen en el cristal esmerilado y de aquí las diferencias en la enfocación; por esto parécenos lo mas acertado atenerse á la distancia focal, que señala en cada caso el tubo objetivo, porque mejor ó peor, y salvo las diferencias consiguientes á la sustitución del cristal esmerilado por la placa sensible, es realmente la distancia focal utilizada en cada vista; pero de todos modos resulta que no obstante las muchas precauciones aconsejadas por el ilustrado Ingeniero Paganini *nunca se conoce con completa precisión y seguridad la distancia focal, ni la utilizada conviene á la generalidad de los puntos de cada vista fotográfica, lo que hace que* SOLO SEAN APROXIMADAS LAS SOLUCIONES GEOMÉTRICAS Y NUMÉRICO-GRÁFICAS.

2.ª En cada vista fotográfica se presentan dibujados los objetos en muy diferente escala segun la distancia á que se hallen de la estación; haciendo los sencillos cálculos necesarios relativamente á un fotográmetro de 15 centímetros de distancia focal resultan dibujados los objetos en las siguientes escalas:

Los distantes	300 metros	en la de			$^1/_{2085}$
»	»	1000	»	» » »	$^1/_{6794}$
»	»	2000	»	» » »	$^1/_{13583}$
»	»	3000	»	» » »	$^1/_{20376}$

(1) Aplicada la fórmula 4.ª del número 19 del volúmen I á las distancias de 20, 200 y 2000 metros, á que se hallarán frecuentemente los objetos del terreno comprendidos en una misma fotografía y teniendo en cuenta que la distancia focal principal de los objetivos generalmente utilizados suele ser de 15 centímetros, nos han resultado las conjugadas siguientes:

Para D = 20	metros. . . .	d = 151'1335	mm.
» D' = 200	»	d' = 150'1126	»
» D'' = 2000	»	d'' = 150'0112	»

con las diferencias respectivas á la focal principal de 1'13 mm., o'11 y o'01 mm. y entre la 1.ª y 2.ª de 1'02 mm. y entre la 2.ª y 3.ª o'1 mm. que no son despreciables para los puntos próximos cuando se enfoca para los distantes y al contrario.

Y como, salvo casos muy especiales, por la indeterminación de puntos concretos de cada objeto algo voluminoso no se podrá medir en las vistas su distancia y altura aparentes con menos error de 0'5 mm., á lo que contribuirán tambien los efectos de la distinta iluminación (1), el error probable en cada punto será respectivamente de 1'016, 3'396, 6'792 y 10'188 metros, que naturalmente aumentará en los mas distantes de la estación.

3.ª Como ya digimos en la nota de la página 21 del volúmen I, la apreciación de los ángulos medidos con trasportador de 30 centímetros de diámetro no pasa de 8' á 10' y por consiguiente si así se determinan los de inclinación azimutal y vertical antes referidos, como que por otra parte tienen su vértice comun no sobre la vertical de la estación, sino sobre las de los puntos nodales, cuya situación varía en las diferentes vistas del panorama, no pueden ser exactos y han de influir en las intersecciones, de que se deducen las distancias y las cotas, y como ademas la de cada punto á la estación se determina por intersección gráfica y gráficamente se mide, no es posible fijar la situación planimétrica, ni calcular la cota con la precisión preconizada, cuando á tal medición se apela, y en todos casos subsisten los errores de la intersección y medición gráficas de las distancias del punto á las estaciones, los de las pequeñas magnitudes de las coordenadas en la fotografía y de los propios de la distancia focal de la imágen de cada punto del terreno.

4.ª Finalmente *aunque se han reconocido y medido,* dice M. Legros (página 215) *los errores posibles debidos á las irregularidades de refracción del cristal esmerilado y las flexiones del aparato con la introducción de los chasis cargados con cristales de grandes dimensiones, nadie sabe lo que pasa dentro de la cámara oscura; no se sabe si la placa sensible se coloca en la misma posición que el cristal esmerilado, ni la influencia de las irregularidades consiguientes á la presión de los resortes;* LO QUE ES POCO DUDOSO ES QUE ESTAS CAUSAS DE ERROR NO SON MAS DESPRECIABLES QUE LAS QUE SE HA CREIDO CONVENIENTE PREVENIR. Considera por consiguiente trabajo perdido el que se toman algunos para conseguir una precisión imposible de obtener.

No hay, pues, que hacerse ilusiones sobre la grande precisión que muchos Autores atribuyen al procedimiento foto-topográfico.

Pero ¿QUIERE ESTO DECIR QUE NO PODAMOS NI DEBAMOS UTILIZARLE EN LOS TRABAJOS PROPIOS DEL TOPÓGRAFO Y OTROS SIMILARES?

De ningun modo; porque allí precisamente donde estos presentan mayores dificultades, como sucede en los terrenos mas escabrosos y menos accesibles; allí, en que la grande precisión es pocas veces necesaria, la Foto-topografía nos suministra muy sencillamente los datos geométricos indispensables; en el relleno de los mapas geográficos y especiales, en los ante-proyectos de vías de comunicación, aprovechamientos de agua y otros trabajos semejantes el procedimiento foto-topográfico bien realizado puede prestar grandísimos servicios con indudable y notoria economía de tiempo, molestias y dinero y en la formación del plano de la fachada de un edificio ó combinación de objetos, que se encuentren en un plano vertical, no tiene rival,

---

(1) Es tal el efecto de la iluminación que una bola de billar iluminada por arriba aparece como una esfera aplastada por los polos; si por un lado aplastada por este; si de frente aparece como un círculo y si iluminada igualmente por todos lados con la luz difusa aparece la esfera, segun hace constar Mr. Legros (página 261), y como la luz solar varía tanto y tambien el punto de mira desde las dos estaciones al menos necesarias, cuando los objetos no son de formas geométricas bien determinadas (como banderolas, hitos, esquinas de edificios, etc.) es casi seguro que en las dos vistas no se determinará con seguridad el mismo punto ó línea solo por la influencia nociva de la iluminación.

Para evitar este inconveniente aconseja Paganini (página 107) que se saquen las vistas en las horas mas próximas al medio día é Iriarte y Navarro (página 276) por la mañana mirando al O y por la tarde mirando al E; pero como no será fácil acomodarse á tales propuestas y no se evitarán los inconvenientes de la diferente iluminación desde las dos estaciones al menos necesarias y por el contrario cuanto mayor sea la intensidad de la luz mayores serán los efectos de luz y sombra, que tanto hacen variar las formas de los objetos, parécenos que no se conseguirá lo que se desea; creemos que, en cuanto sea posible, se han de utilizar los momentos en que predomine la luz difusa sea por ligero nublado, ó porque el Sol haya llegado á su ocaso, con tal que quede suficiente claridad para ver bien los objetos del terreno.

porque colocando el fotográmetro bien corregido, nivelado y orientado en el plano vertical perpendicular á aquella en su punto medio, en cuanto sea posible á la mitad de su altura, á conveniente distancia y enfocando con todo cuidado, lo que entonces es muy fácil, la imágen resulta muy exacta por eliminarse la mayor parte de las causas de error antes indicadas y para deducir las dimensiones verdaderas de las partes basta medir una línea principal de la fachada, pues de su relación con la magnitud correspondiente de su imágen se consigue la escala del plano y despues del conseguido en la positiva fotográfica se deduce la negativa y positiva en la escala que convenga, como se hace en la copia, reducción y amplificación de los planos fotográficamente con grande precisión.

Si la estación no reuniera las condiciones antes indicadas, se conseguiría la perspectiva pintoresca, no el plano geométrico á no deducirle de los muy complicados y poco prácticos procedimientos, que algunos Autores explican haciendo repulsivas sus obras á la generalidad de los lectores, aunque tengan mucho mérito bajo el punto de vista teórico.

Esto consignado para evitar ilusiones perniciosas y nocivas repulsiones continuemos la descripción crítica, que nos hemos propuesto realizar.

4 — Taquímetro-fotográfico de Salmoiraghi.

Se han construido y se utilizan muy diferentes aparatos para la aplicación del procedimiento foto-topográfico, que se clasifican en *foto-grámetros, foto-brújulas, foto-teodolitos* y *foto-taquímetros;* los primeros exigen naturalmente que se complementen los datos que suministran con los que proporcionan los goniómetros ordinarios de la Topografía y, como esto complica los trabajos, ahora se utilizan mas los otros tipos, en que ya se combinan las condiciones de ambas clases de aparatos.

Paganini explica en su mencionado libro las condiciones, comprobaciones y correcciones de los *foto-teodolitos* bajo su dirección construidos y utilizados por el Instituto Geográfico militar de Italia, cuya característica es la gran distancia focal (240 mm.) de su fotográmetro y la facilidad de su desmontura para el transporte, condiciones necesarias para hacer el mapa de los Alpes y otras abruptas cordilleras, á que especialmente se han destinado.

Mas y Zaldúa describe detalladamente la conversión de las brújulas y teodolitos del sistema Breithaux en *foto-brújulas* y *foto-teodolitos,* porque disponiendo de aquellos, con poco gasto y su mucho ingenio y competencia en Mecánica hizo la conversión, que pueden realizar los que se hallaren en igual caso.

Patrizi describe detalladamente las condiciones geométricas y fotográficas, las comprobaciones y rectificaciones del excelente *Taquimetro fotográfico* de Salmoiraghi que, por considerarle el mas completo y perfeccionado de los aparatos de este género y el mas apropiado á las necesidades de los Topógrafos, creemos oportuno dar á conocer.

En la figura 139 le representamos y claramente se vé en ella que consiste en un buen taquímetro de anteojo excéntrico, que entre sus montantes contiene el fotográmetro, disposición la mas propia para dar seguridad á los resultados y facilitar las comprobaciones y correcciones de las dos partes esenciales del aparato de que nos ocuparémos separadamente.

Taquímetro

El *trípode* de forma inglesa y doble plataforma es el que muchos Topógrafos consideran el mejor actualmente utilizado; pero, como ya digimos en la página 273 del volúmen I, creemos preferible el de plataforma sencilla y especialmente los que la tienen circular con mayor movimiento de traslación y trípode de seis brazos del mismo Salmoiraghi y el de Laguna, que resultan mas baratos y seguros, aunque los últimos son algo mas embarazosos para el trasporte.

El *juego* de tres tornillos no presenta mas inconveniente que el que ya digimos ofrecen los tornillos con cabeza, que sirven para regular la abertura de las ramas de la plataforma; pues si bien una vez conseguida la verticalidad del eje general se pueden hacer completamente inmo-

bles los tornillos del juego apretándolos, lo que en manos expertas es una gran ventaja, los operadores distraidos, que son los mas, no cuidan de dar la soltura conveniente á los tornillos y al hacerlos girar con fuerza los inutilizan pronto ó, lo que casi es peor, dejan excesivamente abiertas las dos partes de cada rama permitiendo al aparato un cabeceo inconveniente; por esto consideramos preferibles los tornillos de unión con ranura en la cabeza, pues con el destornillador se regula de una vez la abertura de las ramas de la plataforma del juego, de manera que sus tornillos giran siempre con suavidad y sin cabeceo.

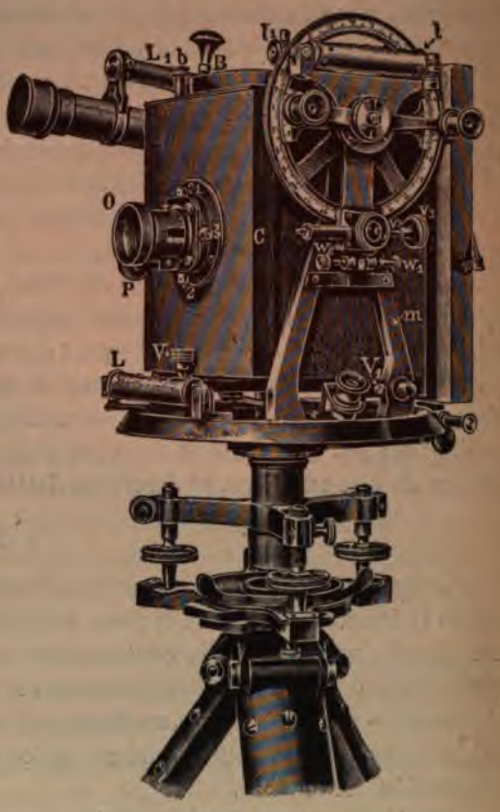


Fig. 139

Esta observación, como la referente á la plataforma doble del trípode de forma inglesa, no va contra el constructor, que naturalmente hace lo que el consumidor considera preferible; pero como ellas implican menor gasto y mas seguridad, hemos creido oportuno repetirlas en la seguridad de que, si así se pide por los Topógrafos, el constructor lo hará muy complacido, porque se le facilita la construcción.

Sólidamente unido al cilindro que se levanta en el centro de la plataforma del juego, se encuentra perpendicularmente á su eje el platillo del *limbo azimutal* de 16 centímetros de diámetro útil dividido en tercios de grado sobre plancha de plata y en que mediante dos nónius opuestos se aprecian con seguridad y fácilmente los 30″, ó el centígrado, si se pide la graduación centesimal: aquella condición hace difícil la orientación oportuna del diámetro 0°-180° ó 0ᶜ-200ᶜ y si bien puede conseguirse la de cualquiera visual teniendo en cuenta la graduación originaria, esto es la que corresponde á la meridiana utilizada ó á una directriz cualquiera ó á la estación anterior, esto complica los registros y los cálculos y sería conveniente dar á tal platillo el movimiento azimutal, que tiene en todos los taquímetros y teodolitos: ciertamente que asi se complica algo la construcción; pero no creemos que con ello se aumentara mucho el precio del aparato (1), especialmente si, como antes hemos indicado, se simplificaban la plataforma del trípode y el juego.

El *limbo vertical* tiene 11 centímetros de diámetro y con la misma división que el azimutal y dos nónius opuestos se aprecian también teóricamente los 30″; pero realmente no se conseguirá tal apreciación, como lo sabe muy bien el ilustre Salmoiraghi, que los hace así por complacer á los consumidores.

El *anteojo* con objetivo de 28 mm. de abertura y 24 centímetros de distancia focal es distanciómetro, no analático, con constante de 35 centímetros, completamente reversible, y su retículo compuesto de tres trazos con ángulo diastimométrico de 1 : 100 ó centímetro por metro.

Como en las montañas conviene con frecuencia medir distancias mayores de 300 metros y

(1) El instrumento completo cuesta en Milán 1100 liras.
Cada marco ó chásis de placas ademas del que se acompaña á cada aparato 14 liras.
Si se quiere obturador neumático 35 liras.
Se encuentra á la venta en casa de Biosca, Rambla de Santa Mónica, 2.

esto no se consigue con la necesaria comprobación con el ángulo diastimométrico de 1 centímetro y las miras parlantes, sería conveniente utilizar *las de dos planchas* con la fija en lo alto y ángulo diastimométrico de 5 mm., con lo cual se podrían medir hasta 600 metros cómodamente y aun hasta 1200 metros con los medios ángulos, lo que solo se ha de hacer en casos extremos, porque no es recomendable, aunque se empleen los dos medios, por no hacerse la debida comprobación directa y la de las notas del portamira; las miras de esta clase mas resistentes y baratas son las de cuadradillo, que describimos en las páginas 636-640 del volúmen I y por su mayor sencillez en el trasporte, aunque de mas difícil manejo, tambien se pueden utilizar las de la misma clase de tres cuerpos de los distinguidos Ingenieros Alvarez Arenas y Prieto, que tambien allí describimos; pero como siempre que sea posible se ha de utilizar el mayor ángulo diastimométrico, en el retículo ha de constar tambien el de 1 centímetro por metro.

La excentricidad del anteojo, que en las distancias cortas y en las comprobaciones se ha de tener en cuenta, es de 107 mm.

Con los niveles *L* del platillo azimutal, *l* de la pieza de los nónius verticales y el de quita y pon, L_1, que está sobre el anteojo, se puede poner vertical el eje general del aparato, horizontal el diámetro 90°-270° ó 100ᶜ-300ᶜ del limbo vertical y hacer las comprobaciones y las correcciones del aparato como taquímetro, que no creemos necesario repetir, pues son las ya dichas para esta clase de aparatos y lo advertido sobre la excentricidad del anteojo en las brújulas ordinarias; por otra parte en el folleto del Ingeniero Patrizi, que acompaña al taquímetro fotográfico de que tratamos, se describen detalladamente sus comprobaciones y correcciones.

Fotográmetro

La *caja* de aluminio enteramente rígida está comprendida entre los dos montantes descansando indirectamente sobre el plato azimutal de la alidada y directamente sobre un telar, que con aquella puede moverse verticalmente mediante el tornillo V para hacer vertical el cristal esmerilado ó la placa sensible adosados á la pared posterior y azimutalmente alrededor de un eje próximo á aquel tornillo mediante dos opuestos, de los cuales solo se vé uno el V, para rectificar la falta de paralelismo del eje óptico del objetivo de la cámara fotográfica y el plano de colimación del anteojo.

El *objetivo*, O, que es aplanático de esmerada construcción y distancia focal principal de cerca de 16 centímetros, está colocado en un doble tubo sujeto á la pared de la caja mediante cuatro tornillos, 1, 2, 3 y 4, que le permiten pequeños movimientos para su rectificación; la enfocación conveniente en cada caso se consigue moviéndole horizontalmente con el tornillo de rosca P; como en el tubo fijo está señalada la distancia focal principal y de ella parte una escala milimétrica y en el movible hay un nónius que aprecia las décimas, en cada caso se tiene fácilmente la distancia focal utilizada añadiendo á la principal los milímetros y décimas, que el nónius señala en dicha escala.

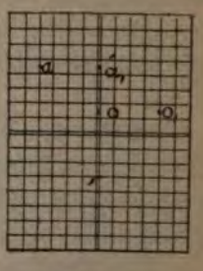


Fig. 140.

El *cristal esmerilado* y sucesivamente los *chásis con dos placas sensibles* de construcción esmerada se colocan convenientemente en la parte posterior de la cámara sustituyéndose sus caras en el mismo plano: en el primero se ha construido una cuadrícula centimétrica señalando las líneas principal y de horizonte con doble línea, como aparece en la figura 140, para la comprobación de la orientación y otras del fotográmetro; las *placas sensibles tienen* 12 centímetros de base por 16 de altura alcanzando un campo de mas de 40°, de manera que, como aconseja Paganini (página 61), con diez vistas se puede comprender todo el panorama quedando sectores comunes de mas de 3°, lo que permite unirlas fácilmente y hacer buenas comprobaciones.

Para que en las fotografías queden marcados los ejes coordenados ó sean las líneas de horizonte y principal y consiguientemente el punto principal, Paganini y otros utilizan dos finos hilos de plata ó de platino, adosados á la placa sensible en que quedan marcados; pero como

se pueden romper ó alterar su posición metiendo y sacando los chásis, se ha substituido este medio por otro, que Patrizi describe detalladamente y nos concretarémos á indicar.

Consiste en colocar en dos pequeños marcos ó telares cerca del plano focal cuatro piezas de metal con hueco angular, cuyo vértice se hace coincidir con los extremos de los ejes coordenados del cristal esmerilado, como aparece en la figura 141 y que en la negativa fotográfica quedan señalados como consta en la 142, y trazando en esta con una punta de aguja las rectas que unen los vértices opuestos de los triángulos negros señalados, se tendrán en la fotografía los ejes coordenados, que tambien se marcan en las positivas.

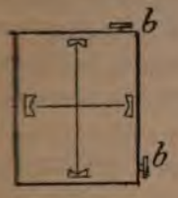


Fig 141.

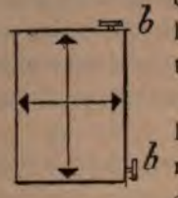


Fig 142.

Como para que esto suceda con exactitud es preciso que las indicadas piezas se adosen sucesivamente al cristal esmerilado y á la placa sensible sin impedir que se pongan y saquen los marcos que las contienen, se hace que tales piececitas se apliquen á las paredes de la cámara ó á los referidos marcos mediante los botones *b b*, que se indican en las figuras.

Obsérvase tambien sobre la caja del fotográmetro una *brújula* de 85 mm. de diámetro útil y un *nivel* l,, sirviendo la primera para comprobar la orientación del plano principal y el segundo la horizontalidad de la base de la cámara y del eje óptico de su objetivo; pues cuando esta condición se ha conseguido se centra su burbuja y despues acusa aquella condición; pero conviene comprender su comprobación y rectificación previa en las propias del aparato considerado como taquímetro, de manera que cuando la burbuja de los otros niveles esté centrada asi suceda á la del l,, sin perjuicio de volverlo á hacer con sus tornillos de corrección si se inclinara la caja del fotográmetro y así tambien que el diámetro o°-180° de la brújula sea paralelo al de los ceros de los nónius del limbo azimutal.

Finalmente como no es necesario obtener vistas instantáneas y los obturadores de pequeña abertura dan mas limpieza en las líneas de los objetos, aunque naturalmente exigen algunos mas segundos de exposición, cuya duración varía tambien con la claridad del día é iluminación de los objetos del campo fotográfico, aconseja Patrizi que se utilice generalmente el obturador de cuero con abertura de 5 mm., que á mano se pone en el objetivo.

Comprobaciones y rectificaciones del fotográmetro

Para hacerlas se quitará el obturador, se cubrirá el fotográmetro y la cabeza del observador con el paño negro, que usan todos los fotógrafos y para ver mejor la imágen en el cristal esmerilado se utilizará la lente de mano, que á tal efecto se incluye en la caja del aparato.

Cuando este, corregido como taquímetro, se pone en estación bien nivelado, las condiciones necesarias de su fotográmetro son, segun Patrizi:

1.ª *Que los dos ejes coordenados del cristal esmerilado sean respectivamente horizontal y vertical y con ellos coincidan los vértices de las escotaduras, que sirven para marcarlos en la negativa;*

2.ª *Que el óptico del objetivo sea normal al cristal esmerilado y consiguientemente á la placa sensible;*

3.ª *Que este plano sea vertical;*

4.ª *Que el eje óptico del fotográmetro y el de la aguja de la brújula sean paralelos al plano de colimación del anteojo;*

5.ª *Que la cara anterior del cristal esmerilado y la de la placa sensible ocupen el mismo lugar;*

6.ª *Finalmente es tambien necesario comprobar la distancia focal principal del objetivo dada por el constructor.*

Para comprobar la *1.ª condición* se busca con el anteojo horizontal un punto bien determinado y lejano del terreno y observando su imágen en el cristal esmerilado con la lente de mano y bajo el paño negro, regularmente se la verá coincidente con el punto principal ó intersección

de los ejes coordenados, porque ni la excentricidad del anteojo, ni la altura de su eje óptico sobre el del objetivo del fotográmetro influirán de una manera sensible si el punto observado está bastante lejano (mas de 500 metros); si asi no sucediere se hará que caiga la imágen exactamente sobre la línea horizontal inclinando la cámara mediante el tornillo V; pero antes de hacerlo se cuidará de observar la centración de la burbuja de todos los niveles para cerciorarse de la verticalidad del eje general del aparato y la horizontalidad del óptico del anteojo; aquello conseguido se hará girar azimutalmente la alidada, de manera que la imágen del punto antes observado recorra de un extremo al otro la línea de horizonte; si con ella coincide será horizontal; sino se tomará nota de su inclinación, se sacará el cristal esmerilado y se inclinará en sentido inverso mediante los tornillos, con que á tal efecto está unido por pequeños muelles á su marco, hasta que se consiga la horizontalidad deseada.

Si los ejes del cristal están bien marcados, como es de suponer, el otro eje coordenado, que hemos llamado de las 'z y Patrizi llama de las *y*, será perpendicular al de las x ó línea de horizonte y sino lo fuera habría que desechar el cristal esmerilado; pero de todos modos se puede comprobar la condición viendo si coincide con la imágen de una aplomada colocada no lejos del aparato ó con una arista de edificio.

Hecha la comprobación y rectificación, en su caso, de la horizontalidad y verticalidad de los ejes coordenados del cristal esmerilado es preciso ver si con ellos coinciden los vértices de las escotaduras, que han de servir para determinarlos en la negativa fotográfica y al efecto se miran cuidadosamente con la lente poniéndola y el ojo normalmente á la superficie del cristal; si la coincidencia existe, la condición se verifica; sino se quita el marco del cristal y se mueven convenientemente las piezas escotadas mediante los tornillos, que las sujetan al marco interno.

Dedúcese de lo expuesto que la comprobación de la 1.ª condición es sencillísima; pero no tanto las correcciones; pero, como en los talleres de construcción se hacen y aseguran las piezas, rara vez tendrá que hacerla el operador, que sin embargo debe cuidar de hacer esta y todas las demas comprobaciones para tener seguridad de la bondad de los resultados de su trabajo.

La 2.ª condición se supone cumplida por el constructor y de todos modos tiene tan poca importancia en los resultados que, segun demuestra Patrizi, aunque la inclinación errónea alcance á 15' la diferencia en los valores de las x y 'z sobre la negativa del fotográmetro, á que nos referimos, no pasa de 0'09 mm. verdaderamente inapreciable.

Para comprobarlo se dirige la visual á un punto lejano bien determinado, cuya imágen se pintará en el eje de las 'z, se busca despues otro punto cuya imágen se pinte exactamente sobre una línea de la cuadrícula del cristal esmerilado, se hace girar la alidada hasta que esta segunda imágen coincida con el eje de las 'z y entonces el 1.er punto presentará su imágen en la línea simétrica de la del 2.º punto en su primera posición, como para los puntos *o* y *a* se indica en la figura 140; la corrección se hace en el sentido conveniente con los tornillos 3 y 4 de unión del tubo objetivo á la caja de la cámara.

Para hacer la comprobación en el sentido vertical se eligen tres puntos que se encuentren en una misma, los dos extremos equidistantes del medio, que visándole pintará su imágen sobre el punto principal y la de los otros dos sobre el eje de la 'z y su altura aparente debe ser igual ó se corregirá mediante los tornillos 1 y 2 de la pieza del tubo objetivo.

La *3.ª condición* se comprueba observando si la imágen de un punto lejano y bien definido observado con el anteojo horizontal se pinta exactamente sobre la línea de horizonte; si asi no sucede se inclinará la caja del fotográmetro mediante el tornillo V, que la hace bascular.

La *4.ª condición*, en cuanto á lo primero, se comprobará viendo si en la observación anterior la imágen del punto coincide con el principal ó intersección de los ejes coordenados del cristal esmerilado; con todo rigor teniendo en cuenta la excentricidad del anteojo y la altura del centro óptico de su objetivo sobre el del de la cámara, aunque si el punto está lejano (mas de 500 metros) tales diferencias son inapreciables sobre el cristal esmerilado y sobre la negativa.

Si asi no sucediere se moverá la cámara en el sentido azimutal en lo necesario mediante los tornillos V,.

En cuanto al paralelismo del eje de la aguja ó de la brújula se verán las graduaciones opuestas que señala, se invertirá el anteojo extremo por extremo y se visará nuevamente el mismo punto; si la aguja señala las mismas graduaciones con las puntas opuestas, esto es la S la que señalaba la N y al contrario, la condición se verifica; en otro caso se moverá su limbo hasta que aquellas ocupen la mitad de la diferencia y se repetirá la operación para afinar las dos partes de la condición, porque en la 2.ª y 3.ª observación la imágen del punto debe pintarse en el principal del cristal esmerilado.

La *5.ª condición* se ha de confiar en que la haya cumplido el constructor; pero se puede comprobar hasta cierto punto enfocando con mucho cuidado el cristal esmerilado relativamente á un objeto notable y de líneas bien definidas y sacando la vista sin alterar la distancia focal, observar despues si en ella aparece la enfocación para el mismo objeto, lo cual exige práctica fotográfica, que generalmente no tienen los Topógrafos.

La *6.ª condición* exige que se calcule la *distancia focal* correspondiente á un punto bien determinado del terreno y se compare con la señalada por el nónius del tubo del objetivo.

Segun ya dice Patrizi, la línea origen de la escala de este no fija con toda precisión la distancia focal principal de las vistas fotográficas, porque el focómetro no dá estas sino las correspondientes al vértice de las lentes y aquella corresponde al 2.° punto nodal, y por lo tanto dicha línea es solo de referencia; pero como en los talleres constructores disponen de medios suficientes para calcular la distancia del nodal al vértice, creemos sería conveniente que se expresara la magnitud de tal distancia y ella quedara determinada con la línea origen de la escala; de otro modo para poco serviría esta y suponemos que asi lo harán, porque al Topógrafo le es muy difícil medir con la precisión necesaria la distancia entre el punto de vista, 2.° nodal, y la cara de la placa sensible y tendría que calcularla en cada caso, como lo hace Paganini utilizando los vértices de la triangulación geodésica comprendidos en las vistas fotográficas y cuyas distancias y alturas relativas son ya conocidas, que como alcanzan miles de metros permiten considerar la focal deducida como principal, aunque las diferencias encontradas demuestran que, como decía Legros, nadie sabe lo que pasa dentro de la cámara oscura y de aquí la imposibilidad de considerar de precisión los planos realizados con el procedimiento de que nos ocupamos y que para alcanzar la posible se aconseje medir la distancia focal para cada vista utilizada, sin conseguir la precisión preconizada, porque en el cálculo de la distancia focal entra como elemento necesario una medida hecha sobre la fotografía.

No dándole por consiguiente mayor precisión de la que le corresponde, veamos como se puede calcular el valor de f por medio de las *distancias* y *alturas aparentes* y del ángulo θ_1, que forma la visual dirigida á un punto bien determinado con el plano principal del fotográmetro.

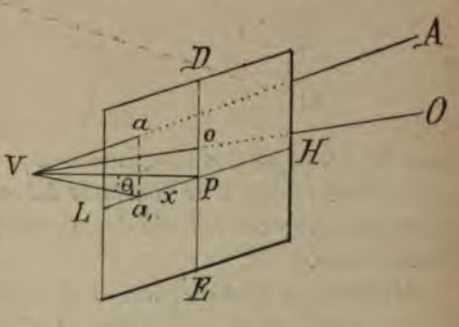


Fig 143

Si este dirigimos á un punto lejano del terreno O (figura 143) mediante el anteojo, su imágen se pintará sobre la línea principal en o y la de otro punto notable A en a; uniendo su proyección a_1 con el punto de vista V en la fotografía, se formará el triángulo rectángulo $V\,p\,a_1$, del que conocerémos el ángulo a, $Vp = \theta$, que se medirá con el taquímetro y la magnitud $P\,a_1$, midiéndola con cuidado sobre la negativa para evitar las alteraciones consiguientes á los lavados necesarios para obtener la positiva, aunque, segun dejamos dicho, los prácticos las consideran despreciables, y tendrémos

$$Vp = f = \frac{p\,a_1}{\text{Tang. } \theta_1} = \frac{x}{\text{Tang. } \theta_1}$$

y cuidando de elegir los puntos O y A muy lejanos de la estación y entre sí á derecha ó izquierda, de enfocar con la mayor atención, de repetir la observación y cálculos para otros puntos de

análogas condiciones, la media de los diferentes valores deducidos para f dará muy aproximadamente la *distancia focal principal*, y observando la posición en cada caso del cero del nónius de la escala del tubo del objetivo se deducirá fácilmente la que corresponde á la línea originaria de dicha escala, que servirá despues para calcular la distancia focal utilizada en cada estación fotográfica.

Si se pudiera hacer estación en un vértice de triangulación préviamente hecha, dirigiendo la visual á otro vértice y estando horizontal el eje óptico del objetivo del fotográmetro, se pintaría la imágen de aquel sobre la línea principal, cuya *altura aparente* z_1, se podrá medir y como se conocerán las distancias horizontal D y vertical z (1) entre los dos vértices, resultaría:

$$\frac{f}{D} = \frac{z_1}{Z} \text{ de donde } f = \frac{D z_1}{Z}$$

Haciendo lo propio respecto á todos los vértices de los lados concurrentes en el de la estación la media de los valores de f dará tambien un valor muy aproximado á la verdadera distancia focal principal.

El Ingeniero Paganini detalla los cálculos por él hechos en los Alpes discutiendo los diferentes casos, que pueden ocurrir, en las páginas 69 á 96 de su interesante Manual Hoepli.

Podrían hacerse todas las comprobaciones y correcciones de una vez sencillamente procediendo de la manera siguiente:

En terreno llano y despejado se pondrá el aparato en estación bien nivelado en un punto A (figura 144) y se marcarán con banderolas ó jalones los B y C sobre la misma alineación y á igual distancia (de 100 metros v. gr.) de aquel, marcando sobre las banderolas los puntos de nivel con el eje óptico del anteojo puesto horizontal, todo lo que es muy sencillo y breve utilizando las miras de dos planchas, que ya se colocarán con la separación oportuna descontando lo la que corresponde á la *constante del anteojo:* para mayor seguridad el punto C se determinará con la inversión del anteojo despues de fijar el punto B y con otra inversión se observará nuevamente este.

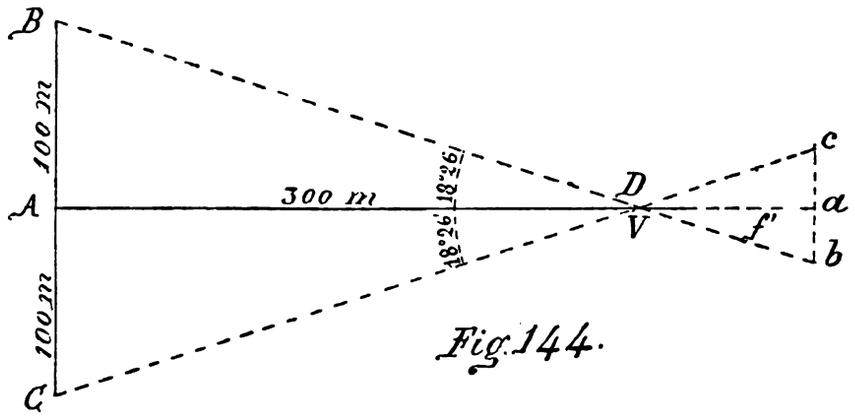


Fig. 144.

Mediante el limbo azimutal se levantará en A la perpendicular AD á la BC y se situará con las condiciones indicadas y teniendo en cuenta la distancia del eje general del aparato al objetivo del fotográmetro el punto D á la distancia, v. gr., de 300 metros, marcándose tambien en la banderola ó jalón el punto de nivel del eje óptico del anteojo horizontal comprobando tambien con él invertido la perpendicularidad de AD y el punto de nivel: despues de fijar en

(1) A esta *ha de añadirse,* contrariamente á como lo hace el Ingeniero Paganini, en la página 72, la diferencia de altura por la refracción del aire y esfericidad de la Tierra para tener la *altura aparente*, que es la que influye en la imágen; pues que en el cálculo de las alturas relativas de los vértices se cuidaría de restar la misma cantidad, que es siempre negativa para tener la altura verdadera.

A la altura del eje óptico con una banderola ó jalón se quitará el aparato y se pondrá en estación bien nivelado en el punto D midiendo la diferencia de altura entre la antes señalada en la banderola y el eje óptico del objetivo del fotográmetro, con cuya diferencia se arreglará la altura señalada en las banderolas de los puntos A, B y C al objeto de que los cuatro se encuentren en el mismo plano horizontal y se marcan sobre sus banderolas mediante pequeños travesaños con la dirección CB, á fin de que la imágen de los puntos de nivel se vea bien en el cristal esmerilado primero y despues en la negativa.

Finalmente con el taquímetro se medirán los ángulos ADB y ADC, que, segun los datos supuestos serán iguales entre sí y á $20'48^c = 18°26'$ próximamente; podrá comprobarse la horizontalidad de la linea determinada por los travesaños puestos en las banderolas A, B y C, que ha de ser recta y de nivel y se colocará en el plano vertical, que contiene AD, habiendo en cuenta la excentricidad del anteojo, una aplomada á la distancia de 10 metros.

Esto hecho se observará la imágen en el cristal esmerilado y, si se cumplen las condiciones necesarias, la imágen de la línea de nivel CAB coincidirá con la línea de horizonte, la de la aplomada con la principal y las de los travesaños de las banderolas B y C á igual distancia de la línea principal: si asi no sucediere se corregirán las diferencias observadas como fácilmente se deduce de las correcciones parciales anteriores.

La distancia focal, f', utilizada se deduce fácilmente de la semejanza de los triángulos rectángulos ABD y Dab, iguales respectivamente á los ACD y Dac, pues resulta:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{f'}{ab}$$

y como AD es triplo de AB, f' lo será de ab, distancia aparente ó x, que será ademas igual á ac y será fácil medir con bastante aproximación sobre la negativa, pues la bc comprenderá casi todo el campo.

Comparando la magnitud calculada para f' con la señalada en la escala del objetivo se conocerá la correspondiente á su línea de origen y enfocando con un punto muy lejano sin necesidad de sacar negativa se verá si coincide ó no con la focal principal y podrá calcularse esta con bastante aproximación.

5 — Trabajos de campo.

Hay que distinguir los propios del plano de terrenos de pequeña extensión de los que se han de practicar en los que la comprenden muy grande; pero no pueden darse reglas precisas dejando al Topógrafo que en cada caso haga la combinación de los trabajos propios de la Topografía, que han de dar con la necesaria precisión la base, el esqueleto del terreno, y los correspondientes á la Fotografía, que basándose en aquellos nos procuren los datos necesarios para hacer el relleno, para detallar de una manera conveniente los accidentes del terreno: esto es; por los procedimientos topográficos se ha de determinar gráfica ó numéricamente la situación planimétrica y altimétrica de las estaciones fotográficas y de los puntos de general comprobación y por el fotogramétrico la de todos los puntos característicos de los accidentes del terreno.

Para levantar el plano de uno de poca extensión, como quiera que fácilmente se dá cuenta el operador de las estaciones fotográficas necesarias, que serán pocas, y de las de la poligonal que ha de fijar su situación y la de los puntos notables de comprobación para unos y otros, parécenos que lo mas oportuno será señalar con banderolas estos en el reconocimiento previo y las estaciones topográficas y fotográficas con jalones (1); determinar despues la situación de

(1) Paganini compara (página 100) las condiciones de las estaciones trigonométricas y fotográficas considerándolas muy diferentes; pero no son tanto si las últimas se comparan con las de las poligonales del procedimiento taquimétrico, si bien en este como desde ellas se han de determinar puntos distantes á lo sumo 300 metros y en aquellas otros distantes 3000 y hasta 6000 metros, es evidente que sus condiciones de visibilidad no pueden ser iguales, ni tampoco su separación para que las intersecciones sean buenas y no se multipliquen inútilmente los trabajos de campo y gabinete.

todos estos puntos y finalmente sacar las fotografías necesarias de manera que cada punto se encuentre en dos ó tres de ellas con buena intersección.

Este órden en las operaciones es el que permite recoger mas ordenadamente y en las mejores condiciones los datos topográficos y fotográficos, porque las fotografías, para que sean útiles no se pueden sacar á cualquier hora del dia y condiciones de iluminación, que se han de elegir segun el estado atmosférico y la forma y orientación general del terreno; pero sabemos por experiencia cuanto molesta recorrer varias veces el terreno, especialmente si es escabroso, y precisamente por esto algunos aconsejan hacer las dos clases de trabajos simultáneamente, lo que podrá hacerse en algunas estaciones por llegar á ellas cuando el terreno, cuya vista se ha de sacar desde allí, esté bien iluminado; pero no sucederá lo mismo en todas; sin embargo se ha de aprovechar la ocasión disminuyendo las molestias consiguientes.

En los terrenos de grande extensión ha de preceder una triangulación especial, cuidando de determinar por intersección directa ó inversa los puntos que se creyeren convenientes para estaciones fotográficas por apreciación general; despues por reconocimiento especial se fijarán las demas, cuya situación se determinará por trisección inversa, cuando se vean tres ó mas vértices de aquella ó por poligonales apropiadas para relacionarla con los vértices ó puntos interiores de situación ya conocida y es claro que lo primero podrá hacerse al mismo tiempo que se saquen las fotografías posibles y necesarias y lo segundo en el resto del día ó en los de mala iluminación.

Con tal que los puntos que han de servir de comprobación estén bien señalados en el terreno para que aparezcan claramente en las fotografías, estas pueden sacarse con independencia de los trabajos topográficos, antes ó despues de ellos, porque luego en el gabinete se relacionan y la habilidad del Topógrafo consiste en combinarlos segun las circunstancias de manera que siendo los resultados aceptables le ocasionen las menores molestias y pérdida de tiempo.

En cada estación fotográfica, *en los planos de pequeña extensión*, no se sacan ordinariamente mas de una, dos ó tres fotografías, porque, con el campo útil de 36° en cada una, se abarca todo el terreno bien visible desde ella, ya se estacione en una ladera del valle para sacar la vista de la opuesta y el talvech, ya la parte de vega entre ellas comprendida, ya se mire un barranco en el sentido de su longitud; pero, *en los planos de grande extensión* de las grandes cordilleras, generalmente conviene en cada estación sacar diez vistas de 36° de campo comprendiendo todo el panorama con sectores repetidos de 3.°, porque los puntos comunes en las vistas adyacentes sirven de comprobación.

Algunas veces para mayor seguridad se sacan dos vistas de cada parte del terreno para elegir la mejor.

Para evitar que se deterioren, se han de fijar las negativas y aun sacar dos positivas de cada una sin pérdida de tiempo en la residencia eventual y á tal efecto se ha de establecer en ella un laboratorio fotográfico de campaña.

Es claro que antes de empezar los trabajos se ha de comprobar y corregir el aparato, nivelarle con cuidado al ponerle en estación asegurándole bien, porque, si se moviera con el viento las fotografías resultarían confusas y borrosas, y orientar el plano principal del fotográmetro mediante el limbo azimutal con referencia á una línea de situación conocida; cuando se saquen dos, ó mas vistas diferentes ó todas las del panorama, bastará cambiar la dirección del plano principal en 36° justos mediante el limbo y asi quedan todas orientadas.

Es necesario numerar las vistas de cada estación quedando en ellas tambien marcada la designación de esta; algunos aparatos ya están dispuestos para ello; pero en todo caso se pueden escribir con tiza en un cartón negro y ponerle invertido á poca distancia del objetivo del fotográmetro y quedarán marcados en la fotografía.

Para quitar el cristal esmerilado sin mover absolutamente la cámara se ha de cuidar de levantar con los botones *b b* (figura 141) las piezas escotadas, colocar con mucha precaución el *chásis* quitando su tapadera ó *cortinilla* y despues con los mismos botones *b b* aplicar suavemente las piezas escotadas á la placa sensible y finalmente quitar la tapa del objetivo y volverla

poner despues del tiempo de exposición que se considere necesario, segun la iluminación, separar las piezas escotadas, bajar la cortinilla del chásis y sacarle guardándole con las precauciones necesarias para que la negativa no se deteriore; todo esto se ha de hacer con sumo cuidado y pulcritud para que no se mueva absolutamente la cámara fotográfica, que se comprobará observando la centración de la burbuja de los niveles y especialmente la del *l*,

Ya hemos dicho que unos opinan que la hora mas apropiada para sacar las vistas es la de medio día y otros por la mañana las de las vertientes del O. y por la tarde las del E.; pero esto depende de los detalles y exposición del terreno y del estado de la atmósfera y hasta de los colores predominantes en los objetos y accidentes del terreno; cuando mejor se destaquen los puntos y líneas será el momento mas oportuno, que habrá de aprovecharse, pues se necesita muy poco tiempo para realizar los trabajos fotográficos en cada estación y antes y despues se pueden realizar los topográficos necesarios para fijar su situación, sino estuviese hecho, y para comprobar la orientación del plano principal del fotográmetro y calcular la distancia focal en cada estación utilizada.

Con mucha frecuencia parte del terreno presenta buenas condiciones para levantar su plano fotográficamente y otra parte no y en tal caso en la 1.ª se utilizará el aparato en el concepto indicado y en la 2.ª simplemente como taquímetro uniéndose los resultados en el gabinete mediante las poligonales, que relacionan todas las estaciones; esto se vé claramente en el plano de Ribas y sus alrededores levantado por el Sr. Mas y Zaldúa, de que luego nos ocuparémos; pues el del pueblo y parcelas confinantes le levantó por el procedimiento taquimétrico y el de los estrechos y escabrosos valles de los arroyos *Rigalt* y *Fresser* lo hizo foto-topográficamente con muy buen éxito; pretender aplicar el 2.º en ciertos lugares es perder completamente el tiempo y hacerlo del 1.º en los muy escabrosos es darse mas molestias y gastar tiempo y dinero sin necesidad: los dos procedimientos se completan perfectamente y el buen Topógrafo debe aplicar cada uno segun las condiciones del terreno, cuyo plano se le pida.

6 — Trabajos de gabinete.

Como la situación planimétrica y altimétrica de todas las estaciones fotográficas y la de los puntos principales de comprobación se determina por los procedimientos topográficos, mediante sus tres coordenadas ortogonales se señalan en el papel del plano en la escala, que este se quiera conseguir, con la designación y cota á cada uno correspondiente.

Utilizando buen papel cuadriculado ó cuadriculándole expresamente de manera que una de las líneas tenga la dirección de la meridiana geográfica ó magnética ó la directriz á tal objeto utilizada y que el lado de la cuadrícula represente un número exacto de decenas ó centenas de metros segun la escala, se facilitará el señalamiento de las estaciones fotográficas y los trabajos gráficos subsiguientes.

Con la orientación del plano principal de cada fotografía se trazará en cada estación el de las que desde ella se hayan sacado, como aparece en la figura 145 correspondiente al plano de los valles del Fresser y Rigalt en Ribas, levantado por el Sr. Mas y Zaldúa, á que harémos especial referencia, y designando las líneas que las determinan con el número que ya consta en cada fotografía, sus intersecciones indicarán cuales de ellas podrán utilizarse para cada porción del terreno, cuyo plano se quiere conseguir.

Aunque algunos aceptan para *distancia focal* de todas las vistas fotográficas *la principal* señalada por el constructor del aparato, la generalidad proponen que para cada vista ó grupo de vistas obtenidas en cada estación, se utilice la distancia focal especialmente calculada por uno de los procedimientos explicados al hablar de la comprobación y rectificación de la 6.ª condición de los fotográmetros, lo cual no es difícil si en cada estación se ha cuidado de reunir los datos necesarios, aunque sí molesto, cuando se utilizan tantas vistas como empleó el Sr. Mas y Zaldúa en el referido plano; en todo caso se puede tomar nota de la señalada en la escala del objetivo del fotográmetro y utilizarla sin nuevos cálculos.

Despues se ha de hacer la *identificación* de los puntos en cada grupo de las dos ó tre: elegidas para cada porción de terreno y si bien esto es facilísimo respecto á puntos bien d nados como hitos, aristas de edificios y otros semejantes, es dificilísimo para otros mucl las razones alegadas en nuestras consideraciones críticas acerca de la supuesta precisión c cedimiento (páginas 425 á 427) y aunque se ha pretendido obviar á esta dificultad con l: de los puntos Kern ó de Hauck, ofrece tantas dificultades su aplicación que, con razón

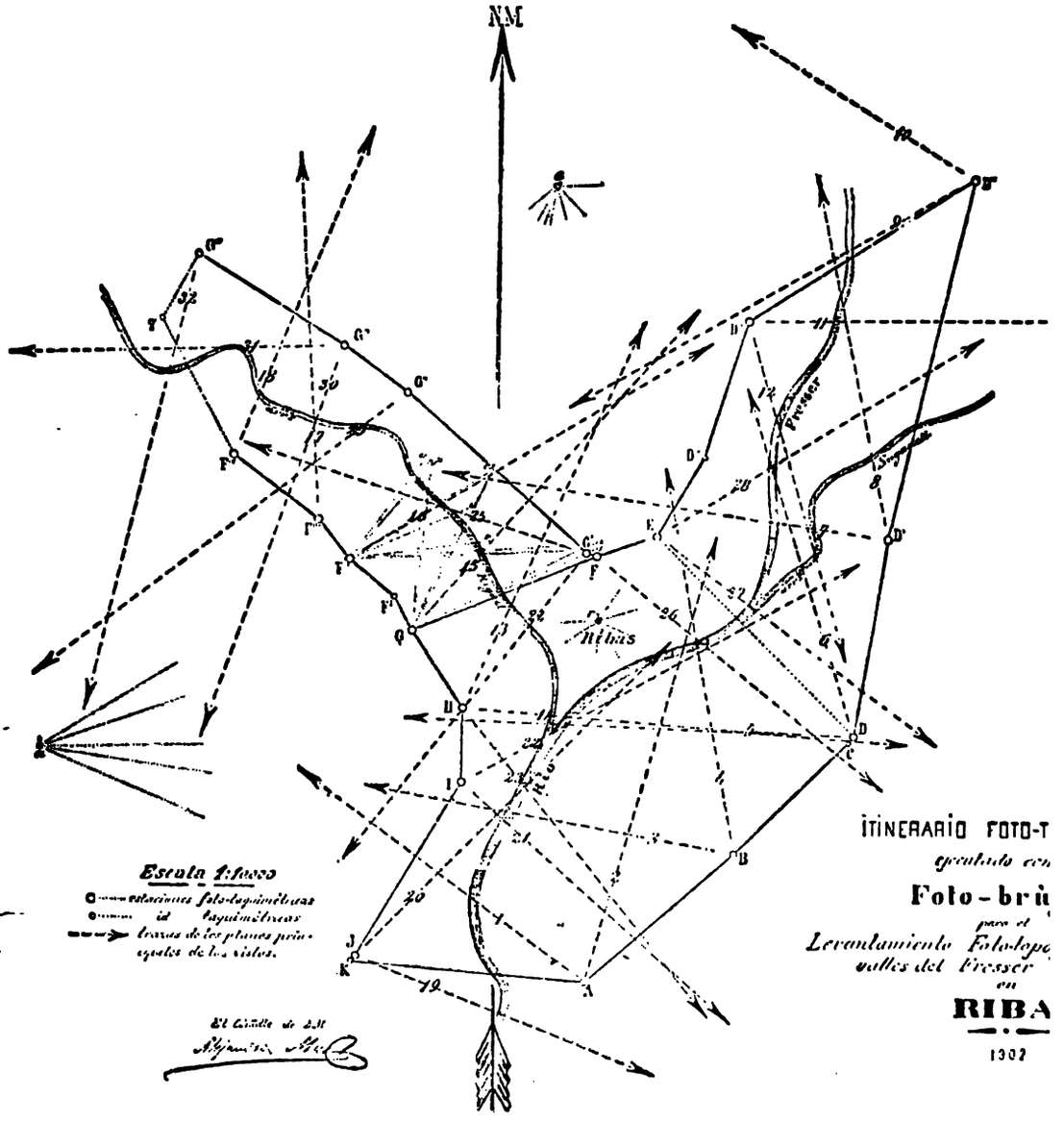


Fig. 145

Mas y Zaldúa que es preferible abandonar la identificación de tales puntos, porque no l sidera necesarios, ya que se pueden identificar otros muchos suficientes al objeto propu

Para corroborar estas ideas nada mejor podemos hacer que copiar, como lo hacemo figuras 146 y 147, las dos excelentes vistas fotográficas, que, para sus interesantes instru teórico prácticas, comprende en su citado folleto aquel ilustrado Tratadista y como para se cargo de la diferencia indicada basta fijar la atención en las condiciones de los punto lados en ellas con el mismo número, es innecesario hacer consideraciones sobre los que llan en uno de los dos casos antes aludidos.

Debemos, sí, advertir que para facilitar la identificación de los puntos y hacer las mediciones sobre las positivas necesarias para hallar los valores de f, x, y y θ, se sacan de cada negativa dos positivas de doble tamaño que la negativa dada por el fotográmetro del aparato y como en

Fig. 146

este resultan de 12 × 16 centímetros, las indicadas positivas tendrían 24 × 32, que permiten fijar bastante bien los detalles del terreno.

Hecha la identificación de los puntos necesarios en cada grupo de vistas determinantes de los de cada porción del terreno, se ha de deducir de ellas la orientación ($\theta \pm \theta_1$) de la recta de cada punto á su estación, como digimos en las páginas 423 y 424 (figura 138), consiguiendo por

la intersección la situación planimétrica de cada punto y por consiguiente su distancia á estación y con ella y la inclinación vertical (v,) la cota teniendo en cuenta la de cada estaci la altura del instrumento, comprobándose los dos valores que asi se consiguen.

Como esto daría lugar á un trabajo muy molesto y á una verdadera enredada madeja de líneas, que haría muy difícil conocer las intersecciones convenientes y las distancias medibles, se han inventado el *tablero* y *transportador fotográficos* y el *intersectógrafo*, que simplifican grandemente estos trabajos: Mas y Zaldúa los describe sencilla y completamente dando modelos aceptables de ellos y de los registros en que se han de anotar los resultados y como en su

interesante folleto podrán verlos nuestros lectores con advertencias y noticias muy dignas de tenerse en cuenta prescindirémos aqui de hacer su descripción.

Con las cotas del grandísimo número de puntos determinados fotográficamente y relacionando el plano asi levantado con el de la villa de Ribas hecho taquimétricamente, el Sr. Mas y Zaldúa realizó el de curvas de nivel de aquel valle en tales condiciones, que no podemos re-

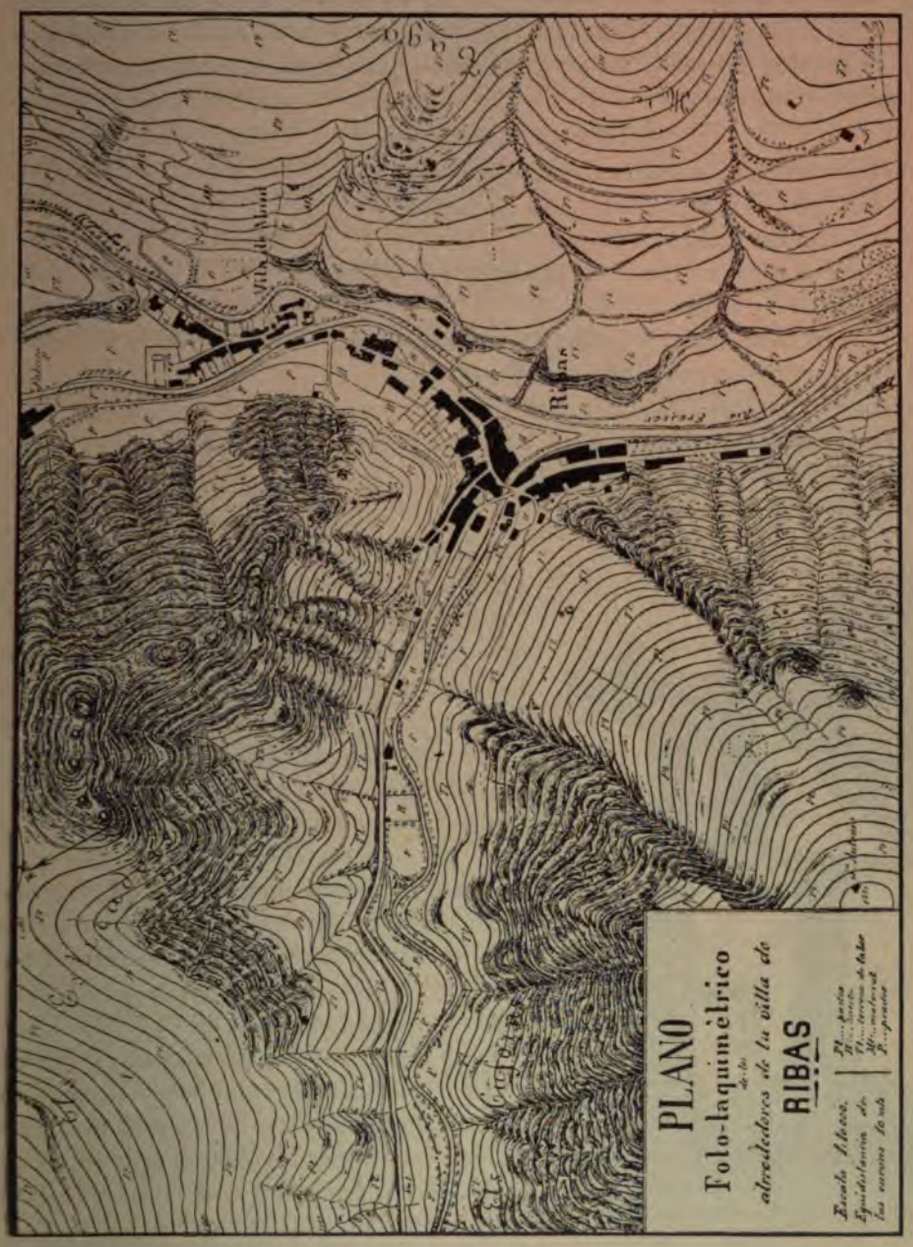


Fig. 148

nunciar á darle á conocer, como lo hacemos copiándole en la figura 148, si bien, como pocos reunirán las condiciones de tan ilustrado y laborioso Topógrafo, que es á la vez un gran dibujante, no será fácil que consigan una representación tan completa del terreno; pero si ordinariamente la suficiente á las distintas aplicaciones, en que, como ya indicamos en la página 427, puede con provecho utilizarse el procedimiento fotogramétrico.

7 — Fotografía esférica.

Para terminar esta descripción crítica mas que didáctica de la foto-topografía nos falta solo dar á conocer el aparato con que el eximio Porro creía conseguir mayor provecho de la Fotografía en el levantamiento de los planos y que, segun ya digimos en la página 420, el Doctor Schell ha presentado como propio ha pocos años, utilizando á tal efecto la descripción, figura y leyenda explicativa que el ilustrado Ingeniero Sr. Patrizi consigna en las páginas 66 y 71 de su interesante folleto y lo que Porro dice sobre el mismo asunto en su citado último libro.

En la figura 149 se representa claramente el aparato por Porro ideado, construido y presentado en la exposición de Milán de 1871, tal como en el gabinete se utiliza para medir los ángulos horizontales y verticales.

LEYENDA EXPLICATIVA

B B — Base del aparato, que puede ser plataforma del juego.
A — Columna giratoria alrededor de un eje central.
c,c, — Limbo azimutal que gira con A.
m_1 — Microscopio para la lectura de los ángulos azimutales.
S S — Soportes del eje horizontal.
a a — Eje horizontal al que está fija la cámara fotográfica.
C C — Cámara fotográfica con fondo sensible esférico.
O — Objetivo fotográfico.
C_2 — Limbo vertical que gira con el eje a a y con la cámara fotográfica.
m_2 — Microscopio para las lecturas zenitales.
F — Colimador fijo.

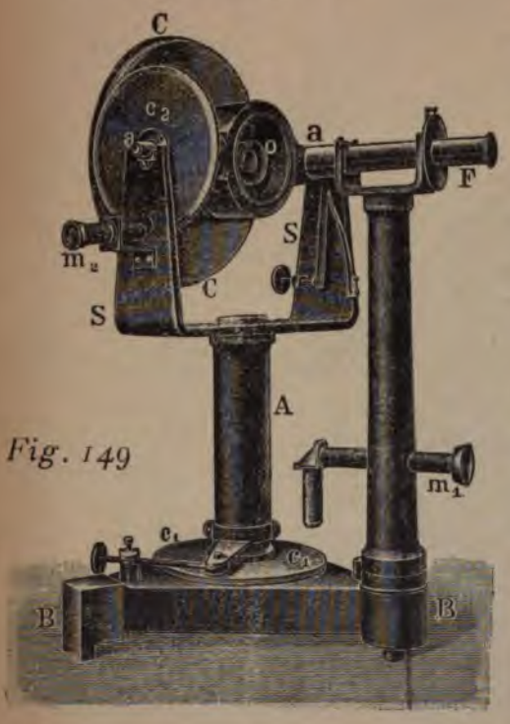


Fig. 149

Segun el eximio Porro dice (1) resolvió las dificultades que al Coronel Laussedat se presentaron con el aparato representado en la figura 149, cuyo objetivo se componía de flinc con una cavidad llena de agua ligeramente salada, con diámetro de 39 mm. y espesor de 9, cuya superficie esférica de un decimetro de radio, producía en una anchura icónica de 160° á 180° en ambos sentidos imágenes esféricas perfectamente limpias y geométricamente exactas.

Para que estas imágenes se produjeran en condiciones utilizables es consiguiente que no ha de existir durante su impresión el colimador, que el eje A y el limbo c_1 han de ser verticales y por lo tanto horizontal el eje óptico del objetivo O y este eje ha de estar perfectamente orientado; á tales efectos debería completarse el aparato con órganos apropiados, porque de otro modo no sería fácil determinar los ángulos azimutales y verticales correspondientes á las rectas que desde el centro óptico del objetivo, que se halla en la vertical de la estación, van á los diferentes puntos del terreno; Porro no se preocupó por el momento de todo esto, porque no le era difícil conseguirlo; pero el aparato resulta incompleto.

Conseguida y fijada la imágen, colocada en un bastidor para que se pueda iluminar y el

(1) Applicazione della Celerimensura alla misura generale parcellaria ed altimetrica dell'Italia. — Quinta dispensa, 1870, página 122.

colimador de manera que su eje óptico pase por el centro del objetivo de la cámara, que es centro de la superficie esférica impresionada y que permanece fijo en los movimientos azimutal y vertical de esta, dice Porro que realizándolos convenientes para que la imágen de cada punto se encuentre en el eje óptico del colimador, en los limbos azimutal y vertical del aparato se podrán leer los ángulos correspondientes, como si se observaran con un teodolito desde la misma estación los puntos del terreno y tomándose nota de ellos despues por intersección se tendrá su situación planimétrica y su distancia á las estaciones desde donde se sacaron las vistas, que los comprenden, y con ellos y los ángulos verticales se deducen las alturas relativas.

Desde luego se comprende que bien realizada la idea del ilustre Porro se conseguirían resultados mas precisos que por el procedimiento fotogramétrico explicado, porque se evitarían muchos de los errores que le son propios; pero parécenos que la construcción y conservación de las placas esféricas sensibles sería una dificultad y otra mayor la *identificación de las imágenes* de cada punto en las dos ó tres negativas necesarias para su determinación; pero resueltas estas dificultades y concretando los puntos á los estrictamente necesarios podríase por este medio realizar el levantamiento de los planos acotados de los terrenos muy escabrosos descubiertos, que es en donde ambos procedimientos pueden tener mas aplicación, con mayor precisión que con el de placas sensibles planas, de que nos hemos ocupado, viéndose en esto, como en todas las propuestas del eximio Porro, lo genial de sus trascendentales iniciativas.

ÍNDICE DEL VOLUMEN SEGUNDO

PROCEDIMIENTOS TOPOGRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

PRIMERA PARTE

Antiguos procedimientos

PÁGINAS

1.—Clasificación de la materia 7

CAPÍTULO I

Teoría y aplicación de los procecimientos planimétricos

ARTÍCULO PRIMERO

TEORÍA DE LOS ANTIGUOS PROCEDIMIENTOS PLANIMÉTRICOS

2.—Su clasificación (figuras 1.ª y 2.ª). 7
3.—Sistema de perpendiculares (figuras 3.ª á 8.ª) 8
4.—Sistema de recorrimiento ó poligonal.—*En polígonos cerrados:* con las pantómetras y teodolitos, con las brújulas, con el sextante y círculo de reflexión, con la plancheta; *en polígonos abiertos* de extremos determinados préviamente y no determinados: con pantómetras y teodolitos, con las brújulas y con la plancheta; manera de calcular los ángulos del polígono conociendo los rumbos directos é inversos de sus lados, y los rumbos conociendo aquéllos y el rumbo de un lado (figuras 9.ª y 10) . 11
5.—Sistema de triangulación; métodos de medición, de radicación y de intersección (figura 11) 19
6.—Sistema mixto en terrenos de grande, mediana y pequeña extensión (figura 12) . 22

ARTÍCULO SEGUNDO

TOLERANCIAS ADMITIDAS EN LAS NACIONES MAS ADELANTADAS PARA LOS MEJORES PLANOS CATASTRALES

7.—Preliminares. 25
8.—Tolerancia en los ángulos 25
9.—Tolerancia en las distancias. 27
10.—Tolerancia en el cierre de los polígonos 30
11.—La incertidumbre, segun Salmoiraghi, y consecuencias 34

Páginas

ARTÍCULO TERCERO

TRABAJOS DE CAMPO

12.—Su clasificación 38
13.—Levantamiento del plano de terrenos de pequeña extensión con distintos procedimientos y aparatos (figuras 1.ª y 9.ª repetidas, y las 13, 14 y 15) 38
14.—Levantamiento del plano de terrenos y poblaciones de mediana extensión con distintos procedimientos y aparatos (figuras 16, 17 y 18) 47
15.—Levantamiento del plano de terrenos de grande extensión ó de grandes poblaciones. 59

ARTÍCULO CUARTO

TRABAJOS DE GABINETE

16.—Clasificación (figuras 19 y 20) 61

DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS PLANOS

17.—Levantados por el sistema de perpendiculares 63

CONSTRUCCIÓN DE LOS PLANOS LEVANTADOS POR EL SISTEMA DE RECORRIMIENTO Ó POLIGONAL COMO PRINCIPAL

18.—Levantados con la plancheta.—Reglas de investigación de los errores (figs. 21 y 22). 66
19.—Levantados con la brújula.—Trasportadores de talco de semicírculo y círculo entero (figuras 23 á 25) 69
20.—Levantados con la pantómetra ó el teodolito 73
21.—Construcción de los planos levantados por el método de intersecciones, como principal 74
22.—Levantados con la plancheta 74
23.—Levantados con la brújula 75
24.—Levantados con las pantómetras ó los teodolitos.—Cálculo de las coordenadas y comprobaciones que por su medio se consiguen.—Trasportador de tres reglas ó dos alidadas.—Station-pointer (figura 26) 76

DIBUJADO DE LOS PLANOS

25.—Consideraciones generales.—¿Se debe cuadricular el papel de los planos en limpio? —¿En ellos han de figurar las líneas de base y las letras ó números con que se designaron los puntos en el levantamiento y constan en los cróquis y registros? . . 78
26.—Medios de representación y signos convencionales.—Puntos.—Límites.—Vías de comunicación.—Aguas.—Construcciones y edificios.—Diferentes suelos y cultivos. —Escrituras de los planos (figuras 27 á 37). 79

COPIA, REDUCCIÓN Y AMPLIFICACIÓN DE LOS PLANOS

27.—Copia de los planos por calco, cuadrícula ó con el pantógrafo primitivo, milanés y suspendidos.—Calcos con tela lúcida.—Copias cianográficas, heliográficas, etc. (figuras 38 á 42) 84
28.—Reducción y amplificación de los planos (figura 43) 90

MEDICIÓN DE LA SUPERFICIE DEL TERRENO REPRESENTADO EN LOS PLANOS GRÁFICOS

29.—Clasificación de los procedimientos utilizados 91
30.—Medición numérica de la superficie del terreno (figuras 44 y 1.ª y 9.ª repetidas). . 91
31.—Medición gráfica de las superficies.—Subdivisión de los polígonos por rectas de compensación, cristal rayado, cuadrícula milimétrica en papel traslúcido, papel de dibujo cuadriculado (figuras 45 y 46). 94

PÁGINAS

MEDICIÓN MECÁNICA DE LAS SUPERFICIES

32.—Clasificación 96
33.—Curvímetro á ruleta de Dupuit (figuras 47 y 48) 97
34.—Planímetros cartesianos (figura 49) 98
35.—Descripción del planímetro ortogonal de Wetli (figuras 50 y 51) 101
36.—Planímetro polar de Amsler.—Descripción del modelo mas generalizado.—Teoría de estos planímetros.—Verificaciones, correcciones y manejo.—Precisión que con estos planímetros se consigue.—Otros modelos del planímetro polar (figuras 52 á 61) 104
37.—Orden en que deben medirse las áreas de las partes integrantes de un plano para comprobarlas y compensar los errores 115
38.—Comprobación de los planos.—Su importancia.—Exámen de registros y cróquis.—Reconocimiento del terreno.—Medición de alineaciones transversales.—Tolerancias en la superficie prescritas en los catastros mas perfectos y observaciones críticas 117

CAPÍTULO II

Teoría y aplicación de los procedimientos altimétricos

ARTÍCULO PRIMERO

TEORÍA DE LOS PROCEDIMIENTOS ALTIMÉTRICOS

39.—Su clasificación 120

NIVELACIÓN SIMPLE Ó DETERMINACIÓN DE LAS ALTURAS RELATIVAS DE LOS PUNTOS VISTOS DESDE UNA ESTACIÓN

40.—Con los niveles (figura 62) 121
41.—Con los eclímetros ó goniómetros con limbo vertical 123
42.—Con los clisímetros y los barómetros 125

NIVELACIÓN RECÍPROCA Y COMPUESTA Ó DETERMINACIÓN DE LAS ALTURAS RELATIVAS DE DOS PUNTOS MEDIANTE DOS Ó MAS ESTACIONES RELACIONADAS ENTRE SÍ

43.—Con los niveles.—Modelo del registro general.—Obstáculos.—Comprobaciones.—Errores tolerables y su distribución (figuras 63 á 65). 125
44.—Con los eclímetros ó goniómetros de limbo vertical.—Comprobaciones, precisión, error de cierre y su repartición 134
45.—Con los clisímetros y barómetros. 136

PERFIL LONGITUDINAL Y TRANSVERSALES

46.—Definición.—Señalamiento.—Determinación del longitudinal y transversales.—Registros.—Casos particulares (figuras 66 á 71) 137

PLANOS ACOTADOS

47.—Definición.—Manera de realizarlos.—Problemas que con ellos se resuelven (figura 72) 145

PLANOS CON CURVAS DE NIVEL

48.—Definición.—Problemas que con ellos se resuelven.—Equidistancias real y gráfica propuestas.—Trazado y levantamiento del plano de las curvas de nivel.—Trazado directo.—Obstáculos.—Trazado indirecto.—Levantamiento de las curvas trazadas

Páginas

sobre el terreno.—Trazado y levantamiento del plano de las curvas por los procedimientos modernos.—Métodos de la cadena arrastrada con plancheta y nivel.—Idem por alineaciones paralelas.—Idem del comandante Clerc.—Planos con curvas de nivel de las poblaciones (figuras 73 á 79) 147
49.—Acotación, perfiles y curvas de nivel de terreno de considerable extensión . . 160
50.—Comparación crítica de los dos procedimientos de trazado de las curvas de nivel . 160

ARTÍCULO SEGUNDO

TRABAJOS DE CAMPO

51.—Preliminares y clasificación 162
52.—*En la nivelación recíproca y compuesta:* Con el nivel de agua ó de pínulas.—Con el nivel de anteojo ordinario ó el perfeccionado estadimétrico con limbo azimutal.—Con los eclímetros, inclinómetros ó clisímetros propiamente dichos . . . 163
53.—*En los perfiles longitudinales y transversales*: Con el nivel de agua ó de pínulas.—Con el nivel de anteojo ordinario ó el estadimétrico con limbo azimutal.—Con los eclímetros, inclinómetros ó clisímetros propiamente dichos 165
54.—*En la acotación de los planos:* Con el nivel de agua ó de pínulas.—Con el nivel de anteojo ordinario ó el estadimétrico con limbo azimutal.—Con los eclímetros, inclinómetros ó clisímetros propiamente dichos 168
55.—*En el trazado y levantamiento del plano de las curvas de nivel* 169

ARTÍCULO TERCERO

TRABAJOS DE GABINETE

56.—En la nivelación simple, recíproca y compuesta. 170
57.—En los perfiles longitudinales y transversales (figura 80) 170
58.—En los planos acotados. 172
59.—En los planos con curvas de nivel 173

SEGUNDA PARTE

Procedimientos modernos

60.—Clasificación de la materia 175

ARTÍCULO PRIMERO

NOCIONES PREVIAS

61.—Graduación de los limbos 175
62.—Determinación de un punto del espacio con referencia á otro por medio de varios sistemas de coordenadas (figura 74 del volumen I repetida y 81) 176
63.—Propiedades características de cada sistema de coordenadas, polares, mixtas y ortogonales 179
64.—Deducción de las coordenadas mixtas y ortogonales de las polares y recíprocamente éstas de aquellas. 180
65.—Algunas consideraciones sobre la influencia que en el error de cierre de una poligonal tienen los cometidos en los ángulos, y en las distancias é inmediatas consecuencias que han de servir de base á los procedimientos topográficos perfeccionados.—1.ª Conveniencia de medir y utilizar en la construcción de los planos los

rumbos ó azimutes.—2.ª *Cuanto menor es la longitud de un lado de una poligonal tanto mayor debe ser el cuidado con que se centre el aparato y se haga la puntería.*—3.ª Los errores en las distancias influyen en el de cierre de las poligonales de una manera muy distinta que los que en los ángulos se cometen, y su combinación hace imposible la repartición racional de aquel error, por lo que es de todo punto necesario separarlos y localizarlos evitando en lo posible su acumulación . . 185

ARTÍCULO SEGUNDO

TEORÍA DE LOS PROCEDIMIENTOS MODERNOS

66.—Clasificación.—Casos principales que pueden ocurrir. 189
67.—1.er caso: Que las condiciones del terreno permitan medir cómodamente y con la precisión deseable las coordenadas polares de todos los puntos característicos desde una sola estación 190
68.—2.º caso: En que para conseguir el mismo objeto sea necesario utilizar dos estaciones visibles una de otra y cuya distancia pueda medirse con una sola observación (figura 82) 193
69.—3.er caso: En que la distancia entre las dos estaciones indicadas en el número anterior sea mayor que la medible con una sola observación y menor que el duplo de su límite (figuras 83 y 84) 195
70.—4.º caso: En que el terreno objeto del plano consista en una zona de grande longitud y poca anchura, exigiendo muchas estaciones sin ó con puntos de comprobación préviamente determinados.—*Poligonación con comprobaciones sucesivas* (figuras 85 y 86). 198
71.—5.º caso: En que el terreno, siendo de considerable extensión en todos sentidos, no alcance la que exija una especial triangulación (figura 87) 206
72.—6.º caso: Finalmente, en que siendo de muy grande extensión, sea necesaria una previa triangulación ó deba referirse á la general del territorio de que forma parte. 210

ARTÍCULO TERCERO

TRABAJOS DE CAMPO

73.—Clasificación 211
74.—Comprobación y corrección de los aparatos goniométricos y estadimétricos necesarios (figura 88) 212
75.—Preparación de los medios de señalamiento y marcación de los puntos, de los registros y cróquis (figuras 89 y 90) 213
76.—Organización de las brigadas é instrucción de los porta-miras y demas peones auxiliares 221
77.—Reconocimiento general y detallado del terreno 223
78.—Orden y condiciones con que deben realizarse las observaciones, manera de hacerlas y sus tolerancias inmediatas (figuras 91 y 92) 224

ARTÍCULO CUARTO

TRABAJOS DE GABINETE

79.—Clasificación. 232
80.—Fórmulas topográficas mas usuales y consideraciones generales sobre su mas sencilla solución 233
81.—*Aparatos destinados á realizar los cálculos mecánicamente.*—Escalas de Porro.—Regla logarítmica taquimétrica centesimal ó de Moinot.—Regla ó Aritmógrafo Castiglia-

no.—Regla taquimétrica de Soldati.—Círculo logarítmico de Porro.—Círculo logarítmico de Salmoiraghi.—Círculo logarítmico y doble transportador de Ruiz Amado.—Cuadro gráfico de Mas y Zaldúa (figuras 93 á 97) 234

82.—*Principales tablas numéricas especiales destinadas á los cálculos topográficos.*—De Cardedera y Alonso.—De Bárcena.—De Cuartero.—De Ruiz Amado.—De Orlandi, dos diferentes.—De Jadanza.—De Herrera y Torres y de Salmoiraghi 253

83.—*Transportadores especiales, cuadradores y coordinatógrafos.*—Transportador de círculo entero y alidada.—Semicirculares con alidada fija y con contrapeso.—De círculo entero para calcar.—Transportador reductor de Piat.—Id. id. de Abate-Daga (figuras 98 á 105).—Cuadradores y coordinatógrafos (figuras 106 y 107) . . 285

84.—Preparación y construcción de los planos levantados por los procedimientos modernos.—Diferentes clases de planos y cálculos y construcciones comunes en los levantados por los procedimientos modernos.—Manera de operar en los planos gráfico-numéricos.—Manera de deducir las curvas de nivel de la acotación de tales planos geométrica y numéricamente.—Construcción de los gráficos en los planos numéricos (figura 108) 295

85.—Dibujado, copia, reducción y amplificación de los gráficos de los planos numéricos. 304

86.—Medición de la superficie de los gráficos en los planos numéricos y del terreno sin gráficos en función de las coordenadas θ y D ó de las X é Y (figura 109) . . . 305

87.—Comparación entre los planos simplemente gráficos, los gráfico-numéricos y los numéricos con gráfico (figura 110). 308

PARTE TERCERA

Triangulaciones topográficas, nivelaciones de precisión y revisión de los planos

88.—Clasificación. 313

CAPÍTULO I

Triangulaciones topográficas

89.—Preliminares. 314

ARTÍCULO PRIMERO

TEORÍA DE LAS TRIANGULACIONES TOPOGRÁFICAS

90.—Consideraciones generales (figura 111). 314

91.—Condiciones generales de los vértices, como puntos de estación y de mira. . . 317

92.—Forma mas conveniente de los triángulos (figura 112) 318

93.—Longitud de los lados 320

94.—Condiciones de las bases de partida y de comprobación.—Terreno, longitud, aparatos de medición y su manejo, precisión necesaria y manera de relacionarlas con los lados de los triángulos (figuras 113 á 117) 322

95.—Medición de los ángulos.—Precisión necesaria.—Manera de conseguirla haciendo estación en el vértice y fuera de él.—Registros apropiados (figura 118) . . . 334

96.—Comprobación de los ángulos en cada triángulo y polígono y compensación de los errores resultantes 344

Páginas

97.—Resolución de los triángulos integrantes de la red.—Comprobación de cada uno de los polígonos resultantes y de los componentes de porciones importantes de aquella.—Error de cierre en cada uno y su repartición.—Redes en cadena, comprobación y repartición de errores en los cuadriláteros resultantes (figuras 119 y 120) . 346
98.—Trisección directa, medios de comprobación, tolerancia.—Trisección inversa ó problema de Snelio-Pothenot ó de vértice de pirámide, medios de comprobación y casos principales (figuras 121 á 125) 357
99.—Determinación de la meridiana.—Azimut verdadero de los lados de los triángulos.—Divergencia de los meridianos (figuras 126 á 128) 363
100.—Cálculo de las coordenadas ortogonales de los vértices de los triángulos.—Tablas con los errores de la refracción de la luz en la atmósfera segun el ángulo zenital, la temperatura y la presión 378
101.—Cálculo de las coordenadas geográficas de los vértices de la triangulación y otros puntos, mediante el conocimiento de las de uno de aquéllos y las planimétricas de todos. 385
102.—Determinación de la latitud y longitud de un punto (figura 129) 387

ARTÍCULO SEGUNDO

PRÁCTICA DE LAS TRIANGULACIONES TOPOGRÁFICAS

103.—Clasificación de la materia. 389
104.—Proyecto de la triangulación y marcación de todos los vértices (figuras 130 á 132) . 389
105.—Elección, medición y orientación de las bases de partida y de comprobación . . 395
106.—Medición de los ángulos y sus primeras comprobaciones y compensaciones . . 396
107.—Resolución de los triángulos, error de cierre y compensación definitiva . . . 397
108.—Cálculo de las coordenadas topográficas y geográficas de los vértices . . . 398

CAPÍTULO II

Nivelaciones de grande precisión

109.—Consideraciones preliminares 399
110.—Teorías ortométrica y dinámica (figuras 133 á 136) 400
111.—Procedimiento y aparatos utilizados en la nueva nivelación general de Francia . 406

CAPÍTULO III

Revisión de los planos

112.—Consideraciones generales y clasificación 411
113.—Verificaciones de planos numéricos con gráfico y tolerancia bien determinada.—Con registros y cróquis y expresión del aparato y procedimiento utilizados . . 412
114.—Verificación de planos numéricos con gráfico y tolerancia bien determinada.—Sin registros ni cróquis, ni expresión del aparato y procedimiento utilizados . . 414
115.—Verificación de planos simplemente gráficos, con cróquis, registros y expresión del aparato y procedimiento utilizados 415
116.—Verificación de planos simplemente gráficos, sin registros, ni cróquis, ni expresión del aparato y procedimiento utilizados.—Observación general sobre la revisión de los trabajos, en que la nivelación es la base esencial 417

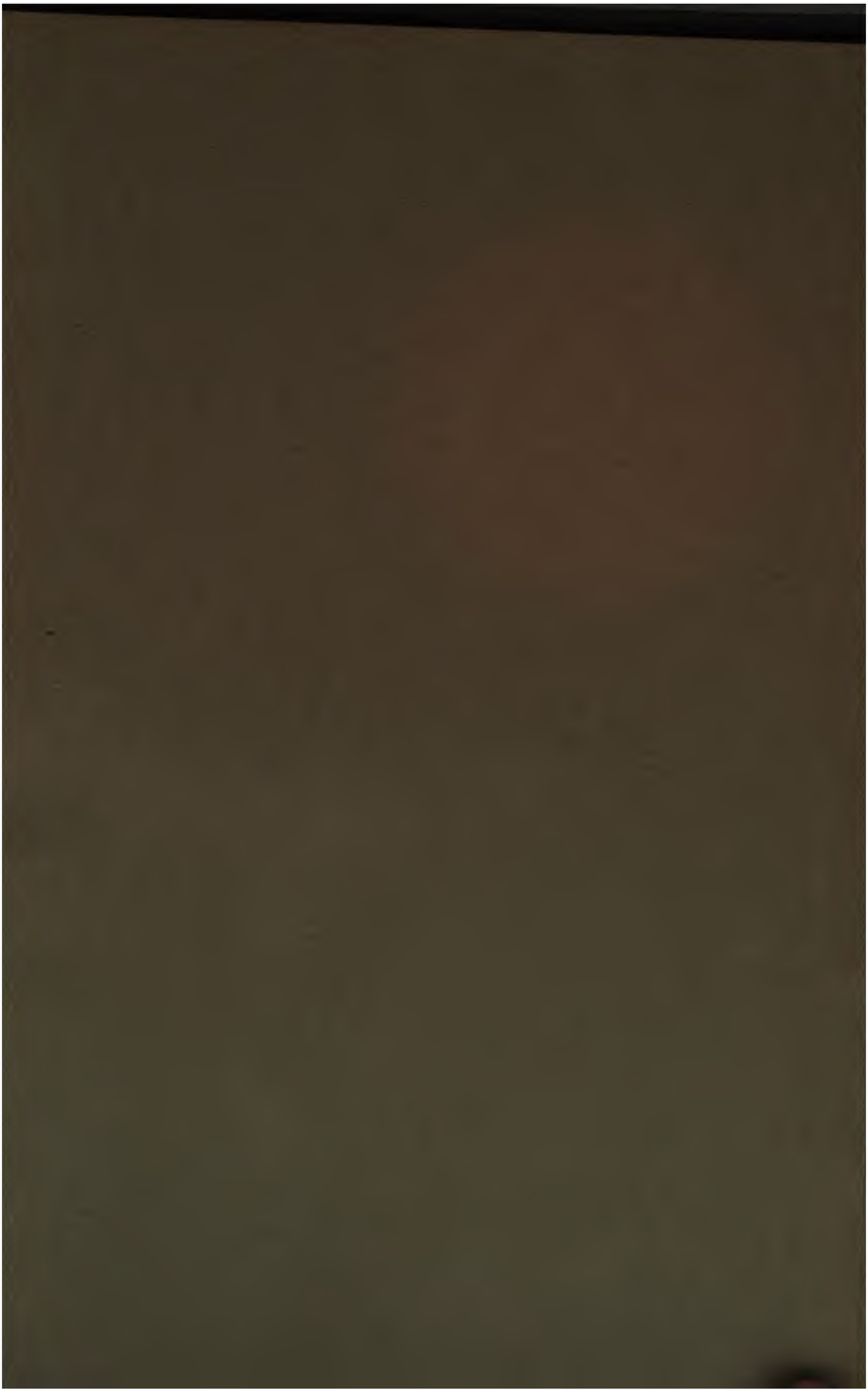
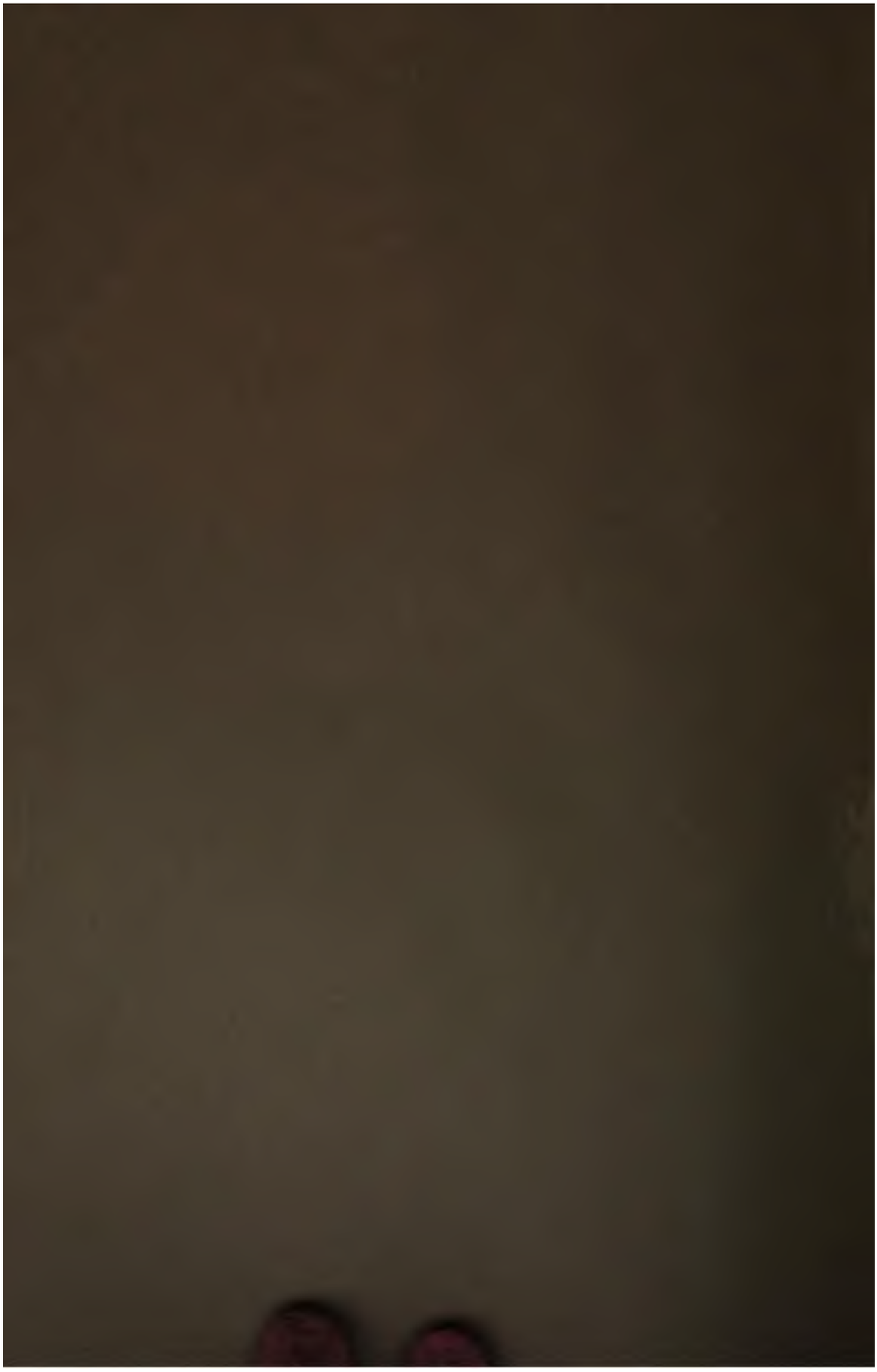
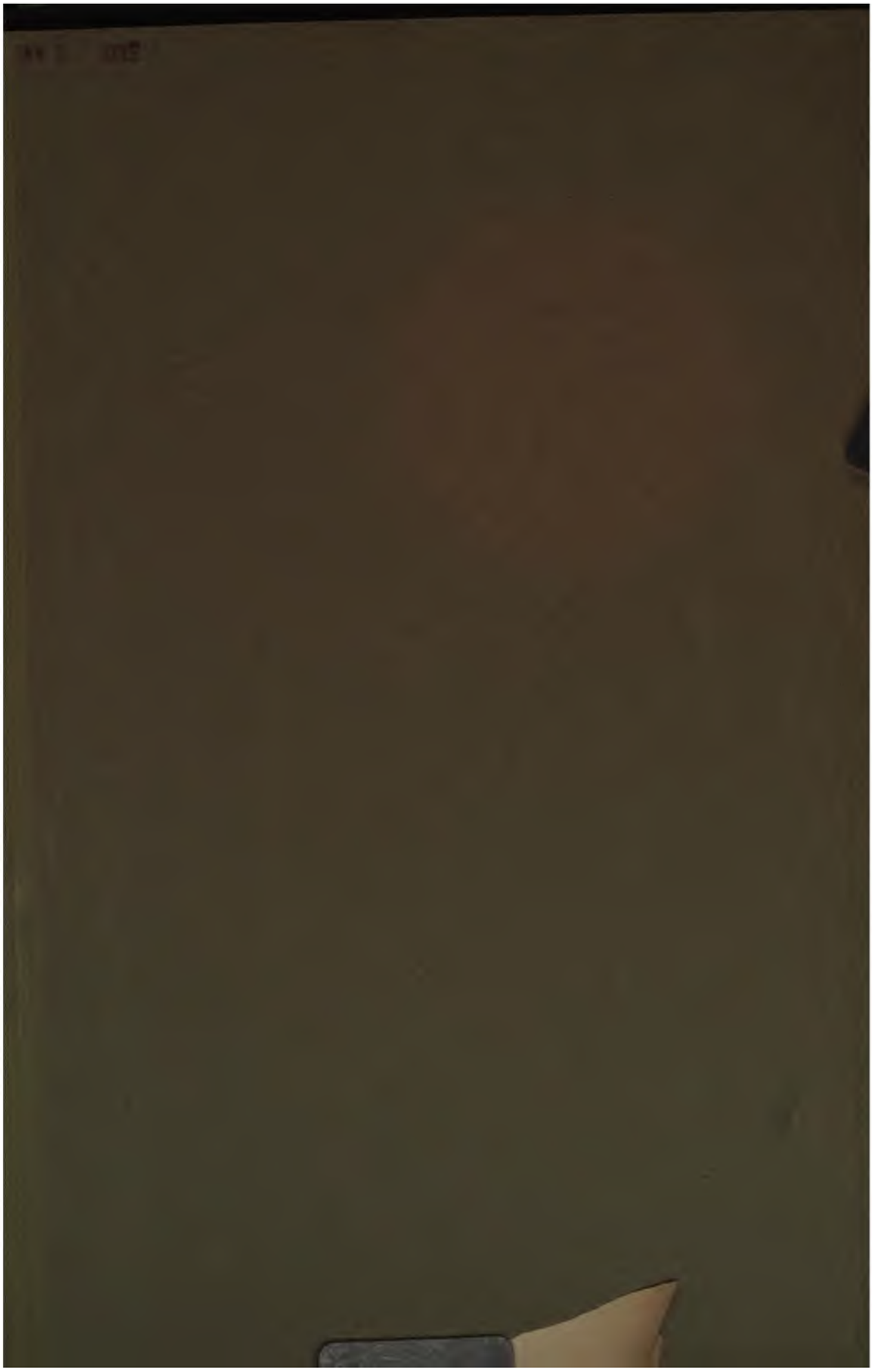
APÉNDICE

Topografía fotográfica

PÁGINAS

1.—*Observación prévia* 419
2.—*¿Quien fué el fundador de este procedimiento?—Perfeccionamientos.—Bibliografía* . 419
3.—*Fundamento y teoría del procedimiento foto-topográfico y consideraciones críticas sobre la precisión con que por su medio se consiguen los planos (figuras 137 y 138)* . . 421
4.—*Taquímetro fotográfico de Salmoiraghi.—Descripción, comprobaciones y correcciones considerado como taquímetro y como fotográmetro (figuras 139 á 144)* . . . 428
5.—*Trabajos de campo* 435
6.—*Trabajos de gabinete (figuras 145 á 148)* 437
7.—*Fotografía esférica y fotográmetro de Porro (figura 149)* 442
Indice de las materias contenidas en el segundo volúmen 445

ERRATAS

PÁGINAS	LÍNEAS	DICE	DEBE DECIR
26	13, 14 y 15	2′ á 4`, 2‘5′ á 5`, 3′ á 6′	2′ ó 4`, 2‘5′ ó 5`, 3′ ó 6`
113	9 y 10	inversamente proporcional	proporcionalmente
233	7	$g\frac{\text{sen.}^2\varphi}{2}$	$g=\frac{\text{sen. } 2\varphi}{2}$
238	17	estadimétrica	taquimétrica
261	17	70c á 85c y de 115c á 130c	118c á 118‘50c
300	17	v. gr. metros	v. gr. 5 metros
346	18	Para repetir	Para repartir
361	19	en mas ó en menos de 30"	en mas de 30°
421	12	Ingeniosos agrónomos	Ingenieros agrónomos

GRABADO Y ESTAMPADO
POR J. THOMAS DE BAR-
CELONA. — AÑO MCMV.